

境界要素法の高精度数値積分法と誤差解析

日本電気(株) C & C 情報研究所

速水 謙 (Ken Hayami)

§ 1. はじめに

境界要素法は工学上重要な数値解法として定着して来たが、その計算精度を支配する数値積分法は今だに重要な研究課題である。特にソース点が境界に近い場合に生じる擬似特異積分の高精度計算は困難を極める。これは、工学で頻繁に現れる薄い構造や狭いギャップ、細長い要素を使った計算、また、境界近傍でのポテンシャル・フラックスの計算で生じる。

本論文では、3次元境界要素法で生じる擬似特異積分に対して筆者が提案した高精度数値積分法(PART法)^{[1]~[3]}に於て精度を支配する重径方向の $(\log-L_2, \log-L_1)$ 変数変換について、複素関数論を用いた数値積分誤差の評価式を与え、各変換の特性を理論的に明らかにする。

§ 2. 境界要素法の定式化

3次元ポテンシャル問題を例にとり、境界積分方程式は

$$C(x_s) u(x_s) = \int_N (q u^* - u q^*) dN \quad (2.1)$$

但し x_s はソース点で、 $x \in N$, $ir = x - x_s$, $r = |ir|$,

n は x での N の単位外向き法線,

$$u^*(x, x_s) = \frac{1}{4\pi r}, \quad q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} = -\frac{(ir, n)}{4\pi r^3}, \quad (2.2)$$

また、 x_s でのフラックスは

$$\frac{\partial u}{\partial x_s} = \int_N \left(q \frac{\partial u^*}{\partial x_s} - u \frac{\partial q^*}{\partial x_s} \right) dN \quad (2.3)$$

但し、

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_s} = \frac{ir}{4\pi r^3}, \quad \frac{\partial q^*}{\partial x_s} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{in}{r^3} - \frac{3(ir, n)}{r^5} \right\} \quad (2.4)$$

より求まる。(2.1), (2.3) 式を境界 N に関して離散化する事により、境界要素法の定式化を得る。

ここで (2.1), (2.3) 式の積分核はソース点 x_s と境界(要素) N との距離 d が要素サイズに比べて小さいとき ($0 < d \ll 1$) 擬似特異となり、高精度で数値積分を行う事が困難になる。

§3. 擬似特異積分の性質

擬似特異性はソース点 x_s の近傍で顕著になる事から、図3.1の様な平面要素 N の場合を考えればその基本的性質は捉えられる。つまり、(2.2), (2.4) 式より、

$$u^* = \frac{1}{4\pi r}, \quad q^* = -\frac{d}{4\pi r^3} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_s} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{p \cos \theta}{r^3}, \frac{p \sin \theta}{r^3}, -\frac{d}{r^3} \right)$$

$$\frac{\partial q^*}{\partial x_s} = \frac{1}{4\pi} \left(-3d \frac{p \cos \theta}{r^5}, -3d \frac{p \sin \theta}{r^5}, -\frac{1}{r^3} + \frac{3d^2}{r^5} \right) \quad (3.2)$$

従、 γ 軌径方向に着目すると積分核の性質は表 3.1 の様になる。

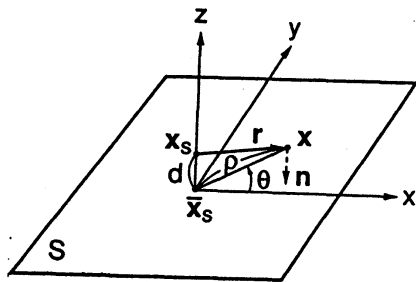


図 3.1 平面要素 N

表 3.1 擬定似特異積分核の性質

u^*	$\frac{1}{r}$
q^*	$\frac{1}{r^3}$
$\frac{\partial u^*}{\partial x_s}$	$\frac{1}{r^3}, \frac{p}{r^3}$
$\frac{\partial q^*}{\partial x_s}$	$\frac{1}{r^3}, \frac{1}{r^5}, \frac{p}{r^5}$

§ 4. PART法の概要

PART法 (Projection and Angular & Radial Transformation method) は図 4.1 の様な曲面要素 N 上で、式 (2.1), (2.3) で現れる様な擬定似特異積分

$$I = \int_N \frac{f}{r^\alpha} dN, \quad (\alpha \in \mathbb{N}) \quad (4.1)$$

に対し、

図 4.1 曲面要素 N

(1) ソース点の射影: N 上でソース点 x_s に最も近い点 $\bar{x}_s = x(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)$

を Newton-Raphson 法により求める。

(2) N の近似射影: N を、 $\bar{x}_s$ での N の接平面上の (N の頂点の射影が構成する) 四角形 $\bar{N}$ に近似射影する。

(3) $\bar{N}$ で $\bar{x}_s$ を中心とする 極座標 (ρ, θ) を導入する。つまり、

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{p_{\max}(\theta)} \frac{f}{r^\alpha} J p dp \quad (4.2)$$

(4) 動径方向の変数変換: 擬似特異性を緩和するような動径方向の変数変換 $R(p)$ を施す。

(5) $\bar{r}_s$ が $\sqrt{}$ の辺に接近している場合 (4.2) 式の $p_{\max}(\theta)$ が θ に

関して擬似特異性をもつので、これを緩和するために、

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{p_{\max}(\theta)} = \frac{\cos(\theta - \alpha_j)}{h_j} \quad (4.3)$$

となるような偏角方向の変数変換

$$t(\theta) = \frac{h_j}{2} \log \left\{ \frac{1 + \sin(\theta - \alpha_j)}{1 - \sin(\theta - \alpha_j)} \right\} \quad (4.4)$$

を施す。

$$(6) \quad I = \int_{t(0)}^{t(2\pi)} \frac{dt}{p_{\max}(\theta)} \int_{R(0)}^{R\{p_{\max}(\theta)\}} \frac{f J p}{r^\alpha} \frac{dp}{dR} dR \quad (4.5)$$

