

交叉帽子の微分幾何学

東京工業大学・情報理工学研究科 梅原 雅顕 (Masaaki Umehara)

Department of Mathematical and Computing Sciences

Tokyo Institute of Technology

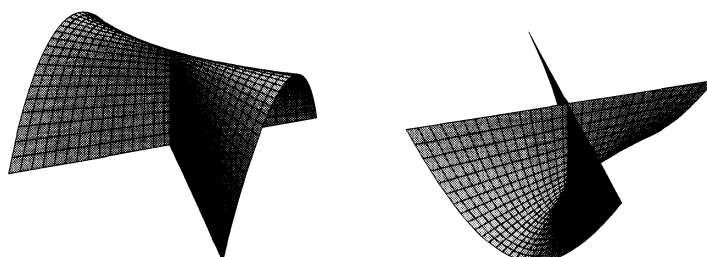


図 1. 標準的交叉帽子

1. 交叉帽子とは？

ここでは筆者と、埼玉大学の長谷川大氏，東工大数学専攻の院生の本田淳史氏，直川耕祐氏そして山田光太郎氏（東工大・理工）との交叉帽子特異点に関する共同研究 [3] を中心に関連する内容を紹介する．2次元多様体から3次元多様体へ C^∞ -写像の特異点とは，その写像が「はめ込み」でなくなる点をいう．

$$(1.1) \quad f_0(u, v) = (u, uv, v^2),$$

によって定まる曲面は原点において特異点をもち，これを標準的な交叉帽子とよぶ．与えられた C^∞ -写像の特異点は，その特異点の近傍に写像を制限したとき，定義域と値域の適当な座標変換で，標準的な交叉帽子の定める写像芽に一致させることができるときに交叉帽子とよばれる．

M^2 を2次元多様体とし，与えられた C^∞ -写像 $f: M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ が点 p において，交叉帽子となるための必要充分条件は，点 p のまわりの局所座標系 (u, v) が存在し，

$$(1.2) \quad f_v(p) = 0, \quad \det(f_u(p), f_{uv}(p), f_{vv}(p)) \neq 0$$

となることである．この判定条件は Whitney によって与えられた．交叉帽子は2次元多様体から $\mathbf{R}^3$ への写像にもっとも頻繁に現れる特異点として知られている．

有名な Whitney のはめ込み定理は

「任意の n 次元多様体 ($n \geq 2$) を $\mathbf{R}^{2n-1}$ に、はめ込むことができる」というものである. n 次元多様体 M^n から $\mathbf{R}^{2n-1}$ への C^∞ -写像の全体 $C^\infty(M^n, \mathbf{R}^{2n-1})$ に Whitney は位相を導入し、交叉帽子のみを特異点として許容する C^∞ -写像の全体は、この位相に関して開かつ稠密であることを示した. M^n がコンパクトな場合には、交叉帽子型の特異点が偶数個現れ、それらを対消滅させることで、 $\mathbf{R}^{2n-1}$ へのはめ込みの存在が示される.



図 2. Roman 曲面と Boy 曲面

特に $n = 2$ で、 M^2 が実射影平面 $P^2(\mathbf{R})$ の場合には、 C^∞ -写像として

$$F : \mathbf{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto (yz, zx, xy) \in \mathbf{R}^3$$

を考えて F を単位球面に制限すると、対心写像で不変なので、 $P^2(\mathbf{R})$ から $\mathbf{R}^3$ への交叉帽子のみを許容する C^∞ -写像が誘導される. この写像の像は Roman 曲面とよばれ (図 2 左), 上述の交叉帽子の判定条件により, 合計 6 個の交叉帽子をもつことがわかるが, 上述の Whitney による 2 個ずつの特異点の解消により (詳しくは文献 [5] をみよ), 実射影平面を $\mathbf{R}^3$ に「はめ込み」として実現できることがわかる.

図 2 右は, そのような曲面 (Boy 曲面) を, 向き付け不可能な極小曲面の空間反転として構成したもので, ドイツの Oberwolfach 研究所の庭に大きな模型として展示されている.

