

一般化された Chern-Weil 準同型について

大阪大学大学院 理学研究科 山崎 啓太 (Keita YAMASAKI)
Graduate School of Science, Osaka University

1 はじめに

可換な $\mathfrak{g}$ -微分代数 $\mathcal{A}$ が接続 θ をもつとき, $W_{\mathfrak{g}}$ を Weil 代数とすると Chern-Weil 準同型とよばれる $\mathfrak{g}$ -微分代数の準同型 $c^{\theta} : W_{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathcal{A}$ が構成できる. これが誘導する写像 $(Sg^*)_{\text{inv}} \cong H((W_{\mathfrak{g}})_{\text{basic}}) \rightarrow H(\mathcal{A}_{\text{basic}})$ は接続の取り方によらない. これを (代数版の) Chern-Weil の定理とよぶ. Alekseev-Meinrenken は最近のプレプリント [2] において次のことを示した: 必ずしも可換とは限らない locally free $\mathfrak{g}$ -微分代数 $\mathcal{A}$ に対して, $\mathfrak{g}$ -微分空間の準同型 $c, c' : W_{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathcal{A}$ が $W_{\mathfrak{g}}$ の単位元で一致するならば, これらが誘導する写像 $(Sg^*)_{\text{inv}} \cong H((W_{\mathfrak{g}})_{\text{basic}}) \rightarrow H(\mathcal{A}_{\text{basic}})$ は一致する. これから上の主張が非可換な $\mathcal{A}$ に対しても成り立つことが直ちに分かる. ただし [2] におけるこの定理の証明にはギャップがある. 橋本義武氏 (大阪市立大学) と筆者はこのギャップを埋めることに成功したので, ここではそれを説明したい. また [2] ではこの結果の応用としていくつかのことを示しているが, ここでは quadratic Lie 代数の場合の Duflo の定理の “conceptually easy” な証明を紹介する.

2 定義など

2.1 $\mathfrak{g}$ -微分代数

標数 0 の体 $\mathbb{F}$ 上のベクトル空間 V に対して, スーパーベクトル空間 E_V を

$$E_V := V \oplus V, \quad E_V^0 = E_V^1 := V$$

と定める. $v \in V$ に対応する E_V の even, odd element をそれぞれ $\bar{v} \in E_V^0, v \in E_V^1$ と表す. E_V 上の微分 d として

$$d(v) := \bar{v}, \quad d(\bar{v}) := 0, \quad v \in V$$

を自然に拡張したものを考えて, E_V は微分スーパーベクトル空間 (以下 ds) と考える. その対称代数 $S(E_V)$ は V 上の Koszul 代数とよばれる.

$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{F}$ 上の Lie 代数とすると, スーパー Lie 代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ を

$$\tilde{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{g}, \quad \tilde{\mathfrak{g}}^0 = \tilde{\mathfrak{g}}^1 := \mathfrak{g}$$

と定義する. ここで $\tilde{\mathfrak{g}}^0 = \mathfrak{g}$ は $\tilde{\mathfrak{g}}^1 = \mathfrak{g}$ に随伴表現によって作用する. $\tilde{\mathfrak{g}} = E_{\mathfrak{g}}$ と考えることにより微分を定め, $\tilde{\mathfrak{g}}$ は微分スーパー Lie 代数 (以下 dl) と考える.

定義 2.1. g -微分空間 (以下 g -ds) とは $ds(E, d)$ と dl 準同型 $\tilde{g} \rightarrow \text{End}(E)$ の組とする.

g -微分代数 (以下 g -da) とは微分スーパー代数 $(\mathcal{A}, d)$ と dl 準同型 $\tilde{g} \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A})$ の組とする. ただし $\text{Der}(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ の derivation 全体とする.

E を g -ds とするとき, $\bar{\xi} \in \tilde{g}^0, \xi \in \tilde{g}^1$ に対応する $\text{End}(E)$ の元をそれぞれ L_ξ, ι_ξ とかくことにする. このとき

$$E_{\text{hor}} := \bigcap \ker \iota_\xi, \quad E_{\text{inv}} := \bigcap \ker L_\xi, \quad E_{\text{basic}} := E_{\text{hor}} \cap E_{\text{inv}}$$

と定義する.

2.2 ホモトピー

スーパーベクトル空間 E, F の間の線型写像全体 $L(E, F)$ は

$$L(E, F)^{\bar{0}} := L(E^{\bar{0}}, F^{\bar{0}}) \oplus L(E^{\bar{1}}, F^{\bar{1}}), \quad L(E, F)^{\bar{1}} := L(E^{\bar{0}}, F^{\bar{1}}) \oplus L(E^{\bar{1}}, F^{\bar{0}})$$

により, スーパーベクトル空間となる.