で R, t に関して Gauss-Legendre の公式^[4]により数値積分を行う。

§ 5. 動径方向の変数変換

PART法では、動径方向の変数変換 $R(p)$ の良否が擬似特異積分に対する数値積分の精度を支配する。文献^[1]で筆者は曲面要素での r に対する近似距離 $r' \equiv \sqrt{p^2 + d^2}$ を用いて

$$p dp = r'^\beta dR, \quad (\beta \in \mathbb{N}) \quad (5.1)$$

で定義される変換の内、 $\beta = 2$ に対応する log-L₂ 変換:

$$R(p) = \log \sqrt{p^2 + d^2} \quad (5.2)$$

が擬似特異性のオーダー α によらず、 $\int_N \frac{dN}{r^\alpha}$ の計算に有効な事を曲面 N に対する数値実験により示した。

ところが、図 5.1 の、正
方形要素 $\Omega: [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$ 、
ソース点 $x_s = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, d)$ 、
 $d = 0.01$ での数値実験が
示す様に、 $\log-L_2$ 変換は
 $\int_{\Omega} u^* d\Omega$, $\int_{\Omega} q^* d\Omega$ には
有効だが、フラックス

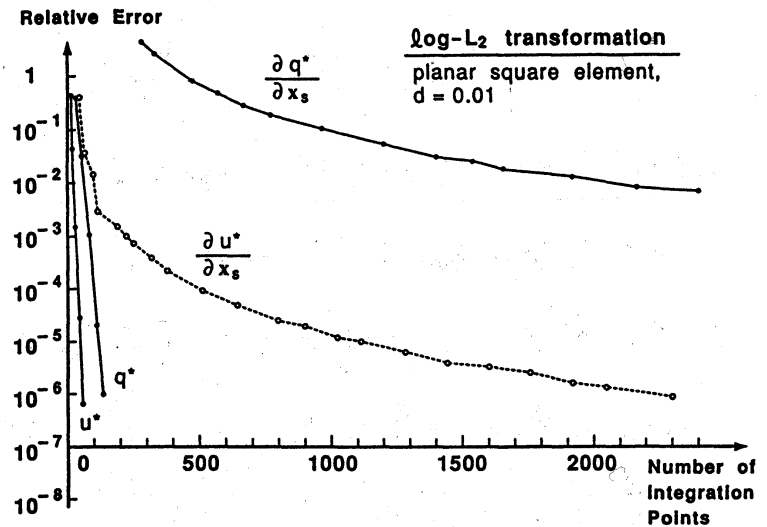


図 5.1 $\log-L_2$ 変換 (相対誤差 vs. 積分点数)

の計算で生じる $\int_{\Omega} \frac{\partial u^*}{\partial x_s} d\Omega$, $\int_{\Omega} \frac{\partial q^*}{\partial x_s} d\Omega$ の計算には向いていない。

これは表 3.1 が示す様に後者の積分核が分子に p を含むため、
式 (4.5) の R に関する積分核が $F(R) = pr^{\beta-\alpha}$ となり、端点
 $p=0$ で $\frac{dF}{dR} = \infty$ になるために生じると考えられる。これは (5.2)
式で $\frac{dp}{dR} = \frac{r^2}{p}$ が端点 $p=0$ で ∞ になる事に帰因している。

この欠点を克服するために文献^[3]で筆者は $\log-L_1$ 変換：

$$R(p) = \log(p + d) \quad (5.3)$$

を提案し、図 5.2 が示す
様に u^* , q^* だけでなく、
 $\frac{\partial u^*}{\partial x_s}$, $\frac{\partial q^*}{\partial x_s}$ の積分にも有
効な事を示した。(条件
は図 5.1 と同様。) また、
(5.3) 式が内そう関数も含
んだ曲面上の擬似特異

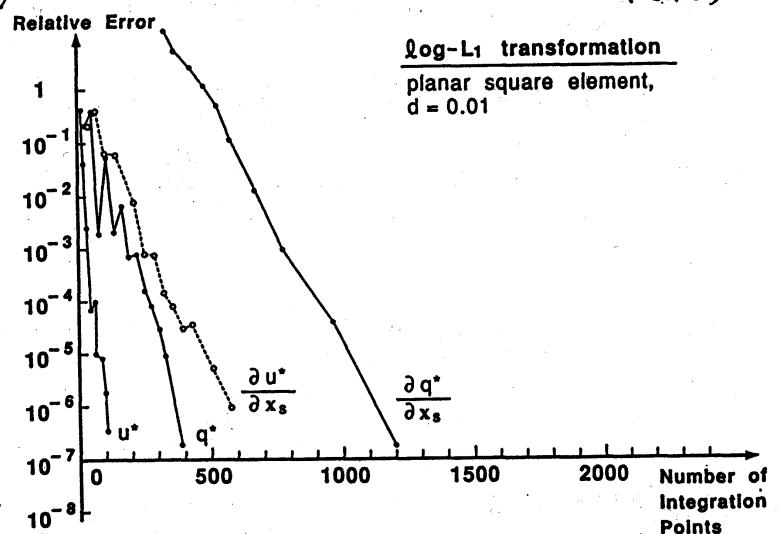


図 5.2 $\log-L_1$ 変換 (相対誤差 vs. 積分点数)

積分だけでなく、 $d \rightarrow 0$ の超特異積分 (コーシーの主値) の計算にも有効な事を数値実験により示した。

§ 6. 複素関数論を用いた数値積分誤差の評価法

(1) 誤差評価の基本定理

実軸上の区間 $J = (-1, 1)$ 上の積分 $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$ に対する数値積分公式 $I \sim I_n = \sum_{j=1}^n A_j f(a_j)$ の誤差 $E_n(f) = I - I_n$ に関して次の定理が成り立つ^[5]。

定理 6.1 $f(z)$ が $K = [-1, 1]$ で正則のとき、

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \Psi(z) f(z) dz, \quad I_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \Psi_n(z) f(z) dz \quad (6.1)$$

$$E_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \Phi_n(z) f(z) dz \quad (6.2)$$