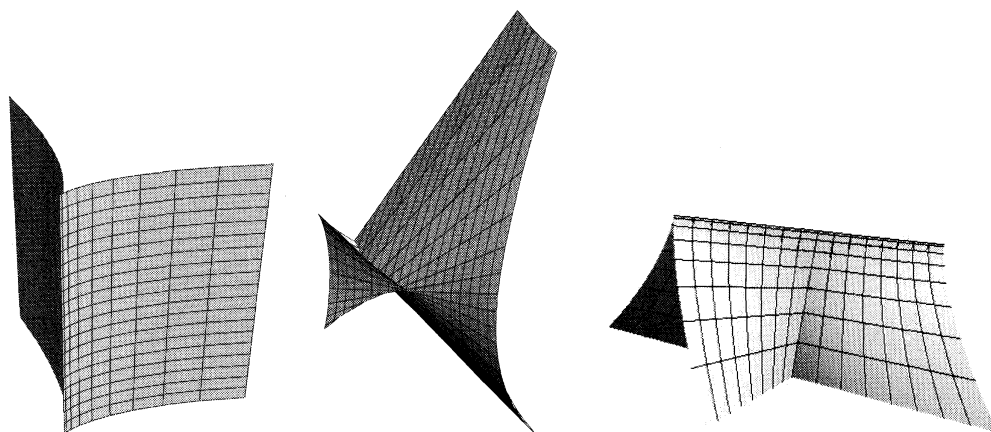


図 3. カスパ辺, ツバメの尾, カスパ状交叉帽子

2. カスパ辺等, 交叉帽子以外の特異点の場合

曲面から $\mathbf{R}^3$ への C^∞ -写像を考えると, 交叉帽子は最も頻繁に現れる特異点であるが, 微分幾何学的観点から見ると, ガウス曲率や平均曲率が有界ではない. したがってガウス曲率一定曲面や平均曲率一定曲面を考えた場合には交叉帽子は現れずに, カスパ辺 (図3左), ツバメの尾 (図3中央), カスパ状交叉帽子 (図3右) という3つの特異点が頻繁に現れる. これらの特異点は, 一般にはガウス曲率は非有界であるが, 特別なケースとしてガウス曲率を有界にしたままで実現することが可能である. (実際, 平坦な曲面で, これら3つの特異点をもつ例が存在する.)

特に, カスパ辺とツバメの尾は, はめ込まれた曲面の平行曲面を考えたときに頻繁に現れる. この節では, カスパ辺について, 以前に筆者が神戸大の佐治健太郎氏, 東工大の山田光太郎氏との共同研究で証明した内容の概略を説明する.

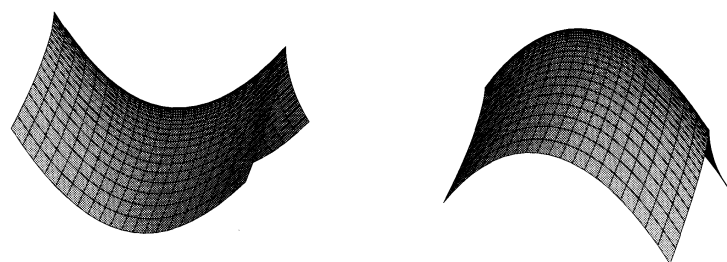


図 4. 負と正のカスパ辺

カスプ辺は曲面上に現れる特異点で、その特異点集合を正則な空間曲線としてパラメータ付けをすることができる。いま $\gamma(t)$ を、与えられたカスプ边上の特異点 p の近傍での特異点集合の正則曲線としての助変数表示とせよ。カスプ边上では、曲面の単位法線ベクトル場 ν が滑らかに定義されており、したがって、形式的に測地的曲率が定義される。但し測地的曲率は、曲面上における曲線の余法線の取り方によって符号に不定性が生ずるが、その符号を曲面を定める写像の退化方向を用いて制御することができ、式

$$\kappa_g := \pm \frac{\det(\gamma', \gamma'', \nu)}{|\gamma'|^3}$$

によってカスプ辺に沿って特異曲率関数が定義される。ここで $\pm$ は、実は曖昧な意味ではなく、実際 $\kappa_g > 0$ ならば、図4左のように反り返り $\kappa_g < 0$ ならば、図4右のように丸くなるように厳密に定めることができる。