また E, F が ds のとき, $L(E, F)$ は

$$d(\phi) := d \circ \phi - (-1)^{|\phi|} \phi \circ d$$

を微分とする ds である. ds 準同型は $L(E, F)^{\bar{0}}$ の cocycle に対応する.

2つの ds 準同型 $\phi_0, \phi_1 : E \rightarrow F$ の間の homotopy とは, $h \in L(E, F)^{\bar{1}}$ であり $d(h) = \phi_0 - \phi_1$ となるものとする.

また ds 準同型 $\phi : E \rightarrow F$ に対する homotopy inverse とは, ds 準同型 $\psi : F \rightarrow E$ であり $\phi \circ \psi, \psi \circ \phi$ がそれぞれ F, E の恒等写像 id_F, id_E と homotopic であるものとする.

もし homotopy inverse が存在すれば, ϕ は cohomology の間の同型を導く.

補題 2.2. (E, d) を ds として, $s \in \text{End}(E)^{\bar{1}}$ が $[d, s] = \text{id}_E$ をみたすと仮定する. このとき inclusion $i : \mathbb{F} \hookrightarrow S(E)$ と自然な射影 $\pi : S(E) \rightarrow E^{\otimes 0} = \mathbb{F}$ は homotopy inverse になる. つまり $S(E)$ の cohomology は自明である.

証明. $h := s \circ ([d, s] + i \circ \pi)^{-1}$ とすれば $d(h) = \text{id}_{S(E)} - i \circ \pi$. □

これより Koszul 代数 $S(E_V)$ の cohomology は自明であることがわかる. 実際 $s \in \text{End}(E_V)^{\bar{1}}$ は

$$s(v) := 0, \quad s(\bar{v}) := v, \quad v \in V$$

と定めればよい. これに対応する h を Koszul 代数の standard homotopy とよぶ.

さらに E, F を g -ds とすると, $L(E, F)$ も

$$\iota_\xi(\phi) := \iota_\xi \circ \phi - (-1)^{|\phi|} \phi \circ \iota_\xi, \quad L_\xi(\phi) := L_\xi \circ \phi - \phi \circ L_\xi$$

と定めることにより g -ds になる. g -ds 準同型は $L(E, F)_{\text{basic}}^{\bar{0}}$ の cocycle である.

また 2つの g -ds 準同型 $\phi_0, \phi_1 : E \rightarrow F$ の間の homotopy h が

$$\iota_\xi(h) = 0, \quad L_\xi(h) = 0$$

をみたすとき g -homotopy という.

このとき h を制限することにより, $\phi_0|_{E_{\text{basic}}}, \phi_1|_{E_{\text{basic}}} : E_{\text{basic}} \rightarrow F_{\text{basic}}$ の間の homotopy になり, これらが誘導する写像 $H(E_{\text{basic}}) \rightarrow H(F_{\text{basic}})$ は一致する.

2.3 接続

$\mathfrak{g}$ -da $\mathcal{A}$ 上の接続とは線型写像 $\theta : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathcal{A}^1$ であり

$$\iota_\xi(\theta(\mu)) = \mu(\xi), \quad L_\xi(\theta(\mu)) = -\theta(\text{ad}_\xi^* \mu), \quad \xi \in \mathfrak{g}, \mu \in \mathfrak{g}^*$$

をみたすものとする。接続をもつ $\mathfrak{g}$ -da を locally free とよぶ。

$\mathbb{F}c$ を even generator c によって張られる 1 次元空間とする。これには d が自明に作用しているとして、 $E_{\mathfrak{g}^*} \oplus \mathbb{F}c$ を ds と考える。さらに $E_{\mathfrak{g}^*}$ 上に $\tilde{\mathfrak{g}}$ の表現を

$$L_\xi \bar{\mu} = -\overline{\text{ad}_\xi^* \mu}, \quad L_\xi \mu = -\text{ad}_\xi^* \mu, \quad \iota_\xi \bar{\mu} = -\text{ad}_\xi^* \mu, \quad \iota_\xi \mu = \mu(\xi)c, \quad \xi \in \mathfrak{g}, \mu \in \mathfrak{g}^*$$

と定める。 c には自明に作用しているとして、 $E_{\mathfrak{g}^*} \oplus \mathbb{F}c$ を $\mathfrak{g}$ -ds とする。