但し、

$$\Psi(z) = \int_{-1}^1 \frac{dx}{z-x}, \quad \Psi_n(z) = \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{z-a_j}, \quad (6.3)$$

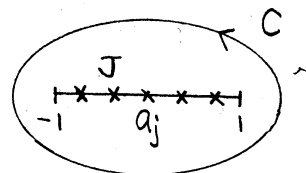
$$\Phi_n(z) = \Psi(z) - \Psi_n(z) \quad (6.4)$$

また、積分路は図 6.1 の様に区間 J 及び積分点 $a_1, \dots, a_n$ を正の向きに 1 周し、その内部には $f(z)$ の特異点を含まないものとする。

ここで $\Phi_n(z)$ を数値積分公式の誤差の特性関数と呼ぶ。

我々の用いる Gauss-Legendre の公式では、

$$\begin{aligned} \Phi_n(z) &= \frac{1}{p_n(z)} \int_{-1}^1 \frac{p_n(x)}{z-x} dx \\ &= \frac{1}{p_n(z)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} \int_{-1}^1 x^k p_n(x) dx \end{aligned} \quad (6.5)$$



但し、 $p_n(x)$ は区間 $(-1, 1)$ で定義された Legendre 関数である。図 6.1 積分路 C

の $9q$ 項式で、その零点を定理 6.1 の積分点 $a_1, \dots, a_n$ として用いる。

(2) 誤差の特性関数 $\Phi_n(z)$ の漸近式

定理 6.1 を用いて具体的に数値積分の誤差評価を行うには $\Phi_n(z)$ の漸近式が必要となるので、Gauss-Legendre 公式に関して知られているものを以下にあげる。

(i) $|z| \gg 1$ の場合 [6]

$$\Phi_n(z) = \frac{C_n}{z^{2n+1}} \{1 + O(z^{-2})\} \quad (6.6)$$

但し、

$$C_n = \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{(2n)! (2n+1)!} \sim \frac{\pi}{2^{2n}} \quad n \gg 1 \quad (6.7)$$

($n \gg 1$ で Stirling の公式 $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ を適用)

(ii) $n \gg 1$ の場合 [7], [8]

(a) $K = [-1, 1]$ の任意の近傍を除いた領域で

$$\Phi_n(z) \sim 2\pi (z + \sqrt{z^2 - 1})^{-2n-1} \quad (6.8)$$

(b) $z = 1$ の任意の近傍を除いた領域で

$$\Phi_n(z) \sim 2e^{-i\pi} \frac{K_0(2k\vartheta)}{I_0(2k\vartheta)} \quad (6.9)$$

但し、 $z = e^{i\pi} \cosh(2\vartheta)$, $k = n + \frac{1}{2}$ で、 $I_0(z)$, $K_0(z)$

は各々オ 1 種, オ 2 種の変形された Bessel 関数である。[9]

§ 7. PART 法の軌径方向の数値積分

PART 法で精度を支配する軌径方向の数値積分に対する理論誤差評価を行う。3次元ポテンシャル問題を例にとると、軌径方向の積分の基本的な部分は式 (4.2) 及び平面一定要素に対

表 7.1 積分核の分類

	α	δ
u^*	1	1
q^*	3	1
$\frac{\partial u^*}{\partial x_s}$	3	1 2
$\frac{\partial q^*}{\partial x_s}$	3 5	1 2

する表 3.1 より、表 7.1 及び

$$I = \int_0^{p_j} \frac{p^\delta}{r^\alpha} dp \quad (7.1)$$

で表わされる。但し、 p_j は (4.2) 式の $p_{\max}(\theta)$ に相当する。

(7.1) 式に動径方向の変数変換 $R(p)$ を施すと

$$I = \int_{R(0)}^{R(p_j)} \frac{p^\delta}{r^\alpha} \frac{dp}{dR} dR \quad (7.2)$$

を得、更に区間 $(-1, 1)$ に変換すると

$$I = \int_{-1}^1 \frac{p^\delta}{r^\alpha} \frac{dp}{dR} \frac{dR}{dx} dx \equiv \int_{-1}^1 f(x) dx \quad (7.3)$$

但し、

$$R = \frac{\{R(p_j) - R(0)\}x + R(p_j) + R(0)}{2} \quad (7.4)$$

従、(7.3) 式に Gauss-Legendre 公式 (以下 GL 則と呼ぶ) を適用したときの数値積分誤差 $E_n(f)$ を定理 6.1 を用いて評価すればよい。

§ 8. log-L₂ 変換を用いた数値積分の誤差評価

(5.2) 式の log-L₂ 変換: $R(p) = \log \sqrt{p^2 + d^2}$ に対しは、

$$R(0) = \ln d; \quad R(p_j) = \ln r_j, \quad r_j \equiv \sqrt{p_j^2 + d^2} \quad (8.1)$$

$$p(R) = (e^{2R} - d^2)^{\frac{1}{2}} \quad (8.2)$$

また、平面要素では $r = r' \equiv \sqrt{p^2 + d^2} = e^R$ だから、(5.1) 式

より (7.3) 式の $f(x)$ は次式より与えられる。

$$\boxed{f(x) = b \left(e^{x \ln a} - \frac{1}{a} \right)^{\frac{\delta-1}{2}} e^{\left(\frac{2-\alpha}{2} \ln a \right) x}} \\ b \equiv \frac{\ln a}{2} (r_j d)^{\frac{\delta-\alpha+1}{2}} > 0, \quad a \equiv \frac{r_j}{d} \quad (8.3)$$

(i) δ が奇数の場合

$\frac{\delta-1}{2}$ は非負整数だから $f(z)$ は $z=\infty$ を除いて正則である。

従、定理 6.1 の積分路として、 $C = \{z \mid |z|=R, R \rightarrow \infty\}$ をとり、(6.7) の $|z| \gg 1$ での漸近式を用い、 $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ とおき、

$$I_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^k dz = \begin{cases} 1, & (k=-1) \\ 0, & (k \neq -1) \end{cases} \quad (8.4)$$

