

$\mathcal{O}_\beta$ の端数 β と $L(F_r)$ の端数 r

九大数理 綿谷 安男
(WATATANI, YASUO)

九大数理 植田 好道
(UEDA YOSHIMICHI)

① はじめに

このノートでは 片山-松本-綿谷[5]
によって導入された Interpolated Cuntz
algebra $\mathcal{O}_\beta$ ($\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 1$) の端数 β と
Dykema [3] と Rădulescu [7] によって導

された Interpolated free group factor

$L(F_r)$ ($r \in \mathbb{R}$, $r > 1$) の端数 r の間に
何か密接な関係がないかを考えた。

もちろん $\beta = n$ が正の整数 (≥ 2) の時は

$r = n$ と同じ値が次のように関係する

これは Voiculescu による semi-circular law

を通じてよくわかっていて ([8] を参照)。

Cuntz algebra $\mathcal{O}_n$ の生成元を $s_1, \dots, s_n$
とする。 $\mathcal{O}_n$ に対応する Toeplitz algebra

$\mathcal{I}_n$ の生成元を $T_1, \dots, T_n$ とする。そして T_k は

Fock space $F(\mathbb{C}^n)$ に creation operator

という作用 (7113. 771)

$H = \mathbb{C}^n$ の basis と $\{e_1, \dots, e_n\}$

$$F(H) = \mathbb{C}\Omega \oplus \sum_{m=1}^{\infty} \bigoplus H \otimes \dots \otimes H$$

$$\begin{cases} T_k(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_m}) = e_k \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_m} \\ T_k \Omega = e_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_k^*(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_m}) = \delta_{k, i_1} e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_m} \\ T_k^* \Omega = 0 \end{cases}$$

この A_n^* $\{Re T_k = \frac{T_k + T_k^*}{2} \mid k=1, \dots, n\}$ の生成元

von Neumann algebra $\{Re T_k \mid k=1, \dots, n\}'' \subseteq$

$F(H)$ 上に $\neq$ すると,

$$\{Re T_k \mid k=1, \dots, n\}'' \cong L(F_n)$$

と n の生成元 τ も、自由群 F_n かつ

生成される free group factor $L(F_n)$ と同型になる。

そこで問題になるのは β が整数でない実数の時はどうなっているかである。これを完全に説明することはできていないが、特別な場合には関係がつか。例えば $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (黄金比) の時には $\nu = \frac{3}{2}$ が対応し、 $O_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ と $L(F_{\frac{3}{2}})$ が関係する。

□ Interpolated free group factor

Dykema [3] と Radulescu [7] は実数 $t > 1$ に対して II₁-factors の族 $L(F_t)$

で以下の様な関係をみたす Interpolated free group factors $L(F_r)$ を構成した ($r \in \mathbb{N}$ は通常のものになる)。

$$\bullet \quad L(F_r) * L(F_s) \cong L(F_{r+s})$$

$$(1 \leq r, s < \infty)$$

$$\bullet \quad \text{II}_1\text{-factor } M = L(F_s) \text{ の projection } p \in M$$

“ $\text{Tr}(p) = r$ となるもの” M をとると:

$$pL(F_s)p \cong L(F_t)$$

$$t = 1 + \frac{s-1}{r^2} \quad 1 < s < \infty$$

$$\text{もし } \mathbb{R}^2 \text{ に } p \in L(F_s) \otimes M_n \text{ の projection}$$

“ $\text{Tr}(p) = r \in \mathbb{R}$ かつ $r \in \mathbb{N}$ の同じ式が成立

② Interpolated Cuntz algebra O_β

Cuntz algebra O_n (1) と Cuntz-Krieger algebra O_A (2) を拡張して
松本(6) は一般の subshift Λ に対して
 C^* -algebra O_Λ を導入した。

$\Sigma = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ と symbol の集合

$\sigma: \Sigma^{\mathbb{Z}} \rightarrow \Sigma^{\mathbb{Z}}$ と shift, $n \in \mathbb{Z}$,

$$(\sigma x)_n = x_{n+1} \quad \text{for } x = (x_n)_n \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$$

$\Lambda \subset \Sigma^{\mathbb{Z}}$: closed subset $\sigma(\Lambda) = \Lambda$

この時 $(\Lambda, \sigma|_\Lambda)$ を subshift といふ

$\sigma = \sigma|_\Lambda$ とかく。以下 $\mathbb{Z}$ の代わりに $\mathbb{N}$ に
したとき shift も同時に なる。

$$\Lambda^k = \{ \mu = (\mu_1, \dots, \mu_k) \in \Sigma^k \mid \exists x \in \Lambda \quad \mu_1 = x_1, \dots, \mu_k = x_k \}$$