$\mathfrak{g}$ -da $\mathcal{A}$ が接続 θ をもつと仮定すると、

$$\mu \mapsto \theta(\mu), \quad \bar{\mu} \mapsto d\theta(\mu), \quad \mu \in \mathfrak{g}^*$$

であり、 $c \mapsto \mathcal{A}$ の単位元、と定めることで $\mathfrak{g}$ -ds 準同型 $E_{\mathfrak{g}^*} \oplus \mathbb{F}c \rightarrow \mathcal{A}$ をえる。

逆にこのような $\mathfrak{g}$ -ds 準同型があれば、制限することにより $\mathcal{A}$ の接続をえる。

よって以下では $\mathcal{A}$ の接続とは上のような $\mathfrak{g}$ -ds 準同型とする。

3 Chern-Weil 準同型

Weil 代数 $W_{\mathfrak{g}} := S\mathfrak{g}^* \otimes \wedge \mathfrak{g}^*$ に対して $W_{\mathfrak{g}} \cong S(E_{\mathfrak{g}^*})$ が成り立つ。

さらに c を even generator とすると

$$W_{\mathfrak{g}} \cong S(E_{\mathfrak{g}^*} \oplus \mathbb{F}c) / \langle c - 1 \rangle$$

であることがわかる。 $E_{\mathfrak{g}^*} \oplus \mathbb{F}c$ 上の $\tilde{\mathfrak{g}}$ の表現から導かれる自然な $\mathfrak{g}$ -da structure を考えることに
より、 $W_{\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{g}$ -da になる。

このとき

$$H((W_{\mathfrak{g}})_{\text{basic}}) \cong (S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$$

が成り立つ。

$\mathcal{A}$ を可換な locally free $\mathfrak{g}$ -da とする。 $\mathcal{A}$ の接続 θ をひとつ固定すると、対称代数の universal property より、 $\mathfrak{g}$ -da 準同型 $\tilde{c}^\theta : S(E_{\mathfrak{g}^*} \oplus \mathbb{F}c) \rightarrow \mathcal{A}$ で可換図式

$$\begin{array}{ccc} E_{\mathfrak{g}^*} \oplus \mathbb{F}c & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{A} \\ \downarrow & & \uparrow \tilde{c}^\theta \\ S(E_{\mathfrak{g}^*} \oplus \mathbb{F}c) & \xlongequal{\quad} & S(E_{\mathfrak{g}^*} \oplus \mathbb{F}c) \end{array}$$

をみたすものが存在する。これが誘導する $\mathfrak{g}$ -da 準同型 $c^\theta : W_{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathcal{A}$ を Chern-Weil 準同型とよぶ。

このとき (代数版) Chern-Weil の定理とは次のことをいう (例えば [5] を参照) : $\mathcal{A}$ を可換な locally free $\mathfrak{g}$ -da とすると、 $\mathcal{A}$ において 2 つの接続に関する Chern-Weil 準同型は $\mathfrak{g}$ -homotopic である。つまり誘導される写像 $(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \cong H((W_{\mathfrak{g}})_{\text{basic}}) \rightarrow H(\mathcal{A}_{\text{basic}})$ は接続の取り方によらない。

$\mathcal{A}$ が非可換な場合は、テンソル代数 $T(E_g \cdot \oplus \mathbb{F}c)$ に対する universal property により、 g -da 準同型 $\tilde{c}^\theta : T(E_g \cdot \oplus \mathbb{F}c) \rightarrow \mathcal{A}$ で可換図式

$$\begin{array}{ccc} E_g \cdot \oplus \mathbb{F}c & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{A} \\ \downarrow & & \uparrow \tilde{c}^\theta \\ T(E_g \cdot \oplus \mathbb{F}c) & \xlongequal{\quad} & T(E_g \cdot \oplus \mathbb{F}c) \end{array}$$

をみたすものが存在する。しかし $S(E_g \cdot \oplus \mathbb{F}c)$ についてはいえない。

そこで“対称化”とよばれる g -ds 準同型

$$\text{sym} : S(E_g \cdot \oplus \mathbb{F}c) \rightarrow T(E_g \cdot \oplus \mathbb{F}c), v_1 \dots v_k \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} (-1)^{N_\sigma(v_1, \dots, v_k)} v_{\sigma^{-1}(1)} \dots v_{\sigma^{-1}(k)}$$

を考える。ここで $N_\sigma(v_1, \dots, v_k)$ は $v_i, v_j \in E_g \cdot \oplus \mathbb{F}c$ が odd element で、かつ $\sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j)$ となる $i < j$ の組の数とする。

