

球函数付きの二次形式のテータ函数よりできる

Siegel 尖点型式について 織田孝幸(東大理)

§ 0 この小論では Hecke [1], Schoeneberg [1] が elliptic modular の場合に得た, 球函数付きの二次形式のテータ函数についての結果の一部を Siegel modular の場合に拡張することを目指にする。証明は Schoeneberg [1] の一変数の場合とそのまま拡張すれば良く, 本質的に新しいことは何も無いが, また Maass あたりによって既に知られている事かも知れないが, 明確に (level まで決めて) 書かれた物は無いようであるが少しは意味があるであろうと思われる。

§ 1 記号, 定義, 結果.

まず言葉を決める。

$\mathbb{E}_n$; 次数 n の Siegel 上半空間。 $Z \in \mathbb{E}_n$ でその点を記す。

$$Sp(n, \mathbb{Z}) = \left\{ \sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{Z}) \mid \sigma^t \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix} \sigma = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}, A, B, C, D \in M_{n \times n}(\mathbb{Z}); E_n \text{ は size } n \text{ の単位行列; } t \text{ は転置.} \right\}$$

$Sp(n, \mathbb{Z})$ は周知のやり方で $\mathbb{E}_n$ に作用している。

Q ; $m \times m$ 対称, 有理整数, 正定値, 偶行列とする。

(ここで行列 Q が偶であるとは, 対角成分がすべて偶数であることを意味する。)

以下では size m も偶数と仮定する。 Q^{-1} を Q の逆行列とする。

N ; Q の level, 即ち自然数 N で $N \cdot Q^{-1}$ がまた整数, 偶行列

であるような最小の数と定める。

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{Z}), A, B, C, D \in M_{n,n}(\mathbb{Z}) \mid C \equiv 0 \pmod{N} \text{ かつ } (C_i)_{i=1}^n \text{ の各成分 } C_i \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N}, \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ は } 2n \times 2n \text{ の単位行列} \right\}.$$

$\Gamma(N)$ は所謂、主合同部分群である。

$$\Gamma(N) \subset \Gamma_0(N) \text{ で共に } Sp(n, \mathbb{Z}) \text{ の指数有限の部分群。}$$

$(\rho, V); GL(n, \mathbb{C})$ の有限次元複素ベクトル空間 V を表現空間とする、既約多項式表現。ここで $\mathbb{C}$ は複素数体。

v で V の元を表わすとする。 $V \neq \{0\}$ と仮定する。

$L; n \times m$ 複素行列, つまり $M_{n \times m}(\mathbb{C})$ の元。 L で転置行列を表わす。

$e(x); x$ を複素数とするとき $e(x)$ で $e^{2\pi i x}$ を意味することにする。ただしここで i は虚数単位。 π は円周率。

定義 1 $\mathcal{J}(Z; Q)$ を $\mathcal{J}(Z; Q) = \sum_{M \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})} e\left[\frac{1}{2} \text{tr}(M \cdot Q^t M \cdot Z)\right]$ と定める。 Q 正定値, $Z \in \mathbb{C}_n$ より右辺は収束して $\mathbb{C}_n$ 上の正則函数を定める。所謂二次形式のテータ函数である。適当な合同部分群をとれば, Siegel modular 型式になるのは周知である。これを少し一般化して,

定義 2 $\mathcal{J}(Z; Q; \rho, v, L)$ を

$$\mathcal{J}(Z; Q; \rho, v, L) = \sum_{M \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})} e\left[\frac{1}{2} \text{tr}(M \cdot Q^t M \cdot Z)\right] \cdot \rho(M \cdot Q \cdot L) \cdot v$$

と定めると、やはり右辺は収束して、ベクトル空間 V に値をとる $\mathbb{C}_n$ 上の正則関数と見做せる。右辺の式で v を取り除いたものを $\psi(Z; Q; p; L)$ と記すことにするとこれも $\text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ に値を取る $\mathbb{C}_n$ 上正則な関数と考えられる。

【定義 1, でいい忘れてたが, tr は trace の意味である。また M は全ての $n \times m$ 整数行列を動く。】

定理 1. $Z \in \mathbb{C}_n$, $\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$, N は Q の level とする。