と書いたのは k と $|\mu| = k$ の word の全体とす

$$\Lambda_* = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Lambda^k \quad : \text{有限 word 全体}$$

$H = \mathbb{C}^m$ の basis とし $\{e_0, e_1, \dots, e_{m-1}\}$ とす.

$$F_{\Lambda}^0 = \mathbb{C}\Omega \quad (\Omega \text{ は Vacuum vector})$$

$$F_{\Lambda}^k = \{ e_{\mu} \in H^{\otimes k} \mid \mu = (\mu_1, \dots, \mu_k) \in \Lambda^k \} \subset H^{\otimes k}$$

ここで $e_{\mu} = e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_k}$ の略記

$$F_{\Lambda} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} F_{\Lambda}^k$$

$k=0, 1, \dots, m-1$ に T_k とし Toeplitz operator

$\in B(F_{\Lambda})$ と $\{e_k$ の creation $\}$ を定義する:

$$\bullet \quad T_k e_{\nu} = \begin{cases} e_k \otimes e_{\nu} & (k \leq \nu \in \Lambda_*) \\ 0 & (k > \nu \in \Lambda_*) \end{cases}$$

$$\bullet \quad T_k \Omega = e_k$$

この時

$$\bullet T_k^* e_v = \begin{cases} e_{k-1, \dots, v_n} & (\text{if } k=v_1) \\ 0 & (\text{if } k \neq v_1) \end{cases}$$

$$\bullet T_k^* \Omega = 0$$

$$\pi: B(F_n) \longrightarrow B(F_n) / K(F_n) \text{ is quotient map}$$

$$S_k \equiv \pi(T_k)$$

Def 上の状況で subshift Λ に対して

Toeplitz algebra J_n と松本 algebra Q_n をそれぞれ T_k 達と S_k 達の生成する C^* -alg.

とする: $S_\mu = S_{\mu_1} \dots S_{\mu_n}$ と略記する

$$J_n = C^*\{T_k \mid k=0, 1, \dots, n-1\} \subset B(F_n)$$

$$Q_n = C^*\{S_k \mid k=0, 1, \dots, n-1\} \subset B(F_n) / K(F_n)$$

この時 交換関係は $a_\mu = S_\mu^* S_\mu$: projection となる

$$\sum_{k=0}^{n-1} S_k S_k^* = 1 \quad \text{と} \quad a_\mu S_\nu = S_\nu a_\mu \quad (\mu, \nu \in \mathbb{N}^*)$$

Q_β を定義するために β に対し β -shift
 とよばれる特別な shift を与える。

Def (β -展開)

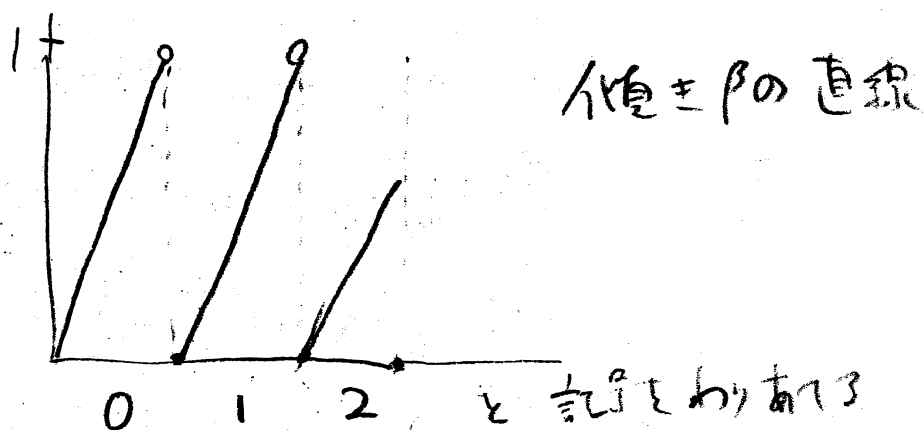
$\beta \in \mathbb{R}$ へ $\beta > 1$ なるものを一つ固定する。

$\exists m \in \mathbb{N} \quad m-1 < \beta \leq m$ の下

$\Sigma = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ とおく。

$f_\beta : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$: 圧縮力学系を

$$\begin{aligned} f_\beta(x) &= \beta x - [\beta x] \quad (x \in [0, 1)) \\ &= \text{「}\beta x \text{の小数部分」} \end{aligned}$$



この f_β を 記号力学系で「表現」しよう

$\lambda \in [0, 1)$ の β -展開 $(d_n(n))_{n \in \mathbb{N}}$ を

次で定める:

$$\begin{cases} d_1(n) = [\beta\lambda] \\ d_n(n) = [\beta f_{\beta^{-n}}(n)] \end{cases}$$

この時

$$\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(n)}{\beta^n} \quad \text{と展開できる}$$