このように定義された特異曲率は、曲面の位相と密接に関係している。 M^2 を2次元の境界のない向き付け可能かつコンパクトな多様体とし、 $f: M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ を C^∞ -写像でカスプ辺とツバメの尾以外の特異点を持たないとする、以下のガウス・ボンネ型の公式が成立する (cf. [6])。

$$\int_{M^2} K dA + 2 \int_{\Sigma_f} \kappa_g d\tau = 2\pi \chi(M^2).$$

ここで左辺第2項は、 f の特異点集合 Σ_f 上で特異曲率関数の積分をとったものである。この積分はツバメの尾においても発散しない。もしもこの全特異曲率の項がなければ、この等式は通常のガウス・ボンネの公式となる。

論文 [6] で示したように、カスプ边上の特異曲率について、以下の3つの事実が成り立つ。

- ツバメの尾に近づくと特異曲率関数は $-\infty$ に発散する。
- カスプ边上の一点 p において、曲面の単位法線ベクトルに直交する平面として接平面 T_p が定まる。一方、カスプ辺は正則な空間曲線でもあるので、各点で空間曲線としての接触平面 O_p (つまり曲線の速度ベクトルと加速度ベクトルで張られる p を通る平面) が定まる。点 p の近傍で、ガウス曲率が非有界であるための必要充分条件は、2つの平面 T_p と O_p が異なることで

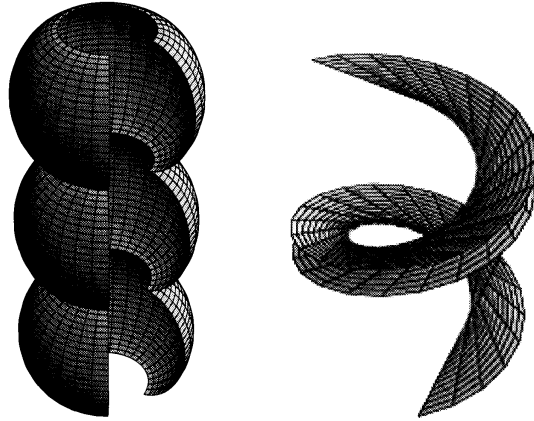


図 5. $K = 1$ の回転面と，つるまき線の接線曲面

ある．さらにこのとき，カスプ辺の一方の側ではガウス曲率は正の無限大に発散し，もう一方の側では負の無限大に発散する．

- もしも，カスプ辺の近傍でガウス曲率 K が非負ならば，点 p における特異曲率は非正となる．

図 5 の 2 つの曲面は共に，ガウス曲率が非負で一定の値をとる曲面の例であるが，そのカスプ辺は，両方とも負の特異曲率をもっていることが図から確認できる．次節以降で，交叉帽子についても同様の考察を行う．

3. 交叉帽子の標準形

M^2 を向き付けられた 2 次元多様体とする．写像 $f: M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ が点 $p \in M^2$ において交叉帽子特異点をもつとき， $\mathbf{R}^3$ の向きを保つ合同変換と，点 p を原点とする多様体 M^2 の向きに同調した局所座標 (u, v) をとると，写像 f は点 p において以下のようなマクローリン展開をもつ (cf. [2])

$$\begin{aligned} f(u, v) &= \left(u, uv + \sum_{i=3}^n \frac{b_i}{i!} v^i, \sum_{r=2}^n \sum_{j=0}^r \frac{a_{jr-j}}{j!(r-j)!} u^j v^{r-j} \right) + O(u, v)^{n+1} \\ &= \left(u, uv, \frac{a_{20}}{2} u^2 + a_{11} uv + \frac{a_{02}}{2} v^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{3!} \left(0, b_3 v^3, a_{30} u^3 + 3a_{21} u^2 v + 3a_{12} uv^2 + a_{03} v^3 \right) + O(u, v)^4. \end{aligned}$$

先に述べた交叉帽子の判定条件により a_{02} は消えない．上の表示において，必要ならば (u, v) を $(-u, -v)$ に置き換え， $\mathbf{R}^3$ の座標系 (x, y, z)

を $(-x, y, -z)$ に置き換えることにより $a_{02} > 0$ とおくことができる．このとき，展開におけるすべての係数

$$a_{20}, a_{11}, a_{02}, b_3, a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03}, \dots$$

は一意的に定まるため，可算無限個の交叉帽子の幾何学的不変量の列が得られる．特に係数 a_{20} が重要で，ちょうどカスプ辺における特異曲



図 6. $a_{20} < 0$ と $a_{20} > 0$ の交叉帽子

率のような役割を果たす．実際， $a_{20} < 0$ ならば図 6 左のように馬の鞍型となり， $a_{20} > 0$ ならば，図 6 右のようにお椀型となる．但し，カスプ辺の場合とは大きく異なり，この形状の差はガウス・ボンネの定理には影響を与えない．以下のことが知られている．