また $Z^\# = (AZ+B)(CZ+D)^{-1} = \sigma(Z)$ とする。このとき

$$\psi(Z^\#; Q; p; L; v) = \mu(\sigma)^{-1} \{ \det(CZ+D) \}^{\frac{m}{2}} p(CZ+D) \psi(Z; Q; p; L; v)$$

但し, p が trivial 表現, identity 表現のどちらとも同値でないときは, $L \cdot Q \cdot L^t = 0$ (右辺は $n \times n$ の零行列) を仮定する。また $\mu(\sigma)$ は $\Gamma_0(N)$ から絶対値 1 の複素数に値を取る指標であって, μ は Q のみに依り, p, L, v, Z には依らない。 $\mu(\sigma)$ は後で決定されるように ± 1 のみ値として取る。

特に $p(CZ+D) = \{ \det(CZ+D) \}^k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, のときに上の定理を

特殊化すれば $\sum_{M \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})} \{ \det(M \cdot Q \cdot L^t) \}^k \in [\frac{1}{2} \text{tr}(M \cdot Q \cdot M^t Z)]$ は $L \cdot Q \cdot L^t = 0$ のとき 重さ $\frac{m}{2} + k$ で, multiplier μ の $\Gamma_0(N)$ に属する modular 型式になることがわかる。(実は, のちほどわかるように $k > 0$ のときは尖点型式になることも言える。)

定義 3 H を $n \times m$ 整数行列で $H \cdot Q \equiv 0 \pmod{N}$ とする。

このとき $\mathcal{V}(Z:Q, H; \rho, L, \nu)$ を

$$\mathcal{V}(Z:Q, H; \rho, L, \nu) = \sum_{\substack{M \in M_{n \times m}(\mathbb{Z}) \\ M \equiv H \pmod{N}}} \oplus \left[\frac{1}{2N^2} \text{tr}(M \cdot Q^* M Z) \right] \rho(M \cdot Q^* L) \nu$$

と定めると, 右辺は V -valued, $\mathbb{C}_n$ 上の正則函数。

定理 2 $\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma(N)$, $Z^\# = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$ とする。

ρ が trivial 表現, あるいは, identity 表現と同値でないとき,
 $L \cdot Q \cdot L^t = 0$ を仮定するとき

$$\mathcal{V}(Z^\#:Q, H; \rho, L, \nu) = \mu_H(\sigma)^{-1} \det(CZ+D)^{\frac{m}{2}} \rho(CZ+D) \mathcal{V}(Z:Q, H; \rho, L, \nu)$$

$\mu_H(\sigma)$ は $\Gamma(N)$ から絶対値 1 の複素数への指標 (実はあとでわ

かるように $\mu_H(\sigma) = 1$)

$\sigma \in \text{Sp}(n, \mathbb{Z}) = \Gamma(1)$ のとき $\det(CZ+D)^{-\frac{m}{2}} \rho(CZ+D)^{-1} \mathcal{V}(Z^\#:Q, H; \rho, L, \nu)$ は

$\mathcal{V}(Z:Q, H^1; \rho, L, \nu)$ (H^1 は $H \cdot Q \equiv 0 \pmod{N}$ なる integral matrix の

$\pmod{N}$ の class での代表。 $H^1 \equiv H^2 \pmod{N}$ なるものは明

らかに $\mathcal{V}(Z:Q, H^1; \rho, L, \nu) = \mathcal{V}(Z:Q, H^2; \rho, L, \nu)$) たちの一次結合
 と表わされる。 $\mu_H(\sigma) = 1$ がいえれば, これより $\Gamma(1)/\Gamma(N)$ の

表現を得る。 (定理 2 終り。)

定理 1 と 2 ^{の前半} を証明するためにはまずテータ変換公式を思い出す。

§2 テータ変換公式

まず記号を定める。 $\tau \in \mathbb{C}_g$ を g 次元 Siegel 上半空間の点, とする。

また $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Sp(g, \mathbb{Z})$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in M_2(\mathbb{Z})$ とする。さらに $u \in \mathbb{C}^g$ を複素 g -次元横ベクトルとする。 m', m'' を g -次元実横ベクトルとする。このとき $\text{moduli } \tau$, $\text{argument } u$, $\text{theta characteristic}$ が (m', m'') の τ - u 函数 $\theta_{m'm''}(\tau, u)$ は

$$\theta_{m'm''}(\tau, u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} e\left[\frac{1}{2}(m'+n)\tau(m'+n) + (m'+n)(m''+u)\right]$$

