

- 4) S. Ito, S. Tanaka and H. Nakada, Tokyo J. Math. 2 (1979), 221, 241.
- 5) T. Yoshida, H. Mori and H. Shigematsu, J. Stat. Phys. 31 (1983), 279.
- 6) T. Yoshida, Prog. Theor. Phys. 72 (1984), 895.
- 7) T. Yoshida, Prog. Theor. Phys. 73 (1985), No. 2.
- 8) M. J. Feigenbaum, Phys. Lett. 74A (1979), 375; Physica 7D (1983), 16.

間欠的カオスのスペクトル構造

九大・理 森 肇, 徐丙鉄, 黒木昌一

カオス側 $\varepsilon > 0$ においてカオスの発生点 $\varepsilon = 0$ に近づくと、制御パラメタ ε に依らない漸近則が存在するかどうかは、基礎的問題の一つと考えられる。相転移の臨界現象では、このような漸近則として、rescaleされた状態方程式や時空相関関数が知られている。しかし、カオスの場合には、このような漸近則の存在は自明ではない。というのは、間欠的カオスの接線分岐などで知られている軌道の自己相似性は、奇妙なアトラクタの、極く小さな小領域で成立するに過ぎないからである。不変確率密度はこの小領域に集中しているが、例えば、バーストによる位相のジャンプは、この小領域の外側で生じる。また、一般に2つ以上の特性時間が存在するのである。

ここでは、パワースペクトルについてこの問題を考察した。ここには、もう一つの基礎的問題がある。カオスの性質をきめる不変確率密度やその他の統計量の理論的計算は、現在、1次元写像でしか行ない得ない。ところが、力学系のパワースペクトルは、そのポアンカレ写像のパワースペクトルと一般に異なる。この困難を避けるため

(1) まず、力学系の時系列、または、実験で観測される時系列についてパワースペクトルの一般論をつくり、

(2) その一般論に含まれる統計量をきめるのにポアンカレ写像を援用する、

としよう。実際、カオスの発生点の近傍 $\varepsilon \ll 1$ では、このプログラムを実行することができる。

間欠的カオスの時系列は、バーストと周期的ラミナー状態の交代列からなる。 n 番目のバーストと $(n+1)$ 番目のバーストとの間のラミナー状態は

$$X_n(t) = [1 + b_n(s)] \exp[i\omega_0 t + i\phi_n]$$

森 肇, 徐丙鉄, 黒木昌一

とかける。ここに, ラミナー状態の継続時間を τ_n として $0 < s < \tau_n$, 固有振動数を ω_0 , 位相シフトを ϕ_n , 振幅変調を $b_n(s)$ とした。一般に, バーストによる位相のジャンプ $\xi_n \equiv \phi_n - \phi_{n-1}$ が存在する。そのとき, 発生点の近傍では, パワースペクトルは, ξ_n の平均値 $\bar{\xi}$, 分散 n^2 , および, τ_n の特性関数

$$\langle \exp(-i\hat{\omega}\tau_n) \rangle = e^{-i\nu\tau - \gamma}, \quad (\hat{\omega} \equiv \hat{\omega} - \omega_0)$$

によってきまる。ここで, 系の力学的特性時間を τ_C として, 無次元の振動数 $\nu \equiv \omega\tau_C$ を導入した。 τ, γ は ν の実関数である。

$\tau(\nu), \gamma(\nu)$ をきめるのに, ポアンカレ写像を援用できる。安定なリミットサイクルが不安定な周期軌道と衝突して現われる間欠的カオスの場合, ラミナー状態の振幅変調は, よく知られた1次元写像

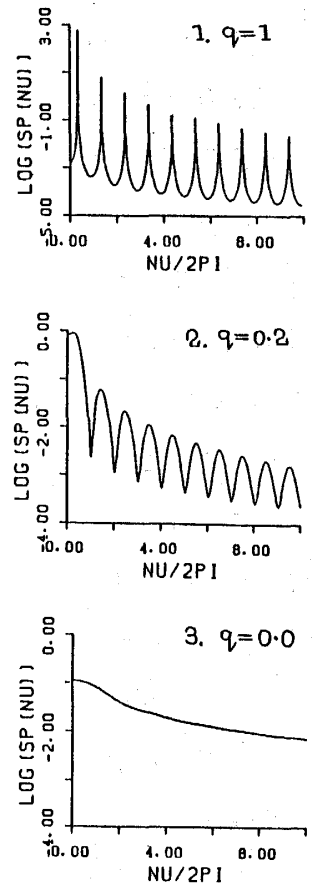
$$x_{s+1} = x_s + x_s^2 + \varepsilon, \quad (s = 0, 1, 2, \dots)$$

