

functional を用いた分布の特徴づけ

統計数理研究所 柳本武美

分布を特徴づけるのには、関数方程式を解くことに帰着することが多い。これをまともに解くのは大変なので、分布の上に定義された functional を用いるとうまく行くことが多い。特性函数とかエントロピーは代表的なものにある。単に関数方程式が解けるだけでなく、与えられた性質がその functional にどう反映するか自体にも興味深いことが多い。

近年種々の functional の性質を調べて、分布を特徴づける論文が多くみられる。本稿では田中ら [1], [4] と清水 [3] の結果を整理し、分布の特徴づけへの応用を試みる。

1. $e[f]$ について.

確率分布 f をもつ確率変数 X に対する functional として田中は次のような $e[f]$ を導入した [4]. f が分散 σ^2 をもつと仮定して、平均を 0 として,

$$e[f] (= e[X]) = \inf E[|X - Y|^2]$$

ここで $\inf$ は (X, Y) が 2次元の確率変数で各々の周辺分布が f 及び $N(0, \sigma^2)$ であるものについてとる。 $F(x)$ と $\Phi(y)$ を各々の分布関数とする。さて [4] では Weyl automorphism を用いて, $\inf$ を attain する (X, Y) が $X = F^{-1}(\Phi(Y))$ a.e. であることを示している。

ところが次のようにしても証明される。

$$\begin{aligned} e[X] &= \inf \{ 2\sigma^2 - 2\text{Cov}(X, Y) \} \\ &= \inf \{ 2\sigma^2 - 2 \int \{ F(x, y) - F(x)\Phi(y) \} dx dy \} \end{aligned}$$

に代り $F(x, y)$ は (X, Y) の分布関数である。ところが $F(x, y) \leq F_0(x, y) = \text{Min} \{ F(x), \Phi(y) \}$ は常に成り立つ。 $\inf$ を attain する $F(x, y)$ は $F(x, y) \equiv F_0(x, y)$ のときである。これから $X = F^{-1}(\Phi(Y))$ a.e. が得られる。

2. $e[f]$ の多次元への拡張

多次元への拡張は [1] でもなされている。別に多次元の正規分布を特徴付ける為には次の functional を導入してもうまくいく。

X を n 次元確率変数とし, 共分散行列 Σ が positive definite とする。一般性を失うことなく平均ベクトルは 0 とする。確率変数 X の functional $e(X)$ を

$$e(X) = \sup_{\lambda \in \Lambda} \{ e[\lambda X] \}, \text{ ここで } \Lambda = \{ \lambda \mid \lambda \Sigma^t \lambda = 1 \}$$

を定義する。

次の性質が得られる。性質(iv)は良く知られた結果であるが、我々のアプローチでは見通し良く平易に証明される。

(i) $e(X) = 0$ ならば X は正規である。

(ii) 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して λX が正規だから。

(iii) $\sup$ を attain する $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在する。即ち $e(X) = e[\lambda_0 X]$

(iv) X_1, X_2 が独立で共分散行列 Σ_1, Σ_2 をもつとする。適当な $\lambda_0 \in \Lambda$ に対して、

$$\begin{aligned} e(X_1 + X_2) &= e[\lambda_0 (X_1 + X_2)] \\ &\leq \lambda_0 \Sigma_1^t \lambda_0 e(X_1) + \lambda_0 \Sigma_2^t \lambda_0 e(X_2) \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし等号が成立する為の必要十分条件は X_1, X_2 が共に正規であることである。

(v) X_1, X_2 は独立とする。 T_1, T_2, T_3, T_4 は正則で且 $T =$

$\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}$ が正則となるような $n \times n$ 行列とする。 Y_1, Y_2 を

$$Y_1 = T_1 X_1 + T_2 X_2$$

$$Y_2 = T_3 X_1 + T_4 X_2$$

としたとき、 (Y_1, Y_2) が独立であれば、 X_1, X_2 は正規分布をもつ。

$\therefore$ $e(X_1) \geq e(X_2)$ として一般性を失わない。 T は正則だから S_1, S_2, S_3, S_4 が存在して $X_1 = S_1 Y_1 + S_2 Y_2$, $X_2 = S_3 Y_1 + S_4 Y_2$ と書ける。(iii) を用いて $e(X_1) \leq a e(X_1) + c_2 e(X_2)$ を示す。

(iv)' $n=1$ とすると、結局 X_1 と X_2 が非退化な分布をもち、 $Y_1 = \sin \theta X_1 + \cos \theta X_2$, $Y_2 = \cos \theta X_1 - \sin \theta X_2$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) としたとき、 (Y_1, Y_2) が独立であれば X_1 と X_2 が正規分布をもつことを示している。

3. 指数分布を特徴づける functional

分散が一定のとき、エントロピーを最大にするのは正規分布である。 $(0, \infty)$ 上の分布に制限した下で、平均を一定にしたとき、エントロピーを最大にするのは指数分布である[2]。清水[3]は Fisher の情報量を $I(\lambda) = \int_0^\infty \{f'(x)/f(x)\}^2 dx$

を用いて正規分布の特徴づけとさらに *stability* に関する結果を与えている。

我々は $(0, \infty)$ 上の分布に限って、指数分布の特徴づけと *stability* を検討しよう。

(i) $I(\lambda)$ を用いた場合。 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(0)$ 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ とする。以下 $f(0)$ は一定とする。 $I(\lambda)$ から誘導した functional J と

$$J = \int \frac{(f'(x) + f(0)f(x))^2}{f(x)} dx$$

とすると、 $|f(x) - f(0)e^{-f(0)x}| \leq \sqrt{J}$ が得られる。

特に $I(\lambda)$ を最大にする $f(x)$ は上式より指数分布の密度関数である。

(ii) $I(\lambda)$ を修正した場合。 $f(0) = 0$ の制限にはやゝ違和感がある。そこで $I(\lambda)$ を指数分布に適合するように修正して、 $I'(\lambda)$ を与える。

$$I'(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{(1 - F(x))^2}{f(x)} dx.$$

平均 μ を一定にした条件下で $I'(\lambda)$ は最小値 μ^2 とする。これを attain する分布は指数分布である。次に J と同様

に J' を

$$J' = \int_0^{\infty} \frac{(1-F(x) - \mu f(x))^2}{f(x)} dx$$

とおくと, $J' = I'(\wedge) - \mu^2$ である. このとき

$$|1 - F(x) - e^{-(1/\mu)x}| \leq 2\sqrt{J'}$$

が成り立つ. 証明は[3]の方法になぞらえられよい。

参考文献

[1] Murata, H. and Tanaka, H (1973) An inequality for certain functional of multidimensional probability distribution, to be issued.

[2] Reza, F. M. (1961) An introduction to information theory, McGraw-Hill, New York.

[3] Shimizu, R (1974) On Fisher's amount of information for location family, An International Conference on Characterizations of Statistical Distribution and Their Applications to Theoretical Statistics and Applied Field, Calgary Canada.

[3] Tanaka, H (1972) An inequality for a functional of probability measures and its applications to Kac's one-dimensional model of a Maxwellian gas, to

appear in 3. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete.