

Locally Closedness of Unbounded Derivations in C^* -algebras

山形大 理 太田昇一

近年、 C^* 環上の非有界微分分子 (unbounded derivation) が、多くの
人々によって研究されて来ました ([3] の文献を参照)。物理
数学においては、 C^* 環上の 1 助変数自己同型群の無限小作用
素として、非有界微分分子は現われて来ます。ここでは、こ
の関連とは離れて、非有界微分分子そのものの性質を調べるこ
とにします。

$\mathcal{A}$ をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の単位元 $1 (= 1_{\mathcal{H}})$ をもつ C^* 環としま
す。 $\mathcal{A}$ における線型写像 δ が $*$ -derivation であるとは、次の
各性質を満たすことである；

(1) その定義域 $\mathcal{D}(\delta)$ は、 $\mathcal{A}$ における稠密な $*$ -部分環，

(2) 各 $a, b \in \mathcal{D}(\delta)$ に対して、

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b),$$

$$\delta(a^*) = \delta(a)^*.$$

この稿では、以下証明は全て省きますが、 $*$ -derivation と調べ

る際に、有効な手段の一つである表現 (Lorentz 表現の特別なもの) について、最初に述べます。

定義域 $\mathcal{D}(\delta)$ から、 $\mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ (or $\mathcal{O} \otimes M(2, \mathbb{C})$) への写像 π_δ を次のように定義します;

$$a \in \mathcal{D}(\delta) \longrightarrow \pi_\delta(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \delta(a) & a \end{pmatrix}$$

更に、 $\mathcal{H}$ の $\mathcal{H}$ 上の hermitian unitary 作用素 J を、

$$J(\xi \otimes \eta) = \eta \otimes \xi \quad (\text{ここに, } \xi, \eta \in \mathcal{H}) \quad \text{で定義します。}$$

そして、 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ に対して $A^J \equiv JA^*J$ と定義すると、

Lemma 1. $\pi_\delta(\mathcal{D}(\delta)) \equiv \{ \pi_\delta(a) : a \in \mathcal{D}(\delta) \}$ は $*$ 環 (ここでの対合は $\pi_\delta(a) \rightarrow \pi_\delta(a)^J$ で与えられる) になる。特に δ が closed な J は $\pi_\delta(\mathcal{D}(\delta))$ は semi-simple involutive Banach algebra になる。しかもこの involution は hermitian でもある。

$a = a^* \in \mathcal{O}$ に対して、 a と 1 で生成される部分 C^* 環を $C(a)$ で示すことにする。各 $a = a^* \in \mathcal{D}(\delta)$ に対して、 δ の $C(a) \cap \mathcal{D}(\delta)$ への制限 $\delta|_{C(a) \cap \mathcal{D}(\delta)}$ が closed (i.e., 各 $\{a_n\} \subset C(a) \cap \mathcal{D}(\delta)$ かつ $\lim a_n = b$, $\lim \delta(a_n) = c$ ならば, $b \in C(a) \cap \mathcal{D}(\delta)$ で $\delta(b) = c$) ならば、 δ を locally closed と呼ぶことにします。

[注意] locally closed $*$ -derivation は、必ずしも closed では

ない。実際、UHF-環の normal $*$ -derivation は、locally closed だが、closed ではない。

Theorem 2. δ を locally closed $*$ -derivation とする。そのとき、次の 1°, 2° が成り立つ。

1°, $\mathcal{A}$ の単位元 1 は、自動的に $\mathcal{D}(\delta)$ に含まれる。

2°, $a = a^* \in \mathcal{D}(\delta)$ と、 $Sp(a; \mathcal{A})$ を含む Jordan 閉曲線 $\mathcal{D}$ の内部で、analytic な複素数値関数 $f(x)$ に対して、

$$f(a) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{D}} f(\lambda) (\lambda - a)^{-1} d\lambda \quad \text{は } \mathcal{D}(\delta) \text{ に含まれ、}$$

$\pi_{\delta}(f(a)) = f(\pi_{\delta}(a))$ が成り立つ。

Corollary 3. δ が closed ならば、各 $a = a^* \in \mathcal{D}(\delta)$ に対して、

$$Sp(a; \mathcal{A}) = Sp(\pi_{\delta}(a); \pi_{\delta}(\mathcal{D}(\delta))).$$

Theorem 4. δ を $*$ -derivation とすると、次の条件は互いに同値である。

(1) 各 $a = a^* \in \mathcal{D}(\delta)$ に対して、 $C(a) \subset \mathcal{D}(\delta)$ 。

(2) δ が locally closed で、 $\mathcal{D}(\delta)$ の $a \geq 0$ の元が $\mathcal{D}(\delta)$ の中に平方根をもつ。

[注意] 上の Theorem 4 における (2) において locally closed を、closed で置き換えると、 δ は有界 i.e., $\mathcal{D}(\delta) = \mathcal{A}$ になる ([1])。

前に述べたように *locally closed* かすは一般に *closed* は出てこないが、自然な問題として、“*locally closed* なすは *closable* か?” を考えよう事にある。

Theorem 5. $\mathcal{O}$ がコンパクト作用素全体かすなる C^* 環を金んていけるとある。そのとき $\mathcal{O}$ 上の *locally closed* $*$ -derivation は *closable* である。

次に、 δ が有界 ($\mathcal{D}(\delta) = \mathcal{O}$) なすは、よく知られているように、ある $h = h^* \in \overline{\mathcal{O}}$ があって、 $\delta(a) = i[h, a]$ ($a \in \mathcal{O}$) と書ける。以下では、 δ が一般の *unbounded derivation* のとき、同じような事が起こるかという問題を考えます； i.e.,

“ δ が *closed* $*$ -derivation のとき、ある Hermitian 作用素 (一般に *unbounded*) が存在して、 $\mathcal{D}(\delta)\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(H)$ で

$$\delta(a) = i[H, a] \text{ on } \mathcal{D}(H) \quad (a \in \mathcal{D}(\delta)) \quad ?$$

この問題に対しては、次のような定理が得られる。

Theorem 6. 次の条件は同値。

(1) $\pi_\delta(\mathcal{O}(\delta))$ が、ある *maximal* J -positive invariant *closed subspace* $\mathcal{M}$ を不変部分空間として持つ。

(2) ある稠密な定義域をもつ *strict maximal accretive* 作用素 T が $\mathcal{O}$ 上に存在して、 $\mathcal{M} = G(T)$, $\mathcal{D}(\delta)\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T)$ で、

$$\delta(a) = [T, a] \text{ on } \mathcal{D}(T) \quad (a \in \mathcal{D}(\delta)). \quad (\text{詳しくは [1] 参照}).$$

文献

- [1] S. Ôta ; Certain operator algebras induced by $*$ -derivations in C^* -algebras on an indefinite inner product space , to appear in J. Functional Anal.
- [2] " ; Locally Closedness of Unbounded Derivations in C^* -algebras , to appear in Proc. Amer. Math. Soc.
- [3] S. Sakai ; Recent Developments in the Theory of unbounded Derivations in C^* -algebras , U.S.-Japan seminar on C^* -algebras and their application to theoretical Physics , 1977 , April 18-22 .
- [4] " ; The Theory of Unbounded Derivations in C^* -algebras (Lecture Note) 1977 .