そして、2つの合成

$$S(E_g \cdot \oplus \mathbb{F}c) \xrightarrow{\text{sym}} T(E_g \cdot \oplus \mathbb{F}c) \xrightarrow{\tilde{c}^\theta} \mathcal{A}$$

が誘導する写像を $c^\theta : W_g \rightarrow \mathcal{A}$ とする。ただし c^θ は g -ds 準同型であり、一般に代数の準同型にはならない。

しかし、非可換な代数に対する Chern-Weil の定理を含む次が成り立つ。

定理 3.1 ([2]). $\mathcal{A}$ を locally free g -da とする。任意の2つの g -ds 準同型 $c_0, c_1 : W_g \rightarrow \mathcal{A}$ が W_g の単位元で一致するならば、これらは g -homotopic である。

驚くべきことに c_i が代数の準同型でなくてもよいだけでなく、 $\mathcal{A}$ の接続に関する Chern-Weil 準同型である必要もないのである。

証明. $W_g \cong S(E_g \cdot)$ はスーパー Hopf 代数である。実際、diagonal embedding $E_g \cdot \rightarrow E_g \cdot \oplus E_g \cdot$ から誘導される写像 $\Delta : S(E_g \cdot) \rightarrow S(E_g \cdot) \otimes S(E_g \cdot)$ を余積、自然な射影 $\pi : S(E_g \cdot) \rightarrow E_g^{\otimes 0} = \mathbb{F}$ を co-unit とすればよい。

$L(W_g, \mathcal{A})$ に代数の構造を入れる。 $\phi_1, \phi_2 \in L(W_g, \mathcal{A})$ に対して

$$\phi_1 \cdot \phi_2 : W_g \xrightarrow{\Delta} W_g \otimes W_g \xrightarrow{\phi_1 \otimes \phi_2} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

と定める。ここで最後の写像は $\mathcal{A}$ における積である。また

$$i_{\mathcal{A}} \circ \pi : W_g \rightarrow \mathcal{A}$$

が単位元となる。ただし $i_{\mathcal{A}} : \mathbb{F} \rightarrow \mathcal{A}$ は $\mathcal{A}$ の unit とする。

示すべきことは、 g -ds 準同型 $c : W_g \rightarrow \mathcal{A}$ で $c(1) = 0$ ならば、 g -homotopy ψ で $c = d(\psi)$ をみたすものが存在することであるが、 $\mathcal{A}$ の接続 θ をひとつ固定して、 $\phi := c^\theta + c$ とおくと

$$\psi := ((c \cdot \phi^{-1}) \circ h) \cdot \phi$$

とすればよい。ただし h は $S(E_g \cdot)$ の standard homotopy とする。 □

注意 3.2. [2] における定理 3.1 の ψ は $\mathfrak{g}$ -homotopy にはならない. 上の ψ は橋本義武氏 (大阪市立大学) と筆者によるものである.

系 3.3. $\mathcal{A}$ を locally free $\mathfrak{g}$ -da とする. $\mathfrak{g}$ -ds 準同型 $c: W\mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{A}$ が $W\mathfrak{g}$ の unit を $\mathcal{A}$ の unit にうつすなら, 誘導する写像 $(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \cong H((W\mathfrak{g})_{\text{basic}}) \rightarrow H(\mathcal{A}_{\text{basic}})$ は代数の準同型であり, これは c の取り方によらない.

特にこれは接続 θ の Chern-Weil 準同型 c^θ に適用でき, 非可換な代数に対して Chern-Weil の定理が使える.

証明. $w' \in W\mathfrak{g}$ をひとつ固定すると, 2 つの $\mathfrak{g}$ -ds 準同型

$$W\mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{A}, \quad w \mapsto c(ww'), \quad w \mapsto c(w)c(w')$$

は $W\mathfrak{g}$ の単位元で一致する. 定理 3.1 よりこれらは $\mathfrak{g}$ -homotopic である. よって

$$[c(ww')] = [c(w)c(w')] = [c(w)][c(w')]$$

となり, c が誘導する写像は代数の準同型であることがわかる. $\square$

4 Duflo の定理

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が不変な内積をもつとき quadratic Lie 代数とよぶ. ただし内積とは非退化な対称双線型形式とする.