さて $\Sigma^{\mathbb{N}}$ に積位相を入れ, さらに辞書式順序 $\leq$ を入れておく。すると区間 $[0, 1)$ の順序と互に両立する。

$$\mathcal{I}_{\beta} = \lim_{\lambda \rightarrow 1} ((d_n(n))_n) = \sup_{\lambda \in [0, 1)} (d_n(n))_n \in \Sigma^{\mathbb{N}}$$

$$\text{よって } \mathcal{I}_{\beta} = (\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3, \dots) \text{ とおく}$$

$$\textcircled{\text{例}} \quad \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{の時} \quad 1 = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} \quad \text{より}$$

$$(d_n(n))_n = (1, 1, 0, 0, 0, \dots)$$

$$\mathcal{I}_{\beta} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$$

Def (β -shift)

$$\Lambda_\beta = \left\{ \lambda (= (\lambda_n)_n) \in \Sigma^{\mathbb{N}} \mid \forall n=0,1,2,\dots \left\{ \begin{array}{l} \sigma^n(\lambda) \leq \beta \end{array} \right. \right\}$$

$$\sigma(\lambda)_n = \lambda_{n+1}$$

(Λ_β, σ) を β -shift といい。

Def (Interpolated Cuntz algebras $\mathcal{O}_\beta$)

$\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 1$ に対して, β -shift

(Λ_β, σ) に関する C^* -algebra $\mathcal{O}_{\Lambda_\beta}$ を

$\mathcal{O}_\beta$ とおき, Interpolated Cuntz algebras といい。

(例) $\beta = n \in \mathbb{N}$ ときは元の Cuntz alg $\mathcal{O}_n$ に同型。

定理 1 (片山-松本-穂谷 [5])

$\mathcal{O}_\beta$ は simple γ -purely infinite になる。

③ $\mathcal{Q}_\beta$ と $L(F_r)$ の関係

一般の $\beta > 1$ についてはまだ不明だが、
ある特別なクラスの β については関係
があることがわかった。

定理 2 (植田-綿谷[準備中])

$\beta > 1$ が $\beta^k = n\beta^{k-1} + n\beta^{k-2} + \dots + n\beta + n$
の解になっているとす。対応する $\mathcal{Q}_\beta$ と
Toeplitz $J_\beta = C(T_i) \ (i=0,1,\dots,n)$ を考える。

$\Rightarrow \exists r > 1$

$$\{ \operatorname{Re} T_i \ (i=0,1,\dots,n) \}'' \cong L(F_r)$$

ここで実は

$$r = n + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \frac{\left(\sin \frac{i\pi}{n+1} \right)^2 \left(\sin \frac{j\pi}{n+1} \right)^2}{\sqrt{\sum_{m=1}^n \left(\sin \frac{m\pi}{n+1} \right)^2} \sqrt{\sum_{m=1}^n \left(\sin \frac{m\pi}{n+1} \right)^2}}$$

(1/5+1)
 Proof. free product の定義より,

$$\{Re T_i | i=0,1,\dots,n\}^n \subseteq L(F_n) * \mathbb{C}^{k+1}$$

に包摂していることがわかる。ただし

Ω の vector state は $\mathbb{C}^{k+1}$ 上で trace
 τ , その minimal projection τ の重みを
 テイラー図形 A_{k+1} に対応する Perron
 Frobenius eigen-value と eigen-vector を
 使って求める。

$$A_{k+1} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ$$

後は Dykema の定理 (4) を適用
 するのみ。 ■

(例) $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (黄金比) $\Rightarrow r = \frac{3}{2}$

References

- [1] J. Cuntz, Simple C^* -algebras generated by isometries, Comm. Math. Phys. 57 (1977), 173-185.
- [2] J. Cuntz and W. Krieger, A class of C^* -algebras and topological Markov chains, Inventiones Math. 56 (1980), 251-268.
- [3] K.-J. Dykema, Interpolated free group factors, Pacific J. Math. 163 (1994), 123-135.
- [4] K. J. Dykema, Free products of hyperfinite von Neumann algebras and free dimension, Duke Math. J. 69 (1993), 97-119.
- [5] Y. Katayama, K. Matsumoto and Y. Watatani, Simple C^* -algebras arising from β -expansion of

real numbers, to appear in Ergod. Th. & Dynamical Sys.

(6) K. Matsumoto, On C^* -algebras associated with subshifts, to appear in Internat. J. Math.

(7) F. Rădulescu, Random matrices, amalgamated free products and subfactors in free group factors of noninteger index, Inv. Math 115 (1994), 347-389.

(8) D. Voiculescu, Symmetries of some reduced free product C^* -algebras, Operator Algebras and Their Connections with Topology and Ergodic Theory, Lecture Notes in Mathematics, Vol 1132, Springer-Verlag, (1985) 556-588.