と定義される。ただし n は g -次元の有理整数横ベクトル全てを動く。これについて次の τ - u 変換公式が知られている。

定理 (τ - u 変換公式)

$$(\tau, u) \in \mathbb{G}_g \times \mathbb{C}^g; \sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Sp(g, \mathbb{Z})$$

$$\tau^\# = (\alpha\tau + \beta)(\gamma\tau + \delta)^{-1}, \quad u^\# = u(\gamma\tau + \delta)^{-1}, \quad m = (m', m'') \in \mathbb{R}^{2g} \text{ とするとき}$$

$$m^\# = (m'^{\#}, m''^{\#}) = m \cdot \sigma^{-1} + \frac{1}{2}(\gamma^t \delta)_0, (\alpha^t \beta)_0$$

『ここで $()_0$ は $()$ 中の行列の対角成分を順に横になすべし
行ベクトルと意味する。』

このとき

$$\theta_{m'^{\#}, m''^{\#}}(\tau^\#, u^\#) = \mathcal{U} \cdot e\left[\frac{1}{2}u(\gamma\tau + \delta)^{-1}\gamma^t u\right] \det(\gamma\tau + \delta)^{\frac{1}{2}} \theta_{m', m''}(\tau, u)$$

が成立する。ここで $\mathcal{U}$ は絶対値 1 の複素数で、 τ, u に依存しない。 (m', m'') と σ により定まる。

特に $\det \gamma \neq 0$ とすると

$$\mathcal{U}' = \mu_0^{-1} \cdot e\left[\frac{1}{2}(m'^t \delta \beta^t m' - 2m'^t \delta \cdot m'' + m''^t \delta \cdot \alpha^t m'') - \frac{1}{2}(\alpha^t \beta)_0 (\delta^t m' - \gamma^t m'')\right]$$

ここで μ_0 は σ のみに依り (m', m'') に依らない絶対値 1 の複素数である。

上の定理については Igusa [1], [2], Siegel [1], あるいは Krazier [1] を見よ.

$\Gamma_g(1, 2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Sp(g, \mathbb{Z}) \mid \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \frac{1}{2}(\gamma + \delta) \text{ が共に integral vector} \right\}$ となる $Sp(g, \mathbb{Z})$ の部分集合とする。これは実は $Sp(g, \mathbb{Z})$ の指数有限の部分群である。(cf. Igusa [2])

$\Gamma_g(1, 2)$ が $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\det \gamma \neq 0$ なる元から生成されていることに注意して

系 1. 上の定理と同じ記号の下で、但し、 $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma_g(1, 2)$, また $m^\#$ は $m^\# = (m'^\#, m''^\#) = (m', m'')\sigma^{-1}$ と定義しなおすことにすると,

$$\begin{aligned} & \Theta \left[\frac{1}{2}(m'^t \delta \cdot \beta^t m' - 2m'^t \gamma \cdot \gamma^t m'' + m''^t \gamma \cdot \alpha^t m'') \right] \cdot \theta_{m'^\# m''^\#}(\tau^\#, u^\#) \\ &= \mu_0 \cdot \Theta \left[\frac{1}{2} u (\gamma \tau + \delta)^{-1} \cdot \gamma^t u \right] \cdot \det(\gamma \tau + \delta)^{\frac{1}{2}} \theta_{m' m''}(\tau, u) \end{aligned}$$

が成立する。ただし μ_0 は σ のみに depend し、 τ, u, m', m'' には依らない。

§3. 2次形式のテータ函数の変換公式

以下 $g = n \cdot m$ とする。 $Z \in \mathbb{C}^n$, $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{R})$, $A, B, C, D \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ とする。いま $\otimes$ で行列の Kronecker 積を意味することにする。ただし P, Q を行列とするとき $P \otimes Q = \begin{pmatrix} p_{11}Q & p_{12}Q & \cdots \\ p_{21}Q & p_{22}Q & \cdots \end{pmatrix}$ となることに決めておく。 E_m を $alg\ m$ の単位行列とする。