によって表わせる。振幅がある値 x_B をこえるとバーストが現われる。それが再びラミナー状態へどう這入るかは, 奇妙なアトラクタの他の領域によってきまり, 体系によって異なる。それには, いくつかのタイプがあると考えられる。そのタイプを表わすパラメタ q を導入して, reinjection の確率分布を

$$P(x_0) = \begin{cases} pq & \text{if } -x_B < x_0 < 0, \\ p(1-q) & \text{if } 0 < x_0 < x_B \end{cases}$$

としよう。ここで $1 \geq q \geq 0$, $p = 1/x_B$ である。 $\varepsilon \ll 1$ のとき, $\tau_C = \pi/\sqrt{\varepsilon}$ であり, 基本的パラメタは $\delta \equiv 1/x_B \tau_C$ である。図1は, $\xi = 2\pi/3$, $\eta^2 = 0.001$, $\delta = 0.001$, $q = 1$ のときの rescale されたパワースペクトル $S(\nu)$ を示す。これは, $x = 0$ の所にある狭いチャンネルを通る軌道が作るスペクトルである。その特徴は, ローレンツ型の線が等間隔に並んだ列からなることである。その線列の包絡線は, 逆ベキ則 $1/\nu^3$ に従う。図2は, $q = 0.2$ に対するスペクトルであり, 各線は幅の大きいガウス型で, それらの包絡線は近似的に逆ベキ則 $1/\nu^2$ に従う。図3は, $q = 0.0$ に対するスペクトルであり, 6π より大きな振動数 ν では, $1/f$ スペクトルである。これらの性質は, $\varepsilon \rightarrow 0$ のときの漸近的性質として解析的に導くことができる。

図の各スペクトル線の幅および強度は, 特性時間 τ_C で rescale されているにも拘わらず ε



図の各スペクトル線の幅および強度は, 特性時間 τ_C で rescale されているにも拘わらず ε

に依存し、スペクトル構造の詳細は普遍的性質とはなり得ない。しかし、スペクトル構造の包絡線は、上記のように、 ε に依らない逆べき則に従い、その指数は、間欠的カオスの普遍性を定量的に代表するものといえる。なお、指数の値 3, 2, 1 は、異なるラミナー状態間の相関を無視して得られたもので、RPA 近似または平均場近似の値に相当するものと考えられる。

ある高次元アトラクターのリアプノフ特性

京大・理 物理 池田研介, 松本健司

§ 1. 研究の目的と方法

無限自由度の系でみられる chaos を研究する。chaos の原因である双曲的不安定性に象徴される力学的な機構が、時系列の比較的単純な統計処理によってえられる諸特性（フーリエ特性、フィルター特性等々）にどのような形で顔を出すか？ 乱流のイメージとしてよく引合いに出されるカスケード過程と系の力学的構造がどう結びついているか？ 具体例による case study によって普遍的と思われそうな性質を抽出しその内的関連をさぐる。我々の用いるモデルは毎度おなじみの遅延微分方程式

$$dx(t)/dt = -x(t) + \mu f(x(t - t_R)) \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここでは $f(x) = \cos x$ である。この方程式は双曲型の方程式（例 Maxwell 方程式）がからむ系、例えばレーザや非線形光共振器のモデルである。 μ （＝入力エネルギー/散逸：レイノルズ数のごときもの）と t_R （ちえん時間：系のサイズに関係）のてきとうな選択によって質を異にする様々なカオス状態がくれ、しかも数値積分が安価で我々の目的にかなっている。

§ 2. リアプノフスペクトル, リアプノフ基底, フーリエ基底

(1) はベクトル $\vec{x} = \{x(t)\} (t_0 \leq t \leq t_0 + t_R)$ から $\vec{x}' = \{x(t)\} (t_0 + t_R \leq t < t_0 + 2t_R)$ への写像を定義する。解 $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \dots \vec{x}_n \dots$ を考え $\vec{x}_1$ まわりの微小球 ${}^t\delta\vec{x}_1 {}^t\delta\vec{x}_1 = 1$ の時間発展を追う。それはだ円体 ${}^t\delta\vec{x}_n A_n^{-1} {}^t\delta\vec{x}_n$ に変化する。だ円主軸長の平均増幅率 $\lambda_i (\lambda_{i+1} > \lambda_i)$ がリアプノフ指数、主軸方向の単位ベクトル $\vec{e}_i(\vec{x}_n)$ がリアプノフベクトル。アトラクターは $\vec{x}_n$ の近傍で軸長 e^{λ_i} のだ円（リアプノフだ円体）の様に局所的に伸び（縮んで）いる訳である。 λ_i を大きい順に並べた所謂リアプノフスペクトルを図 1 に示す。面積 $\sum_{i=1}^n \lambda_i$ がゼロになる様な n 次元の中