

There are no expansive homeomorphisms on S^2

鹿見島高専 平出耕一 (Koichi Hiraide)

(X, d) はコンパクト距離空間とし $f: X \rightarrow X$ は (上への) 同相写像とする. f が 拡大的 (拡大定数 $C > 0$) であるとは, $x, y \in X$ が異なるならば $n \in \mathbb{Z}$ が存在して $d(f^n(x), f^n(y)) > C$ となる時をいう. T. O'Brien と W. Reddy [5] は正の genus をもつ向き付け可能な閉曲面は拡大的同相写像を許容することを示した. しかし他の閉曲面が拡大的同相写像を許容するかどうかは未解決問題として残されている. この論文の目的はこの問題に対し次の様な部分解を与えることである.

定理 1 2次元球面とクライン管上に拡大的同相写像は存在しない.

[4] において, 射影平面が拡大的同相写像を許容するならば, 2次元球面もまたそのような同相写像を許容するとい

うことが述べられている。しかし定理1より次が得られる。

系 射影平面上に拡大的同相写像は存在しない。

この論文を通して、曲面とは境界のない連結な2次元 C^∞ 級リーマン多様体であるとし閉曲面を M^2 によって表わすことにする。

定理1の結論は閉曲面上のsingular foliationに関連する次の定理2を証明することにより得られるであろう。

定理2 $f: M^2 \rightarrow M^2$ は拡大的同相写像とする。そのとき集合族 $\mathcal{F}^\sigma(M^2, f)$ ($\sigma = s, u$) は次の性質をもつ。

- (1) $\mathcal{F}^\sigma(M^2, f)$ は C^0 級の singular foliation である,
- (2) 各 leaf $W^\sigma(x) \in \mathcal{F}^\sigma(M^2, f)$ は $L_p = \{z \in \mathbb{C} : I_m(z^{\frac{p}{2}}) = 0\}$ ($p \geq 2$) と同相である,
- (3) $\mathcal{F}^u(M^2, f)$ は $\mathcal{F}^s(M^2, f)$ と横断的である。

$x \in X$ に対し 安定集合 $W^s(x)$, 不安定集合 $W^u(x)$ を

$$W^s(x) = \{y \in X : d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0 \text{ } (n \rightarrow \infty)\},$$

$$W^u(x) = \{y \in X : d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0 \text{ } (n \rightarrow -\infty)\}$$

により定義する。 $y \in W^s(x)$ とすると $W^s(y) = W^s(x)$ だから、集合族

$\mathcal{F}(X, f) = \{W^\sigma(\alpha) : \alpha \in X\}$ は X の分割である.

今後 $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ によりそれぞれ自然数, 実数, 複素数の全体を表わすことにする. $P \in \mathbb{N}$ に対し

$$L_P = \{z \in \mathbb{C} : I_m(z^{\frac{P}{2}}) = 0\}$$

とし, $t \in \mathbb{R} (t > 0)$ に対し $L(P, t, i) (1 \leq i \leq P)$ は $\{z \in \mathbb{C} : I_m(z^{\frac{P}{2}}) = t\}$ の連結成分を表わすことにする. このとき $L(1, t, 1)$ は放物線であり $L(2, t, i) (i=1, 2)$ は直線である. $P \geq 3$ のとき, $L(P, t, i) (i=1, 2, \dots, P)$ は双曲線に類似した代数曲線である. このような集合からなる集合族 $\mathcal{C}_P$ を

$$\mathcal{C}_P = \{L_P\} \cup \{L(P, t, i) : t > 0, i=1, 2, \dots, P\}$$

により定義する. $\mathcal{C}_P$ は原点 0 を除くと $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上の foliation である.

M^2 の分割子 $\mathcal{F}$ が M^2 上の C^r 級 ($0 \leq r \leq \infty$) の singular foliation であるとは, 各 $L \in \mathcal{F}$ は連結であり, 各 $x \in M^2$ に対し $P(x) \in \mathbb{N}$, M^2 における x の開近傍 U_x として C^r 級微分同相写像 $\varphi_x : U_x \rightarrow \mathbb{C}$ が存在して $\varphi_x(x) = 0$ であり $U_x \cap L \neq \emptyset (L \in \mathcal{F})$ ならば $U_x \cap L$ の各連結成分は φ_x により $\mathcal{C}_{P(x)}$ の元の上に写される時をいう.