$\tau = Z \otimes Q$, $\alpha = A \otimes E_m$, $\beta = B \otimes Q$, $\gamma = C \otimes Q^{-1}$, $\delta = D \otimes E_m$ とす

ると, $\tau \in \mathbb{G}_g$, $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Sp(g, \mathbb{R})$ としても $Z^\# = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$

とすると, $\tau^\# = Z^\# \circ Q = (\alpha\tau + \beta)(\gamma\tau + \delta)^{-1}$. したがって

$$(Z, \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}) \in \mathbb{G}_n \times Sp(n, \mathbb{R}) \longmapsto (Z \circ Q, \begin{pmatrix} A \circ E_n & B \circ Q \\ C \circ Q^{-1} & D \circ E_n \end{pmatrix}) \in \mathbb{G}_g \times Sp(g, \mathbb{R})$$

は equivariant embedding である.

特に $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ とするとき, $\begin{pmatrix} A \circ E_n & B \circ Q \\ C \circ Q^{-1} & D \circ E_n \end{pmatrix} \in Sp(g, \mathbb{Z})$ である.

実は, もっと強く, $\begin{pmatrix} A \circ E_n & B \circ Q \\ C \circ Q^{-1} & D \circ E_n \end{pmatrix} \in \Gamma_g(1, 2)$ である.

定義 4 $Z \in \mathbb{G}_n$, $U \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$, $M', M'' \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ とするとき,

$$\mathcal{V}_{M', M''}^\theta(Z; Q; U) = \sum_{P \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})} \exp \left[\frac{1}{2} \text{tr} \{ (P+M') Q^t (P+M') Z \} + \text{tr} \{ (P+M')^t (U+M'') \} \right]$$

と右辺の和で左辺を定義する. Q 正定値よりこの函数は

$\mathbb{G}_n$ 上で正則で, $U \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$ に関しても正則, M', M'' に関

しては実解析的な函数で, これらの変数についての微分は

項別に考えてすべて意味をもつ.

いま N を Q の level とする. このとき次の定理が成立する.

定理 3 (二次形式のテータ変換公式)

$\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ とする. $Z^\# = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$,

$${}^t U^\# = {}^t U \cdot (CZ+D)^{-1} \quad \text{また} \quad \begin{cases} M^\# = D \cdot M' - C \cdot M'' \cdot Q^{-1} \\ M'' = -B \cdot M' \cdot Q + A \cdot M'' \end{cases}$$

とすると

$$\begin{aligned} \mu(\sigma) \cdot \exp \left[\frac{1}{2} \text{tr} \{ M' \cdot Q^t M'^t \cdot D \cdot B - 2 \cdot M'^t M''^t \cdot C \cdot B + M' \cdot Q^{-1} \cdot M''^t \cdot C \cdot A \} \right] \times \\ \times \mathcal{V}_{M^\#, M''}^\theta(Z^\#; Q; U^\#) = \exp \left[\frac{1}{2} \text{tr} \{ U Q^{-1} {}^t U (CZ+D)^{-1} C \} \right] \cdot \det(CZ+D)^{\frac{m}{2}} \times \end{aligned}$$

$$\times \mathcal{I}_{M', M''}(Z; Q = U)$$

(証明) 定義 4 の前で説明した *equivariant embedding* を使って, β_2 のテータ変換公式の系 1 を書きなおせ. (終り)

注意 Q の行列としての size m が偶数のとき $\mu(\sigma)$ は $\Gamma_0(N)$ の絶対値 1 の複素数に値をとる指標.