事実 1 (Kuiper [4]). M^2 を 2 次元の境界のない向き付け可能なコンパクトな多様体とし， $f: M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ を C^∞ -写像で交叉帽子以外の特異点を持たなかったとすると，以下のガウス・ボンネ型の公式が成立する

$$\int_{M^2} K dA = 2\pi\chi(M^2).$$

つまり交叉帽子特異点はガウス・ボンネ型の公式に欠損を与えない．ここで，筆者等が最近与えた係数 a_{20} の幾何学的な特徴付けを述べておこう．いま，点 p を C^∞ -写像 $f: M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ に現れる交叉帽子特異点とする．このとき以下のように許容的な局所座標系を定義する．

定義 2 ([3]). 点 $p \in M^2$ の廻りの局所座標系 (u, v) が許容的であるとは， p が原点に対応し，

$$f_v(p) = 0$$

となるときを云う．

交叉帽子特異点 p における許容的な局所座標 (u, v) をとり, ベクトル

$$f_u(0, 0) \quad f_v(0, 0)$$

で張られる点 $f(p)$ を通る $\mathbf{R}^3$ の平面を考えると, この平面は許容的な局所座標の取り方によらずに定まる. これを与えられた交叉帽子特異点における主平面という. 以下の命題は主平面に幾何学的意味づけを与える.

命題 3 ([3]). 交叉帽子特異点 $f(p)$ の $\mathbf{R}^3$ における自己交叉集合の点 $f(p)$ における接線方向は主平面に含まれる. 特に, 主平面は交叉帽子の接方向 $f_u(p)$ と自己交叉集合の初期接ベクトルで張られる平面に一致する.

(証明) この命題の性質は, 交叉帽子を与える写像芽の定義域の許容的な座標の取り替えと値域の座標変換によらない性質であるから, 標準的な交叉帽子 (1.1) に対して確かめることで証明が完了する. $\square$

いま, 主平面に $\{f_u(0, 0), f_v(0, 0)\}$ が正の基底となるような向きを入れると以下の命題が成り立つ.

命題 4 ([3]). 交叉帽子特異点 $f(p)$ の主平面による切り口は一般に正則曲線と, 自己交叉方向の切り口との和集合であるが, そのうちの正則曲線として現れる切り口の平面 P 上の曲線としての点 $f(p)$ における曲率は値 a_{20} に一致する.

4. 交叉帽子の等長変形

いま U^2 を uv -平面 $\mathbf{R}^2$ の原点を含む領域とし,

$$f_0 = f_0(u, v) : U^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$$

を, 原点に交叉帽子特異点をもつ C^∞ -写像とする. この写像を初期写像とする U^2 上の C^∞ -写像の連続変形の族 $\{f_t\}_{|t|<\varepsilon}$ が f_0 の等長変形であるとは, 変形によって第一基本形式が保存されるとき, すなわち各 $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して

$$(4.1) \quad (f_0)_u \cdot (f_0)_u = (f_t)_u \cdot (f_t)_u,$$

$$(4.2) \quad (f_0)_u \cdot (f_0)_v = (f_t)_u \cdot (f_t)_v,$$

$$(4.3) \quad (f_0)_v \cdot (f_0)_v = (f_t)_v \cdot (f_t)_v,$$

が U^2 上で成り立つときをいう。さらにもしも、各 f_t ($t \neq 0$) が f_0 に合同でないならば $\{f_t\}_{|t|<\varepsilon}$ は非自明な等長変形であるという。当初、筆者等は、すべて交叉帽子は、非自明な等長変形を持たないだろうと考えた。しかし以下に記すように、実際には、特別な交叉帽子を考えると、無限次元の自由度で、非自明な交叉帽子の等長変形が得られることを発見した。

前節で与えた交叉帽子の標準形において、3次以降のすべての項が消えているような表示をもつ $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^3$ への C^∞ -写像

$$f_0(u, v) = \left(u, uv, \frac{1}{2}(a_{20}u^2 + 2a_{11}uv + a_{02}v^2) \right)$$