$\mathcal{F}$ は M^2 上の C^r 級の singular foliation であるとする. $x \in M^2$ は $P(x) = 2$ のとき $\mathcal{F}$ の 正則点, $P(x) \neq 2$ のとき $\mathcal{F}$ の 特異点 であると呼ばれる. $\mathcal{C}_P$ の定義から $\mathcal{F}$ の特異点は有限個である. もし $\mathcal{F}$ が特異点をもたないとする, $\mathcal{F}$ は普通の foliation であ

る。子の各元は leaf と呼ばれ、普通の foliation と同様、leaf topology がはいっている。

回転 $R_p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を $R_p(z) = ze^{2\pi i p}$ により定義する。子と子は C^r 級の singular foliation であるとしよう。子が子と 横断的 であるとは各 $x \in M^2$ に対し子と子に共通な $p(\alpha) \in \mathbb{N}$, M^2 における x の開近傍 U_x をして C^r 級微分同相写像 $\varphi_x: U_x \rightarrow \mathbb{C}$ が存在して $p(\alpha), U_x, \varphi_x$ は子に対し singular foliation の定義にある条件を満たし $p(\alpha), U_x, R_{p(\alpha)} \circ \varphi_x$ は子に対し singular foliation の定義にある条件を満たす時をいう。

定理 2 が証明されたとすると、定理 1 はやさしく証明される。実際、子が M^2 上の C^0 級の singular foliation であるならば次の Euler-Poincaré の公式が成り立つ

$$2\chi(M^2) = \sum_{x \in M^2} (2 - p(\alpha))$$

ここで $\chi(\cdot)$ は Euler 標数を表わす (cf. [1, P. 75])。

M^2 は拡大的同相写像 f を許容するとしよう。そのとき定理 2(1) より $f^*(M^2, f)$ は C^0 級の singular foliation である。さらに定理 2(2) よりすべての $x \in M^2$ に対し $p(\alpha) \geq 2$ が成り立つ。したがって Euler-Poincaré の公式より $\chi(M^2) \leq 0$ となる。2次元球面の Euler 標数は正であるから、 M^2 は2次元球面になりえない。

M^2 はクライン管であるとする、 $\chi(M^2)=0$ である。これはすべての $x \in M^2$ に対し $p(x)=2$ を意味する。すなわち $\mathcal{F}^s(M^2, f)$ は特異点をもたない。したがってKneserの定理より $\mathcal{F}^s(M^2, f)$ の中にコンパクトleafが存在する([3])。しかし定理(2)よりこれは起りえない。ゆえに M^2 はクライン管ではない。

注 上と同様にして、系を証明することができる。

$x \in X$ と $\varepsilon > 0$ に対し

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\},$$

$$\mathbb{I}_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\},$$

$$S_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) = \varepsilon\}$$

とおく。Xが閉曲面の場合、 $\varepsilon > 0$ が十分小さいならば各 $x \in X$ に対し $B_\varepsilon(x)$, $\mathbb{I}_\varepsilon(x)$, $S_\varepsilon(x)$ はそれぞれ円板、開円板、円である。Xが連結かつ局所連結の場合は、[2, p.95]の定理2.4により $B_\varepsilon(x)$ は連結であると仮定することができる。

$x \in X$ と $\varepsilon > 0$ に対し局所安定集合 $W_\varepsilon^s(x)$, 局所不安定集合 $W_\varepsilon^u(x)$ を

$$W_\varepsilon^s(x) = \{y \in X : d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon, n \geq 0\},$$

$$W_\varepsilon^u(x) = \{y \in X : d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon, n \leq 0\}$$

により定義し、 $C_\varepsilon^\sigma(x)$ ($\sigma = s, u$)は $W_\varepsilon^\sigma(x)$ における x の連結成分とす

る。定理 2 を証明するためには、次の命題 A, B を必要とする。

命題 A $f: X \rightarrow X$ は拡大的とする。もし X が自明でなく、連結かつ局所連結であるならば、各 $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在してすべての $x \in X$ に対し

$$S_\delta(x) \cap C_\varepsilon^\sigma(x) \neq \emptyset \quad (\sigma = s, u).$$

命題 B $f: X \rightarrow X$ は拡大的 (拡大定数 $c > 0$) とする。もし X が閉曲面であるならば、すべての $0 < \varepsilon \leq c/2$ と $x \in X$ に対し $C_\varepsilon^\sigma(x)$ ($\sigma = s, u$) は局所連結である。

証明の詳細は、別の論文の中で与えられるであろう。

References

- [1] A. Fathi and F. Laudenbach, Les feuilletages mesurés, Travaux de Thurston sur les surfaces, p. 71-92, Astérisque, 66-67, Soc. Math. France, Paris, 1979.
- [2] D. W. Hall and G. L. Spencer II, Elementary Topology, John Wiley & Sons, INC., New York, 1955.

[3] G. Hector and U. Hirsch, Introduction to the Geometry of Foliations, Part A, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig / Wiesbaden, 1981.

[4] E. Hemmingsen and W. Reddy, Lifting and projecting expansive homeomorphisms, Math. Systems Theory, 2 (1968), 7-15.

[5] T. O'Brien and W. Reddy, Each compact orientable surface of positive genus admits an expansive homeomorphism, Pacific J. Math., 35 (1970), 737-741.