に注意すれば、(6.2) 式より、(7.3) 式に GL 則を適用した時の数値積分誤差は

$$E_n(f) = \frac{C_n}{2\pi i} \oint_C f(z) z^{-2n-1} = C_n a_{2n} \quad (8.5)$$

(8.3) 式で $(e^{z \ln a} - \frac{1}{a})^{\frac{\delta-1}{2}}$ の 2 項展開より、 $e^z = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m!}$ より、

$$a_{2n} = b \frac{(\ln a)^{2n}}{(2n)!} \sum_{k=0}^{\frac{\delta-1}{2}} \frac{\delta-1}{2} C_k \left(-\frac{1}{a}\right)^k \left(\frac{\delta-\alpha+1}{2} - k\right)^{2n} \quad (8.6)$$

従、

$$\begin{aligned} E_n(f) &= (r_j d)^{\frac{\delta-\alpha+1}{2}} 2^{2n} \left\{ \ln\left(\frac{r_j}{d}\right) \right\}^{2n+1} \frac{(n!)^4}{\{(2n)!\}^2 (2n+1)!} \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\frac{\delta-1}{2}} \frac{\delta-1}{2} C_k \left(-\frac{d}{r_j}\right)^k \left(\frac{\delta-\alpha+1}{2} - k\right)^{2n} \\ &\sim_{n \gg 1} O\left\{ \frac{\ln\left(\frac{r_j}{d}\right)}{n} \right\}^{2n} \sim O(n^{-2n}) \end{aligned} \quad (8.7)$$

これが図 5.1 で $\log-L_2$ 変換が $\delta=1$ に相当する u^* , q^* の積分で高精度性を発揮する原因である。

(ii) δ が偶数の場合

この場合 $f(z)$ は

$$z_m = -1 + i \frac{2\pi m}{\ln\left(\frac{r_j}{d}\right)}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

で分岐点をもつ。定理 6.1 の条件を緩め、 $f(z)$ が積分区間 K の

端点 ($z = -1$) に特異点をもたせることがで
 きる。^[7,8] 積分路は図 8.1 の様に $C = C_\sigma + l_+ + C_\varepsilon + l_-$

をとる。但し、 C_σ は $z = \pm 1$ を焦点とする
 楕円 $|z + \sqrt{z^2 - 1}| = \sigma$, ($\sigma > 1$) で分岐点

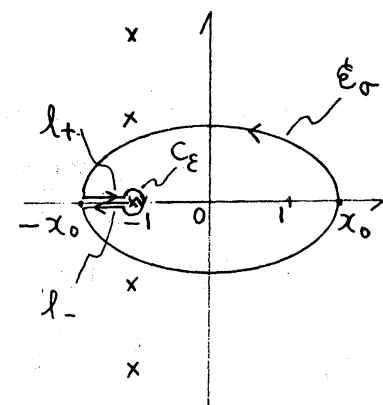


図 8.1 $f(z)$ の分岐点 (x)
 と積分路 C

$z_{\pm 1}$ は C_σ の外側にある。 C_σ の長径は
 $x_0 = \frac{1}{2}(\sigma + \frac{1}{\sigma})$ で、短径は $y_0 = \frac{1}{2}(\sigma - \frac{1}{\sigma})$

である。又、 l_+ , l_- は実軸上の区間 $(-x_0, -1)$ で各々正, 負の
 方向をとる。 C_ε は $z = -1$ を中心とする半径 ε の円である。

l_+ , l_- の寄与 (8.3) 式より

$$f(z) = \tilde{b} \left\{ e^{(z+1)\ln a} - 1 \right\}^{\frac{\delta-1}{2}} e^{\left(\frac{2-\alpha}{2}\ln a\right)z}$$

$$\tilde{b} \equiv \frac{\ln a}{2} r_j^{\frac{2-\alpha}{2}} d^{\frac{2\delta-\alpha}{2}} \quad (8.8)$$

(6.2) 式の内、分岐線 l_+ , l_- からの寄与は

$$E_{l_+, l_-} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-x_0}^{-1} \{ f(z_+) \Phi_n(z_+) - f(z_-) \Phi_n(z_-) \} dz \quad (8.9)$$

但し、 l_+ 上では $z = z_+ \equiv e^{i\pi} \cosh 2\vartheta$, l_- 上では $z = z_- \equiv e^{-i\pi} \cosh 2\vartheta$.

又、 $0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0 \equiv \frac{1}{2} \cosh^{-1} x_0 \ll 1$ とすると、

$$f(z_{\pm}) \sim B e^{\frac{\alpha-2}{2}\ln a} e^{\pm i \frac{\pi(\delta-1)}{2} \vartheta} \vartheta^{\delta-1} \quad (8.10)$$

但し、 $B \equiv (2 \ln a)^{\frac{\delta-1}{2}} \tilde{b}$ 。従って、

$$f(z_+) - f(z_-) \sim B e^{\frac{\alpha-2}{2}\ln a} 2i \sin \left\{ \frac{\pi(\delta-1)}{2} \right\} \vartheta^{\delta-1} \quad (8.11)$$

又、 $|\vartheta| \ll 1$ として $z = -\cosh 2\vartheta \sim -2\vartheta^2$, 及び漸近式 (6.9) より

$$E_{l_+, l_-} \underset{n \gg 1}{\sim} -\frac{8B}{\pi} e^{\frac{\alpha-2}{2}\ln a} \sin \left\{ \frac{\pi(\delta-1)}{2} \right\} \int_0^{\vartheta_0} \vartheta^{\delta} \frac{K_0(2k\vartheta)}{I_0(2k\vartheta)} d\vartheta \quad (8.12)$$