を2次の交叉帽子とよぶことにする。与えられた2次の交叉帽子は

$$a_{20} = 0$$

となるとき退化しているという。標準的な交叉帽子 (cf. (1.1)) は

$$a_{20} = a_{11} = 0, a_{02} = 2$$

を満たすので退化した2次の交叉帽子の典型例である。退化した2次の交叉帽子は

$$f_0(u, v) = \left(0, 0, \frac{a_{02}}{2}v^2 \right) + u(1, v, a_{11}v)$$

なる表示をもつので常に線織面となる。以下の定理が成り立つ。

定理 1 ([3]). $c(s)$ ($|s| < \pi/2$) を s を弧長パラメータとする単位球面 S^2 上の正則曲線とする。いま

$$\begin{aligned} \xi(v) &:= \sqrt{1 + v^2(1 + (a_{11})^2)} c(s(v)), \quad s(v) := \arctan(v\sqrt{1 + (a_{11})^2}), \\ \gamma(v) &:= \frac{a_{02}}{1 + (a_{11})^2} \int_0^v tB(t)dt, \quad B(t) := a_{11}\xi'(t) + \xi(t) \times \xi'(t), \end{aligned}$$

とおくと、線織面

$$f(u, v) := \gamma(v) + u\xi(v) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$$

は、退化した2次の交叉帽子 f_0 と同じ第一基本形式をもつ、但しプライムは d/dt を表す。 f が f_0 と合同であるための必要充分条件は $c(s)$ が大円に一致するとき、そのときに限る。

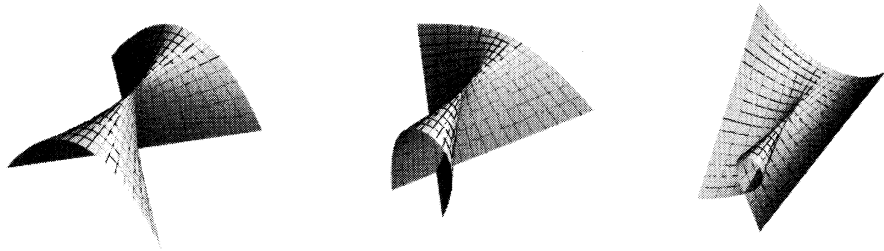


図 7. 標準的交叉帽子の非自明な等長変形

特に，大円からの球面曲線の変形を考えることで，退化した 2 次の交叉帽子 f_0 の非自明な等長変形が得られる．特に，初期曲面として標準的な交叉帽子（図 7 左）を選び，大円の半径を縮める単位球面上の円の族を考えると円が小さくなるにつれて図 7 左から右へと形が変化する等長変形が得られる．

(証明) ここでは，簡単のため標準的な交叉帽子の場合 ($a_{20} = a_{11} = 0, a_{02} = 2$) に限って証明の概略を述べる．まず

$$f(u, v) = \gamma(v) + u\xi(v)$$

とにおいて，その第一基本量が f_0 に一致するための条件を求める．そのためには (4.1), (4.2) および (4.3) の両辺に現れる式を比較すればよい．すると以下の 6 つの式が得られる．

$$\begin{aligned} \xi \cdot \xi &= 1 + v^2, & \xi \perp \gamma', & \xi \cdot \xi' = v, \\ \xi' \perp \gamma', & \gamma' \cdot \gamma' = 4v^2, & \xi' \cdot \xi' &= 1, \end{aligned}$$

但しプライムは d/dv を表す．特に $\xi = \xi(v)$ を制限する式が 3 本もあり，見かけ上では過剰決定系に見えるのであるが， $c(s)$ ($|s| < \pi/2$) を弧長をパラメータとする任意に固定された単位球面上の正則曲線とし，

$$\begin{aligned} \xi(v) &:= \sqrt{1 + v^2} c(s(v)), & s(v) &= \arctan v, \\ \gamma(v) &:= 2 \int_0^v t \xi(t) \times \xi'(t) dt \end{aligned}$$

とおくと 6 つの条件式はすべて満たされて，定理の主張が得られる． f の第二基本形式を計算すると， $c(s)$ の球面曲線としての測地的曲率関数が現れ，それが零のとき，そのときに限り f_0 の第二基本形式に一致することから定理の後半の主張が得られる． $\square$

特に，球面曲線の変形の具体例を計算し，交叉帽子の標準形の係数の変化を調べることで以下の系が得られる．

系 5 ([3]). 上述の退化した 2 次の交叉帽子の非自明な等長変形によって、一般に、標準形の係数 a_{03}, a_{12}, b_3 は変化する. 特に、これらの 3 つの交叉帽子の不変量は外的 (extrinsic) である.