系 4. 定理 3 で $U=0$, $M''=0$ とおけば, あると $U^\# = 0$ で

$$M^{\#'} = D \cdot M', \quad M^{\#''} = -B \cdot M' \cdot Q. \quad \text{このとき}$$

$$\begin{aligned} (F) \quad \dots \mu(\sigma) \in [\tfrac{1}{2} \text{tr}(M' \cdot Q^t M'^t D \cdot B)] \cdot \mathcal{I}_{M', M''}(Z^\#; Q; 0) \\ = \det(CZ + D)^{\frac{m}{2}} \mathcal{I}_{M', Q}(Z; Q; 0) \end{aligned}$$

が成立する。

(F) の左辺を変形する. そのために

補題 5

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}[\tfrac{1}{2} \text{tr}(M' \cdot Q^t M'^t D \cdot B) + \tfrac{1}{2} \text{tr}\{(P + DM') \cdot Q^t (P + DM') Z^\#\} + \text{tr}\{(P + DM') \times \\ & \quad \times^t (-B \cdot M' \cdot Q)\}] \\ & = \mathcal{E}[\tfrac{1}{2} \text{tr}\{M' \cdot Q^t (DM' + 2P)^t (CZ + D)^{-1} Z^\#\}] \times \mathcal{E}[\tfrac{1}{2} \text{tr}(PQ^t P Z^\#)] \end{aligned}$$

(証明)

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \mathcal{E}[\tfrac{1}{2} \text{tr}(M' \cdot Q^t M'^t D \cdot B) + \tfrac{1}{2} \text{tr}\{DM' \cdot Q^t (DM') Z^\#\} + \text{tr}(DM' \cdot Q^t P \cdot Z^\#) \\ & \quad + \tfrac{1}{2} \text{tr}(P \cdot Q^t P Z^\#) + \text{tr}\{DM'^t (-BM' \cdot Q)\} + \text{tr}\{P^t (-BM' \cdot Q)\}] \\ &= \mathcal{E}[\tfrac{1}{2} \text{tr}\{M' \cdot Q^t M'^t D \cdot B + M' \cdot Q^t M'^t D Z^\# D\} + \text{tr}\{-M' \cdot Q^t M'^t B D\} + \\ & \quad + \text{tr}\{Z^\# DM' \cdot Q^t P - B M' \cdot Q^t P\} + \tfrac{1}{2} \text{tr}(PQ^t P Z^\#)] \end{aligned}$$

$$= E\left[\frac{1}{2} \text{tr}\{M' Q^t M'^t D Z^\# D - M' Q^t M'^t D B\} + \text{tr}\{(Z^\# D - B) M' Q^t P\} + \frac{1}{2} \text{tr}\{P Q^t P Z^\#\} \right]$$

$$= E\left[\frac{1}{2} \text{tr}\{M' Q^t (D M' + 2P)(Z^\# D - B)\} + \frac{1}{2} \text{tr}\{P Q^t P Z^\#\} \right]$$

$$\text{ここで } Z^\# D - B = {}^t(CZ + D)^{-1} {}^t(AZ + B) D - B = {}^t(CZ + D)^{-1} \cdot Z$$

よって式は

$$= E\left[\frac{1}{2} \text{tr}\{M' Q^t (D M' + 2P) {}^t(CZ + D)^{-1} Z\} \right] \times E\left[\frac{1}{2} \text{tr}(P Q^t P Z^\#)\right] \quad (\text{f.e.d.})$$

§4. Differential process

定理 1 を証明するためにいくつか補題を用意する。

定義 5. $L = (l_{ij})$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$) を $n \times m$ 複素行列とする。

$M' = (m_{ij})$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$) を $n \times m$ の実の変数行列とする。

$L_{ij} = \sum_{\alpha=1}^m l_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial m_{j\alpha}}$ ($1 \leq i, j \leq n$) で n^2 個の微分作用素 L_{ij} を定める。

$$\begin{aligned} \text{補題 6. } L_{ij} \left(\frac{1}{2} \text{tr}\{M' Q^t (D M' + 2P) {}^t(CZ + D)^{-1} Z\} + \text{tr}(P Q^t P Z^\#) \right) \\ = \{L \cdot Q^t (D M' + P) {}^t(CZ + D)^{-1} Z\}_{ij} \end{aligned}$$

(ただしここで P, Q, D, C, Z は定数と見做されている。また $\{ \}_{ij}$ の意味は $\{ \}$ 内の行列の (ij) 成分を取り出すことを意味している)