$= z^n$, $2k\delta \geq 2k\delta_0 \gg 1$ とおくと $\frac{K_0(2k\delta)}{I_0(2k\delta)} \sim \pi e^{-4k\delta}$ である。 [9]

$$\int_{\delta_0}^{\infty} \delta \frac{K_0(2k\delta)}{I_0(2k\delta)} d\delta \sim \frac{\pi \delta_0^{\delta} e^{-4k\delta_0}}{4k} \quad (8.13)$$

従って、(8.12), (8.13) 式より、 $\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2k} \ll \delta_0 \ll 1$ となるように

δ_0 を選ぶ。従って、楕円 E_n を選べば、 $t = 2k\delta$ とおくとにより

$$|E_{l+, l-}| \sim_{n \gg 1} \frac{\left\{ \sin \frac{\pi(\delta-1)}{2} \right\} \int_0^{\infty} t^{\delta} \frac{K_0(t)}{I_0(t)} dt \left(\ln \frac{r_j}{d} \right)^{\frac{\delta+1}{2}} d^{\delta-\alpha+1}}{\pi 2^{\frac{\delta-1}{2}} \left(n + \frac{1}{2} \right)^{\delta+1}} \quad (8.14)$$

E_n からの寄与 漸近式 (6.8) を用いると。

$$|E_{E_n}| \sim_{n \gg 1} \left| \oint_{E_n} f(z) |z + \sqrt{z^2 + 1}|^{-2n-1} dz \right| \leq 2\pi \sigma^{-2n} \max_{z \in E_n} |f(z)| \quad (8.15)$$

但し楕円 E_n の周長 $l(E_n) \leq 2\pi \frac{1}{2} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right) < 2\pi \sigma$, ($\sigma > 1$)。 [10]

$z \in E_n$ ならば、 $|\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right) \equiv X$ である。 (8.8) 式より

$$|f(z)| \leq \frac{\ln a}{2} 3^{\frac{\delta-1}{2}} d^{\delta-\alpha+1} a^{\operatorname{ind}(\alpha, \delta)} \quad (8.16)$$

$$\text{但し、} \operatorname{ind}(\alpha, \delta) \equiv \frac{(\delta-1 + 12-\alpha)X + \delta-\alpha+1}{2}$$

また、 $z = x+iy$ を通る楕円 E_n に対して

$$\sigma = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}, \quad \gamma \equiv \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \right\} \quad (8.17)$$

で $\sigma(\gamma)$ は γ に関して (狭義) 単調増加である。今、 $z = z^t \equiv -1 + i \frac{2\pi t}{\ln(\frac{r_j}{d})}$,

($0 < t < 1$) を通る楕円 E_n に対して、分岐点 $z_{\pm}$ はその外側にある。又、 $\gamma(\frac{d}{p_j})$

も $\frac{d}{p_j} > 0$ に関して (狭義) 単調増加なので $\sigma > \sigma(\gamma(0)) = 1$

となる。従ってこの楕円 E_n を積分路としてとれば、

$$|E_n| \lesssim O \left[\frac{d^{\delta-\alpha+1} \left(\frac{r_j}{d} \right)^{\operatorname{ind}(\alpha, \delta)} \ln \left(\frac{r_j}{d} \right)}{\sigma^{2n}} \right] \ll |E_{l+, l-}|$$

但し、 $d/p_j = 10^{-3} \sim 10^{-1}$ に対して、 $\sigma = 2.7 \sim 5.9$ 。 (8.18)

C_ε からの寄与 $z = -1 + \Delta z$, $|\Delta z| \ll 1$ とおく (8.3) 式より

$$f(z) \sim A \Delta z^{\frac{\delta-1}{2}} + O(\Delta z^{\frac{\delta+1}{2}}), \quad A \equiv \frac{1}{2} (\ln a)^{\frac{\delta+1}{2}} d^{\frac{\delta-\alpha+1}{2}} \quad (8.19)$$

また, (6.9) 式で $|\Delta z| \ll 1$, つまり $|2kf| \ll 1$ とおく

$$\Phi_n(z) \sim 2e^{-i\pi} \log(kf) \quad (8.20)$$

更に, $\Delta z = 1 - \cosh 2f \sim -2f^2$, $dz \sim -4f df$ だから

$$E_{C_\varepsilon} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \Phi_n(z) f(z) dz \sim O\left\{\varepsilon^{\frac{\delta+1}{2}} \log(k\varepsilon)\right\} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad (8.21)$$

従って, C_ε ($\varepsilon \rightarrow 0$) からの寄与は無い。

以上より $\delta = \text{偶数}$ の場合は,

$$E_n(f) \sim E_{l+, l-} \sim_{n \gg 1} O\left[\frac{d^{\delta-\alpha+1} \left\{\ln\left(\frac{r_j}{d}\right)\right\}^{\frac{\delta+1}{2}}}{n^{\delta+1}}\right] \sim O(n^{-\delta-1}) \quad (8.22)$$

実際図 5.1 のフラックスの計算で生じる $\frac{\partial u^*}{\partial x_s}$, $\frac{\partial \varphi^*}{\partial x_s}$ の積分では $\delta = 2$ であり, 数値実験データより, 相対誤差は軌径方向の積分点数 n_R に対して各々 $n_R^{-3.1}$, $n_R^{-3.0}$ に比例しており, 式 (8.22) と符合する。log-L₂ 変換がフラックスの計算に向かない所以である。