5. 交叉帽子の内的な不変量

前節の結果から、等長変形で変化する交叉帽子の不変量の存在がわかったが、そうすると逆に、このような変形によって変わらない不変量は何か、ということが気になってくる. 交叉帽子の不変量は、第一基本形式のみの概念によって記述されるとき、内的である、ということにする. このとき、筆者等は以下の結果を得た.

定理 6 ([3]). 交叉帽子の標準形の係数として得られる不変量 a_{02}, a_{20}, a_{11} はすべて内的である.

この定理の証明の概略を述べる. 与えられた交叉帽子特異点を原点とする許容的な座標系 (u, v) をとると

$$\begin{aligned} a_{02} &= \frac{|f_u| |f_u \times f_{vv}|^3}{[f_u, f_{uv}, f_{vv}]^2}, \\ a_{20} &= \frac{|f_u \times f_{vv}|}{4|f_u|^3 [f_u, f_{uv}, f_{vv}]^2} \left([f_u, f_{uu}, f_{vv}]^2 \right. \\ &\quad \left. + 4[f_u, f_{uv}, f_{vv}][f_u, f_{uv}, f_{uu}] \right), \\ a_{11} &= \frac{1}{2|f_u|[f_u, f_{uv}, f_{vv}]^2} \left(2[f_u, f_{uv}, f_{vv}] \det \begin{pmatrix} f_u \cdot f_u & f_u \cdot f_{uv} \\ f_{vv} \cdot f_u & f_{vv} \cdot f_{uv} \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. - |f_u \times f_{vv}|^2 [f_u, f_{uu}, f_{vv}] \right) \end{aligned}$$

が $(u, v) = (0, 0)$ で成り立つ. ここで $\det$ は行列式を表し、カギ括弧 $[a, b, c]$ は列ベクトル $a, b, c \in \mathbf{R}^3$ をこの順に並べてできる 3 次の正方行列の行列式を表すものとする. この公式を見いだすこと自体は大変だが、ひとたび見つけてしまえば、右辺が許容的座標系の取り方に依らないことと、特別な許容的座標として、5 頁で与えた交叉帽子の標準形を与える座標をとったとき、右辺が左辺に一致することから公式が正しいことは簡単にチェックできる. 但し、この公式のままでは、まだ 3 つの不変量が内的であることはわからない. 証明法の説明のため

に, ここでは a_{02} が内的であることを示してみよう. まず

$$E := f_u \cdot f_u, \quad F := f_u \cdot f_v, \quad G := f_v \cdot f_v$$

により, 第一基本量を定義すると

$$|f_u| = \sqrt{E}, \quad |f_u \times f_{vv}|^2 = |f_u|^2 |f_{vv}|^2 - (f_u \cdot f_{vv})^2 = EG_{vv} - (F_v)^2$$

である. よって a_{02} が内的であることを示すには行列式 $[f_u, f_{uv}, f_{vv}]$ が第一基本量 E, F, G のみの言葉で書けることを示せばよい. これは, 以下の式変形による.

$$\begin{aligned} [f_u, f_{uv}, f_{vv}]^2 &= \det \left(\begin{pmatrix} f_u \\ f_{uv} \\ f_{vv} \end{pmatrix} (f_u, f_{uv}, f_{vv}) \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} E & F_u & F_v \\ F_u & G_{uu}/2 & G_{uv}/2 \\ F_v & G_{uv}/2 & G_{vv}/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

但し $f_v(0,0) = 0$ なので, 原点で以下の式が成り立つことを用いている

$$\begin{aligned} f_u \cdot f_u &= E, \quad f_u \cdot f_{uv} = F_u, \quad f_u \cdot f_{vv} = F_v, \\ f_{uv} \cdot f_{uv} &= \frac{G_{uu}}{2}, \quad f_{uv} \cdot f_{vv} = \frac{G_{uv}}{2}, \quad f_{vv} \cdot f_{vv} = \frac{G_{vv}}{2}. \end{aligned}$$

他の不変量についても行列式の部分は似たような手法で処理し, 内的であることがわかる.