これよりさらに

$$\begin{aligned} L_{ij} \left(E\left[\frac{1}{2} \text{tr}(M' Q^t M'^t D \cdot B)\right] \times E\left[\frac{1}{2} \text{tr}\{(P + D M') Q^t (P + M') Z^\#\} + \right. \right. \\ \left. \left. + \text{tr}\{(P + D M') {}^t(-B \cdot M' Q)\} \right] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi i) \times \{L \cdot Q^T (DM' + P)^T (CZ + D)^{-1} Z\}_{ij} \times e^{\left[\frac{1}{2} \text{tr} (M' Q^T M'^T D \cdot B)\right]} \\
&\times e^{\left[\frac{1}{2} \text{tr} \{(P + DM') \cdot Q^T (P + DM') Z^\# \} + \text{tr} \{(P + DM')^T (-BM' Q)\} \right]} \\
&\text{が成立する。}
\end{aligned}$$

(証明) 前半は直接計算せよ。後半は前半と補題4より。

命題 7 ρ が trivial 表現の identity 表現のとき 定理 1 は成立つ
 (証明) ρ が trivial 表現のとき。このとき $\mathcal{V}(Z; Q; \rho; L, U)$ は
定義 4 の $\mathcal{V}_{M' M''}(Z; Q; U)$ で $U=0$, $M'=M''=0$ とおいたときの定
 数倍である。よって 定理 3 より 定理 1 は ρ が trivial 表現のとき
 成立する。

ρ が identity 表現のとき、つまり $\rho(CZ + D) = CZ + D$ のとき、

$$\mathcal{V}_{ij}(Z; Q; \rho; L) = \sum_{P \in M_{nm}(\mathbb{Z})} \{L \cdot Q^T P\}_{ji} \times e^{\left[\frac{1}{2} \text{tr} (P Q^T Z)\right]}$$

と $\mathcal{V}_j(Z; Q; \rho; L)$ を定めるとき、

$$\mathcal{V}(Z; Q; \rho; L) = (\mathcal{V}_{ij}(Z; Q; \rho; L)) \quad (\text{n} \times \text{n} \text{ の行列})$$

と 式 (F) の両辺に微分作用素の行列 $(\mathcal{L}_{ji})$ ($1 \leq j, i \leq n$) を適用
 する。そののちに $M'=0$ とおく。すると

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right) \text{左辺} = \mu(Z) (CZ + D)^{-1} \cdot \mathcal{V}(Z^\#; Q; \rho; L)$$

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right) \text{右辺} = \det(CZ + D)^{\frac{m}{2}} \cdot Z^{\frac{m}{2}} \mathcal{V}(Z; Q; \rho; L)$$

両辺に ${}^t Z^{-1}$ を掛けて求める結果

$$\mu(Z) (CZ + D)^{-1} \cdot \mathcal{V}(Z^\#; Q; \rho; L) = \det(CZ + D)^{\frac{m}{2}} \mathcal{V}(Z; Q; \rho; L)$$

を得る。定理 1 の形にするには両辺に左から $CZ + D$ をかけ

てから両辺を $v \in V$ に作用させればよい。《命題の証明終り》

一般の f については次の補題を用いる。

補題 8 $LQ^tL=0$ とする。定理 3 の系 4 と同じく $M' = D \cdot M'$,

$M^{\#''} = -B \cdot M' \cdot Q$ とおく。このとき

$$\begin{aligned} & \left[L_{i_1 j_1} \cdot L_{i_2 j_2} \cdot L_{i_3 j_3} \cdots L_{i_k j_k} \left\{ e^{\left[\frac{1}{2} \text{tr} (M' \cdot Q^t \cdot M'^t \cdot D \cdot B) \cdot \varphi_{M^{\#}, M^{\#''}}(Z^{\#}; Q; 0) \right]} \right\} \right]_{M'=0} \\ &= (2\pi i)^k \cdot \sum_{P \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})} \left\{ Z \cdot (Z+D)^{-1} \cdot P \cdot Q^t \cdot L \right\}_{j_1 i_1} \cdot \left\{ Z \cdot (Z+D)^{-1} \cdot P \cdot Q^t \cdot L \right\}_{j_2 i_2} \cdots \left\{ Z \cdot (Z+D)^{-1} \cdot P \cdot Q^t \cdot L \right\}_{j_k i_k} \\ & \quad \times e^{\left[\frac{1}{2} \text{tr} (P Q^t P \cdot Z^{\#}) \right]} \end{aligned}$$