§ 9. log-L₁ 変換を用いた数値積分の誤差評価

(5.3) 式の log-L₁ 変換: $R(p) = \log(p+d)$ に対しては,

$$R(0) = \ln d, \quad R(p_j) = \ln(p_j + d) \quad (9.1)$$

$$p(R) = e^R - d \quad (9.2)$$

$$\frac{dp}{dR} = e^R \quad (9.3)$$

より, (7.3) 式の $f(z)$ は次式より与えられる。

$$f(z) = \frac{(w-1)^\delta w}{\{w-(1-i)\}^{\frac{\alpha}{2}} \{w-(1+i)\}^{\frac{\alpha}{2}}}$$

$$w \equiv e^{\frac{z+1}{2} \ln a'}, \quad b' \equiv \frac{\ln a'}{2} d^{\delta-\alpha+1}$$

$$a' \equiv 1 + \frac{f_j}{d} > 1, \quad (\ln a' > 0)$$

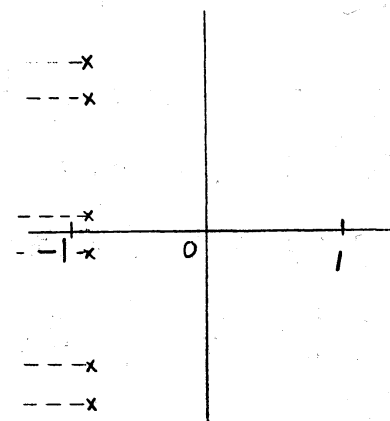
(9.4)

従、 $f(z)$ は図 9.1 に示すように、

$$z = -1 + \frac{\ln 2}{\ln a'} + i \frac{(4m \pm \frac{1}{2})\pi}{\ln a'},$$

$$m \in \mathbb{Z} \quad (9.5)$$

に特異点 (α が奇数のときは分岐点でもある) をもつ。



(i) 鞍点法による誤差評価

図 9.1 $f(z)$ の特異点

鞍点法^[5]の概要を説明しておく。一般に、

$$I = \int_C f(z) dz, \quad f(z) = \exp \{g(z)\} \quad (9.5)$$

に対し $f'(z) = g'(z) \exp \{g(z)\}$ だから $f(z)$ の鞍点は $g'(s) = 0 \Leftrightarrow f'(s) = 0$ で与えられる。 $z=s$ の近傍:

$|z-s| \ll 1$ では

$$f(z) = \exp \{g(z)\} \sim \exp \{g(s)\} \exp \left\{ \frac{1}{2} g''(s) (z-s)^2 \right\} \quad (9.6)$$

ここで $g''(s) = |g''(s)| e^{i\alpha}$, $z-s = r e^{i\theta}$ とおく

$dz = e^{i(-\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\pi}{2})} dr$, つまり $\theta = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\pi}{2}$ の方向で

$$f(z) \sim \exp \{g(s)\} \exp \left\{ -\frac{|g''(s)|}{2} r^2 \right\} \quad (9.7)$$

そこで、(9.5)式に於て積分路 C を、 $f(z)$ の特異点をまたがないうように、鞍点 $z=s$ を $\theta = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\pi}{2}$ の方向で通る様に変形する。

ここで $|g''(s)|$ が十分大きければ、(9.5) 式の積分において、

$z = s$ の近傍 $|z-s| < \delta$ からの寄与が支配的になるから、

$$\begin{aligned} I &= \int_C f(z) dz \\ &\sim e^{\frac{i(-\alpha \pm \pi)}{2}} \exp\{g(s)\} \int_{-\delta}^{\delta} \exp\left\{-\frac{|g''(s)|}{2} r^2\right\} dr \\ &\sim e^{\frac{i(-\alpha \pm \pi)}{2}} \exp\{g(s)\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{|g''(s)|}{2} r^2\right\} dr \\ &= e^{\frac{i(-\alpha \pm \pi)}{2}} \sqrt{\frac{2\pi}{|g''(s)|}} f(s) \end{aligned} \quad (9.8)$$

この鞍点法を $F(z) \equiv \Phi_n(z) f(z)$ とおいて (6.2), (9.4) 式に適用する。ここで $|z| \gg 1$ での $\Phi_n(z)$ の漸近式 (6.6) より、

$$\begin{aligned} g(z) &\equiv \log F(z) \\ &\underset{|z| \gg 1}{\sim} \ln A' - (2n+1) \log z + \delta \log(w-1) + \log w \\ &\quad - \frac{\alpha}{2} \{ \log(w-1+i) + \log(w-1-i) \} \end{aligned} \quad (9.9)$$

但し、 $A' \equiv c_n b'$ 。従って

$$\begin{aligned} g'(z) &\underset{|z| \gg 1}{\sim} -\frac{2n+1}{z} + \frac{\ln A'}{2} \left\{ \delta - \alpha + 1 + \frac{\delta}{w-1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1-i}{w-1+i} + \frac{1+i}{w-1-i} \right) \right\} \end{aligned} \quad (9.10)$$

$\text{Re}(z) \gg 1$ の場合

$$|w| = e^{\frac{\ln A'}{2} \{1 + \text{Re}(z)\}} \gg 1, \quad (\ln A' > 0) \quad \text{だから}$$

$|\text{Im}(z)| \sim 1$ とすると $|w| \gg |z| \gg 1$, 従って (9.10) 式より

$$\frac{dg}{dz} \underset{\text{Re}(z) \gg 1}{\sim} -\frac{2n+1}{z} + \frac{\ln A'}{2} (\delta - \alpha + 1) \quad (9.11)$$

従って、鞍点 $\left. \frac{dg}{dz} \right|_{z=s} = 0$ は

$$s = \frac{2(2n+1)}{(\delta - \alpha + 1) \ln A'} \quad (9.12)$$

で与えられる。ここで (9.12) 式が $\text{Re}(s) \gg 1$ を充すためには

$$\delta - \alpha + 1 > 0, \quad n \gg 1 \quad (9.13)$$

が必要で、表 7.1 では $\alpha = \delta = 1$ (u^* の積分) の場合だけが該当する。(9.11), (9.12) 式より

$$g''(s) = \frac{2n+1}{s^2} = \left\{ \frac{(\delta - \alpha + 1) \ln a'}{4(2n+1)} \right\}^2 \quad (9.14)$$

