

可積分非局所格子方程式

若竹 塾 成田、和明

(1991年11月8日受理)

【要旨】 非局所格子方程式として

$$\dot{\phi}_i + \dot{\phi}_{i+1} = \text{sh}(\phi_i - \phi_{i+1}) [1 - e^{-2(\phi_i + \phi_{i+1})}]^{1/2}$$

を提案する。2-ソリトン解を証明し、N-ソリトン解を推測する。

【本文】 この論文で扱うのは、次式で与えられる非局所格子方程式

$$\dot{\phi}_i + \dot{\phi}_{i+1} = f(\phi_i, \phi_{i+1}) \quad (1)$$

の1例であるところの、次の方程式

$$\dot{\phi}_i + \dot{\phi}_{i+1} = \text{sh}(\phi_i - \phi_{i+1}) [1 - e^{-2(\phi_i + \phi_{i+1})}]^{1/2} \quad (2)$$

である。(2)式は変換

$$u_i = 1 - e^{2\phi_i} / \sqrt{2} \quad (3)$$

或いは

$$\phi_i = (1/2) \log \{ \sqrt{2}(1 - u_i) \} \quad (4)$$

により,

$$\frac{d}{dt} (1 - 2u_i - 2u_{i+1} + 2u_i u_{i+1})^{1/2} = (1/\sqrt{2})(u_{i+1} - u_i) \quad (5)$$

に変形される。前稿¹⁾を参考にして、(5)式の conjectural N-ソリトン解を次式のように与えてみる。

$$u_i = \frac{|I + B(i)|^2 - |I + B(i-1)| |I + B(i+1)| + A(i+1) |I + B(i-1)| - A(i-1) |I + B(i+1)|}{|I + B(i)|^2}, \quad (6)$$

ここに $A(i)$ と行列 $B(i)$ の (m, n) 要素は次式で与えられる。

$$A(i) = 2 \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \overline{(I + B(i))_{nm}} \times \frac{\text{ch} \kappa_m \cdot \text{sh} \kappa_n}{(\text{ch} \kappa_m + i \text{sh} \kappa_m)(\text{ch} \kappa_n - i \text{sh} \kappa_n)} \cdot e^{2x_n}, \quad (7)$$

$$(B(i))_{mn} = \frac{2 \text{sh} \kappa_m \cdot \text{ch} \kappa_n}{\text{sh}(\kappa_m + \kappa_n)} \cdot e^{2x_n}, \quad (8)$$

$$x_n = \kappa_n \cdot i + \omega_n \cdot t + \delta_n, \quad (9)$$

ここで(7)式中の上についたバーは余因子行列をあらわし、分散関係式は未定とする。

定義式

$$(1 - 2u_{i-1/2} - 2u_{i+1/2} + 2u_{i-1/2}u_{i+1/2})^{1/2} \equiv 1 + 2(w_{i-1/2} - w_{i+1/2}), \quad (10)$$

を用いると、前稿の結果¹⁾から、 w_i の形が

$$w_i = A(i) / |I + B(i)| \quad (11)$$

ではなくてはならないことがわかる。

(5), (10)式より、 w_i と u_i は

$$\dot{w}_i = -(1/2\sqrt{2})u_i \quad (12)$$

を満たさなくてはならないことがわかる。

2-ソリトン解の時以上の推測を試してみても、分散関係式を求めてみる。(7), (8)式で $N=2$ とおくと、

$$|I + B(i)| = 1 + e^{2x_1} + e^{2x_2} + \left[\frac{\text{sh}(\kappa_1 - \kappa_2)}{\text{sh}(\kappa_1 + \kappa_2)} \right]^2 e^{2(x_1 + x_2)}, \quad (13)$$

$$A(i) = \text{th} 2\kappa_1 \cdot e^{2x_1} + \text{th} 2\kappa_2 \cdot e^{2x_2} + \frac{2 \text{sh}^2(\kappa_1 - \kappa_2)}{\text{ch} 2\kappa_1 \cdot \text{ch} 2\kappa_2 \cdot \text{th}(\kappa_1 + \kappa_2)} \cdot e^{2(x_1 + x_2)} \quad (14)$$

この時(6)式より u_i の表式は次のようになる。

$$u_i = N / |I + B(i)|^2, \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
N = & \frac{4\text{sh}^2\kappa_1}{\text{ch}2\kappa_1} \cdot e^{2x_1} + \frac{4\text{sh}^2\kappa_2}{\text{ch}2\kappa_2} \cdot e^{2x_2} + \frac{8\text{sh}^2(\kappa_1 - \kappa_2)}{\text{ch}2\kappa_1 \cdot \text{ch}2\kappa_2} \cdot e^{2(x_1 + x_2)} \\
& + \frac{4\text{sh}^2\kappa_2}{\text{ch}2\kappa_2} \left[\frac{\text{sh}(\kappa_1 - \kappa_2)}{\text{sh}(\kappa_1 + \kappa_2)} \right]^2 \cdot e^{4x_1 + 2x_2} + \frac{4\text{sh}^2\kappa_1}{\text{ch}2\kappa_1} \left[\frac{\text{sh}(\kappa_1 - \kappa_2)}{\text{sh}(\kappa_1 + \kappa_2)} \right]^2 \cdot e^{2x_1 + 4x_2}
\end{aligned} \tag{16}$$

(11)~(16)式を用いて(12)式の左右辺を比較すると,

$$\omega_i = -(1/2\sqrt{2})\text{th}\kappa_i, \quad (i=1, 2) \tag{17}$$

の時(12)式が恒等的に満足されることが示される。

このようにして, (2)式の2-ソリトン解が証明された。推測された N-ソリトン解の厳密な証明は今後の課題である。

参 考 文 献

- 1) K. Narita: 物性研究 Vol. 57, No. 4.