$\mathfrak{g}$ が quadratic Lie 代数で不変な内積 B をもつならば, $B_{\tilde{\mathfrak{g}}}$ を

$$B_{\tilde{\mathfrak{g}}}(\xi, \xi') = B_{\tilde{\mathfrak{g}}}(\bar{\xi}, \bar{\xi}') := 0, \quad B_{\tilde{\mathfrak{g}}}(\bar{\xi}, \xi') := B(\xi, \xi')$$

と定めると $\tilde{\mathfrak{g}}$ 上の不変な内積となる. よって $\tilde{\mathfrak{g}}$ も quadratic になる.

このとき,

$$\omega(X, Y) := B_{\tilde{\mathfrak{g}}}(\mathrm{d}X, Y)\mathfrak{c}, \quad X, Y \in \tilde{\mathfrak{g}}$$

と定めた $\tilde{\mathfrak{g}}$ 上の cocycle ω に対する central extension $\tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}\mathfrak{c}$ を考える. ここで

$$[\xi, \xi']_{\tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}\mathfrak{c}} := B(\xi, \xi')\mathfrak{c}, \quad \xi, \xi' \in \mathfrak{g}$$

であることを注意しておく.

$U\mathfrak{g}$ を包絡代数, $\mathrm{Cl}(\mathfrak{g})$ を Clifford 代数とすると, Alekseev-Meinrenken により [1] で導入された非可換 Weil 代数 $\mathcal{W}\mathfrak{g} := U\mathfrak{g} \otimes \mathrm{Cl}(\mathfrak{g})$ に対して

$$\mathcal{W}\mathfrak{g} \cong U(\tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}\mathfrak{c}) / (\mathfrak{c} - 1)$$

が成り立つ ([2]).

$\tilde{\mathfrak{g}} = E_{\mathfrak{g}}$ と同一視することにより定まる微分, および

$$L_{\xi}v := [\bar{\xi}, v]_{\tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}\mathfrak{c}}, \quad \iota_{\xi}v := [\xi, v]_{\tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}\mathfrak{c}}, \quad \xi \in \mathfrak{g}, v \in \tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}\mathfrak{c}$$

から自然に誘導される $\tilde{\mathfrak{g}}$ の表現により, $\mathcal{W}\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ -da と考える.

また

$$H((\mathcal{W}\mathfrak{g})_{\text{basic}}) \cong (U\mathfrak{g})_{\text{inv}}$$

が成り立つことも注意しておく.

$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とすると, Poincaré-Birkhoff-Witt 対称化とよばれる線型写像

$$\text{sym} : S\mathfrak{g} \rightarrow U\mathfrak{g}, \quad \xi_1 \dots \xi_k \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \xi_{\sigma^{-1}(1)} \dots \xi_{\sigma^{-1}(k)}$$

は同型になることが知られている. また $\mathfrak{g}$ がスーパー Lie 代数のときも同様のことが成り立つ (例えば [3] 参照). しかしこれは一般に代数の準同型にはならない.

ここでは次を Duflo の定理とよぶことにする.

定理 4.1. $\mathfrak{g}$ を quadratic Lie 代数すると, $(S\mathfrak{g})_{\text{inv}}$ と $(U\mathfrak{g})_{\text{inv}}$ は代数として同型である.

従来の証明 ([4]) には無限階微分作用素などの解析を用いるが, 以下の証明 ([2]) は代数的な議論のみで行うことができる.

証明. 不変な内積により $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*$ と同一視し, $E_{\mathfrak{g}} \cong E_{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}$ と考える.

Poincaré-Birkhoff-Witt 対称化 $S(\tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c) \rightarrow U(\tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{F}c)$ が誘導する $\mathfrak{g}$ -ds としての同型 $W_{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}_{\mathfrak{g}}$ に対して, 系 3.3 を適用すると, 代数の同型 $(S\mathfrak{g})_{\text{inv}} \xrightarrow{\sim} (U\mathfrak{g})_{\text{inv}}$ をえる. $\square$

参考文献

- [1] Alekseev, A., Meinrenken, E., *The non-commutative Weil algebra*, Invent. Math. 139 (2000), no.1, 135–172.
- [2] Alekseev, A., Meinrenken, E., *Lie theory and the Chern-Weil homomorphism*, preprint, math.RT/0308135.
- [3] Deligne, P., Morgan, J., *Notes on supersymmetry (following Joseph Bernstein)*, in “Quantum fields and strings: a course for mathematicians”, Vol. 1, (Princeton, NJ, 1996/1997), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 41–97.
- [4] Duflo, M., *Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 10 (1977), no. 2, 265–288.
- [5] Guillemin, V., Sternberg, S., *Supersymmetry and equivariant de Rham theory*, Springer-Verlag, 1999.