従、図 9.2 の様に積分路をとると、

$$E_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C F(z) dz$$

$$\sim \frac{1}{2\pi i} e^{\frac{\pi}{2}i} \sqrt{\frac{2\pi}{|g''(s)|}} F(s)$$

$\delta - \alpha + 1 > 0$
 $n \gg 1$

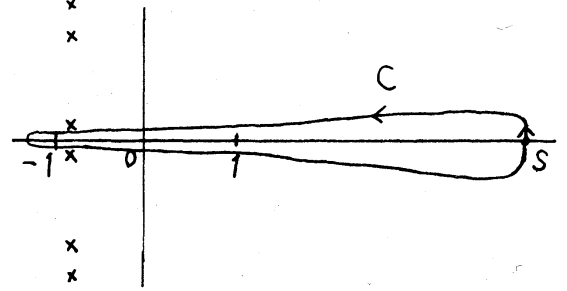


図 9.2 鞍点 s と積分路 C

$$\sim \frac{A'}{\sqrt{2\pi(2n+1)}} s^{-2n} \omega^{\delta - \alpha + 1}$$

$|w| \gg 1$ (9.15)

よ、

$\delta - \alpha + 1 > 0$ の場合

$$E_n(f) \sim \frac{e}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \left(\frac{d}{\sqrt{1 + \frac{p_i}{d}}} \right)^{\delta - \alpha + 1} \left\{ \frac{(\delta - \alpha + 1) e \ln(1 + \frac{p_i}{d})}{4(2n+1)} \right\}^{2n}$$

$$\sim O(n^{-2n}) \quad (9.16)$$

これは $\alpha = \delta = 1$ (u^* の積分) の場合、 $\log-L_1$ 変換が (8.7) 式の $\log-L_2$ 変換と同等の精度を発揮する事を意味し、図 5.2 の u^* に対する数値実験結果と符合する。

$\text{Re}(z) \ll -1$ の場合 $|w| = e^{\frac{\ln a'}{2} \{\text{Re}(z) + 1\}} \ll 1$ より

$$\frac{dg}{dz} \sim -\frac{2n+1}{z} + \frac{\ln a'}{2}, \quad \text{従、} \frac{dg}{dz} \Big|_{z=s} = 0 \Leftrightarrow s = \frac{2(2n+1)}{\ln a'} > 0$$

となるので、 $\text{Re}(s) \ll -1$ なる $E_n(z) f(z)$ の鞍点 s は存在しない。

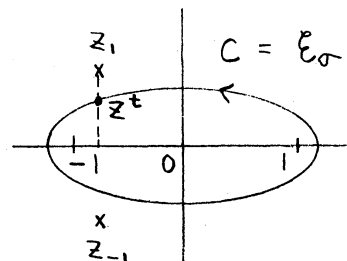
(ii) $\Phi_n(z) \underset{n \gg 1}{\sim} 2\pi (z + \sqrt{z^2 + 1})^{-2n-1}$ の利用

$|z| \gg 1$ の代りに、(6.8)式の $n \gg 1$ で
の漸近式を用い、(6.2)式の積分路 C とし
て図 9.3 の様な

$$z^t \equiv -1 + \frac{\ln z}{\ln a'} + i \frac{\pi t}{2 \ln a'},$$

$$(0 < t < 1)$$

(9.17) 図 9.3 積分路 C



を通り、 $z = \pm 1$ を焦点とする楕円 E_σ :

$$|z + \sqrt{z^2 + 1}| = \sigma, \quad (\sigma > 1) \quad (9.18)$$

をとる。 $f(z)$ の特異点 $z_{\pm 1}$ は E_σ の外側にあるから

$E_n(f) = E_{E_\sigma}$ は (8.15) 式により評価できる。

同式の $\max_{z \in E_\sigma} |f(z)|$ の評価を行う。(9.4) 式より

$|f(z)| = |f(z)|$ なので $\Im_m(z) \geq 0$ の領域のみを考えればよ

い。 $|f(z_1)| = +\infty$ だから、 $|1-t| \ll 1$ ならば

$$|f(z_t)| \sim \max_{z \in E_\sigma} |f(z)| \quad (9.19)$$

と考えよう。そこで、

$$\Delta z \equiv z_t - z_1 = -\frac{(1-t)\pi}{\ln a'} i \quad (9.20)$$

とおくと、 $|\Delta z| \ll 1$ に対して

$$w(z_t) \sim (1+i) \left\{ 1 + \frac{\ln a'}{2} \Delta z + O(\Delta z^2) \right\} \quad (9.21)$$

従って

$$\max_{z \in E_\sigma} |f(z)| \sim 2^{\frac{\alpha-2}{4}} \pi^{-\frac{\alpha}{2}} d^{\delta-\alpha+1} \left\{ \ln \left(1 + \frac{p_i}{d} \right) \right\} (1-t)^{-\frac{\alpha}{2}}$$

を得る。

(9.22)

σ は (9.17) 式より, $x = \frac{\ln 2}{\ln a'} - 1$, $y = \frac{\pi t}{\ln a'}$ とおいて (8.17) 式より求まる。つまり,

$$\sigma = \frac{C}{2} p + \sqrt{\frac{C^2}{4} p^2 - p \ln 2 + 1} + \sqrt{\frac{C^2}{2} p^2 - p \ln 2 + \sqrt{\frac{C^2}{4} p^2 - p \ln 2 + 1}} \quad (9.23)$$

但し,

$$p = \frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{D})}, \quad C = \sqrt{(\ln 2)^2 + \left(\frac{\pi t}{2}\right)^2}, \quad 0 < t < 1, \quad D \equiv \frac{d}{p_j} \quad (9.24)$$