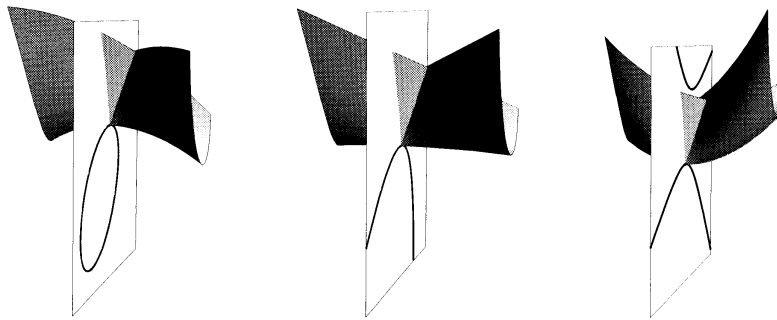


図 8. 交叉帽子の法円錐曲線 (図は長谷川氏による)

最後に, この結果と最近の福井氏-長谷川氏の仕事 [2] との関連を説明する. いま, U^2 を uv -平面 $\mathbf{R}^2$ の原点を含む領域とし

$$f : U^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$$

を原点に交叉帽子特異点をもつ C^∞ -写像とする．いま (u, v) は許容的な座標系として一般性を失わない． $f(0, 0)$ を通り， $f_u(0, 0)$ に直交する平面を，交叉帽子の法平面という．いま

$$u = r \cos \theta, \quad v = r \sin \theta$$

と極座標表示し f の単位法線ベクトル ν を

$$\nu = \nu(r, \theta)$$

と r, θ の関数で表示すると，これは $r = 0$ でも C^∞ -関数となり，定義から $f(0, 0)$ を始点とするベクトルとして $\nu(0, \theta)$ は法平面上に横たわる．(極座標で曲面を表すことは，交叉帽子における曲面の blow-up に対応し，この操作によって，単位法線ベクトルが一価関数として定義される．) そこで

$$f_t := f(r, \theta) + t\nu(r, \theta)$$

によって，交叉帽子においても平行曲面を定義することができ，各 f_t の特異点集合 Σ_t の和集合 $\bigcup_{t \in \mathbf{R}} \Sigma_t$ として焦面 (caustic, focal surface) が定まる．法平面による焦面の切り口を焦 2 次曲線 (focal conic) という．この設定のもとで福井-長谷川 [2] は，焦 2 次曲線は， xy -平面における以下の陰関数と合同であることを示した

$$x^2 + 2a_{11}xy - (a_{20}a_{02} - a_{11}^2)y^2 + a_{02}y = 0.$$

左辺の係数 a_{20} , a_{11} , a_{02} が内的であることから，以下の系が得られる．

系 7. 焦 2 次曲線は，第一基本形式のみの情報で決まる．

図 8 は， a_{20} が負，零，正のときの焦 2 次曲線の具体例である． $a_{20} < 0$ のとき楕円が， $a_{20} > 0$ のとき双曲線が現れる．

筆者らは等長変形を許す交叉帽子の族を見つけたが，これは特別で一般には，そのような等長変形は存在しないのではないかとと思われる．たとえば

「 $a_{20} \neq 0$ のとき，非自明な等長変形を許す交叉帽子はあるだろうか」という問題が考えられる．外の空間が一般の 3 次元リーマン多様体のときのガウス曲率や平均曲率の振る舞いについては [3] を参照されたい．

REFERENCES

- [1] T. Fukui, J. J. Nuño-Ballesteros, *Isolated roundings and flattenings of submanifolds in Euclidean spaces*, Tohoku Math. J. **57** (2005), 469–503.
- [2] T. Fukui and M. Hasegawa, *Fronts of Whitney umbrella—a differential geometric approach via blowing up*— Journal of Singularities, **4** (2012), 35–67.
- [3] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Intrinsic invariants of cross caps*, Preprint (arXiv:1207.3853).
- [4] N. H. Kuiper, *Stable surfaces in Euclidean three space*, Math. Scand., **36** (1975), 83–96.
- [5] 佐伯 修, 佐久間 一浩 共著: 特異点の数理 1, 幾何学と特異点第二部「微分位相幾何学と特異点」, 共立出版 (2001年)
- [6] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math. **169** (2009) 491–529.
- [7] F. Tari, *Pairs of geometric foliations on a cross-cap*, Tohoku Math. J. **59** (2007), 233–258.