で、 $\sigma(D)$ は図 9.4 に示すような D の単調増加関数である。

ところで (9.22) 式で、今関心のある $\alpha = 1, 3, 5$ に対して

$$(1-t)^{-\frac{\alpha}{2}} < 10 \quad (9.25)$$

となるのは $t \approx 0.6$ の場合である。

そこで、 $t = 0.6$ とおくと、擬類似特異

積分として興味のある

$$D \equiv \frac{d}{p_j} = 10^{-3} \sim 10^{-1} \ll 1 \quad \text{に対して}$$

$$\sigma(D) = 1.31 \sim 1.63, \quad [\sigma(10^{-2}) = 1.40] \quad \text{を得る。}$$

以上より、 $\log-L$ 変換と GL 則を用いて (7.1) 式の数値積分を行なうための、一般の $\alpha, \delta \in \mathbb{N}$ の場合の誤差評価として、

$$E_n(f) \underset{n \gg 1}{\sim} \frac{d^{\delta-\alpha+1} \ln(1 + \frac{p_j}{d})}{\sigma^{2n}} \sim O(\sigma^{-2n})$$

$$\text{但し、} D \equiv \frac{d}{p_j} = 10^{-3} \sim 10^{-1} \quad \text{に対して} \quad \sigma: 1.31 \sim 1.63 \quad (9.26)$$

を得る。

実際、図 5.2 の $\frac{\partial u^*}{\partial x_5}, \frac{\partial q^*}{\partial x_5}$ の積分の数値実験データから、

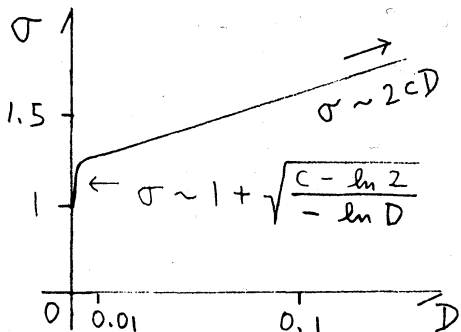


図 9.4 $\sigma(D)$ のグラフ

相対誤差は動径方向の積分点数 n_R に対して 各々 おおよそ

$$1.6^{-2n_R}, \quad 1.7^{-2n_R} \text{ に比例しており, (9.26)式で } D=10^{-2}$$

のとき、 $\sigma \sim 1.4$ だから、理論誤差評価に近い結果を示している。

§ 10. まとめ

以上の議論より、3次元ポテンシャル問題の境界要素法による解析で生じる（擬似特異）積分を PART法で計算する際の動径方向の積分の基本型： $\int_0^{p_j} \frac{p^\delta}{r^\alpha} dp$ を、動径方向の変数変換（ $\log-L_2$, $\log-L_1$ ）と、Gauss-Legendre公式により計算したときの理論誤差評価として、（ n を動径方向の積分点数として）

$\log-L_2$ 変換 : $R(p) = \log \sqrt{p^2 + d^2}$ に対しては、

$$\delta = \text{奇数} \Rightarrow E_n(f) \underset{n \gg 1}{\sim} O \left[\left\{ \frac{\ln(\sqrt{p_j^2 + d^2}/d)}{n} \right\}^{2n} \right] \sim O(n^{-2n})$$

$$\delta = \text{偶数} \Rightarrow E_n(f) \underset{n \gg 1}{\sim} O \left[\frac{d^{\delta-\alpha+1} \left\{ \ln(\sqrt{p_j^2 + d^2}/d) \right\}^{\frac{\delta+1}{2}}}{n^{\delta+1}} \right] \sim O(n^{-\delta-1})$$

$\log-L_1$ 変換 : $R(p) = \log(p+d)$ に対しては、

$$\delta - \alpha + 1 > 0 \Rightarrow E_n(f) \underset{n \gg 1}{\sim} O \left[\left(\frac{d}{\sqrt{1 + \frac{p_j}{d}}} \right)^{\delta-\alpha+1} \left\{ \frac{\ln(1 + \frac{p_j}{d})}{n} \right\}^{2n} \right] \sim O(n^{-2n})$$

$$\delta, \alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow E_n(f) \underset{n \gg 1}{\sim} O \left\{ \frac{d^{\delta-\alpha+1} \ln(1 + \frac{p_j}{d})}{\sigma^{2n}} \right\} \sim O(\sigma^{-2n})$$

〔但し、 $d/p_j = 10^{-3} \sim 10^{-1}$ に対して $\sigma = 1.31 \sim 1.63$ 〕

を得た。これらの評価式は平面一定要素での数値実験結果と符合している。また、一般の曲面高次要素に対しても、なぜ

$\log-L_2$ 変換がフランクスの計算 ($\delta=2$) で精度が悪いか、そしてなぜ $\log-L_1$ 変換は、ポテンシャルだけでなくフランクスの計算で生じる積分に対しても高精度でロバストかと言った疑問に対して定量的な説明を与えてくれる。

今後は本論文で構築した理論的枠組みに則って、より適切な変数変換に基づき、より高精度な数値積分法を開発したい。

謝辞 本研究に関して有益な示唆を頂いた一橋大学の杉原正顕先生と、絶えず激励してくださった筑波大学の岸本一男先生に深謝いたします。

参考文献

- [1] Hayami, K. and Brebbia, C. A., Boundary Elements X, 1, pp. 237-264, 1988.
- [2] 速水 謙、京都大学数理解析研究所講究録 676, pp. 284-306, 1988.
- [3] Hayami, K., Boundary Elements XII, 1, pp. 33-51, Springer-Verlag, 1990.
- [4] Stroud, A. H. and Secrest, D., "Gaussian Quadrature Formulas", Prentice-Hall, 1966.
- [5] 森 正武, "数値解析と複素関数論", 筑摩書房, 1975.
- [6] McNamee, J., Math. Comp., 18, pp. 368-381, 1964.
- [7] Barret, W., Comput. J., 3, pp. 272-277, 1960.
- [8] Donaldson, J. D. and Elliot, D., SIAM J. Num. Anal., 9, No. 4, pp. 573-602, 1972.
- [9] 森口 繁一, 宇田川 金久, 一松 信, "数学公式集 III", 岩波全書, 1980.
- [10] Davis, P. J. and Rabinowitz, P., "Methods of Numerical Integration", Academic Press, 1984.