(証明) 帰納法による。容易であるから省略。

定理 1 の証明: $\mathcal{L} = (L_{ij})$, $n \times n$ 次の微分作用素の行列とする。

いま (f, V) を既約多項式表現とし, V の基底を一つ固定し表現 f を行列表示する。つまり $X = (x_{ij}) \in GL(n, \mathbb{C})$ なる, 変数とあるとき $f(X) = (p_{\alpha\beta}(X))$ ($1 \leq \alpha, \beta \leq \dim_{\mathbb{C}} V$) $p_{\alpha\beta}(X)$ は x_{ij} たちの同次数の斉次多項式である。 $p_{\alpha\beta}(\mathcal{L})$ を定理 3 系 4 の (F) の左辺に適用すると, 補題 8 より

$$\begin{aligned} & \mu(f) \left[p_{\alpha\beta}(\mathcal{L}) \left\{ e^{\left[\frac{1}{2} \text{tr} (M' \cdot Q^t \cdot M'^t \cdot D \cdot B) \cdot \varphi_{M^{\#}, M^{\#''}}(Z^{\#}; Q; 0) \right]} \right\} \right]_{M'=0} \\ &= (2\pi i)^* \sum_{P \in \mathbb{Z}} p_{\alpha\beta} \left(Z \cdot (Z+D)^{-1} \cdot P \cdot Q^t \cdot L \right) \cdot e^{\left[\frac{1}{2} \text{tr} (P Q^t P \cdot Z^{\#}) \right]} \end{aligned}$$

(F) の右辺にも同じことをやる。

これより,

$$\begin{aligned}
\mu(\omega) \sum_{P \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})} \rho_{\alpha, \beta}({}^t Z (CZ+D)^{-1} P \cdot Q \cdot {}^t L) \in [\tfrac{1}{2} \omega(PQ {}^t PZ^{\#})] \\
= \det(CZ+D)^{\frac{m}{2}} \sum_{P \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})} \rho_{\alpha, \beta}({}^t Z \cdot P \cdot Q \cdot {}^t L) \in [\tfrac{1}{2} \omega(P \cdot Q {}^t PZ)]
\end{aligned}$$

よて,

$$\begin{aligned}
\therefore \mu(\omega) \sum_P \rho({}^t Z (CZ+D)^{-1} P \cdot Q \cdot {}^t L) \in [\tfrac{1}{2} \omega(P \cdot Q {}^t PZ^{\#})] \\
= \det(CZ+D)^{\frac{m}{2}} \sum_P \rho({}^t Z \cdot P \cdot Q \cdot {}^t L) \in [\tfrac{1}{2} \omega(PQ {}^t PZ)]
\end{aligned}$$

$\det(Z) \neq 0$, $\det(CZ+D) \neq 0$ より $\rho({}^t Z \cdot (CZ+D)^{-1})$ は逆元をもつ。それを上式の両辺に掛けてやる。

$$\begin{aligned}
\mu(\omega) \sum_P \rho(P \cdot Q {}^t L) \in [\tfrac{1}{2} \omega(PQ {}^t PZ^{\#})] &= \det(CZ+D)^{\frac{m}{2}} \times \rho(CZ+D) \times \\
&\times \sum_P \rho(P \cdot Q {}^t L) \in [\tfrac{1}{2} \omega(PQ {}^t PZ)]
\end{aligned}$$

両辺に $v \in V$ に適用すれば、定理 1 を得る。(定理 1 の証明参り)

(の前半)

定理 2 の証明も 定理 1 と同様である。ただ $M' = 0$ の代りに $M' = \frac{1}{N} H$ (H は $M_{n \times m}(\mathbb{Z})$ の元で $H \cdot Q \equiv 0 \pmod{N}$ となるもの) とすればよい。

§5. 定理 1, 2 の補足

$\rho(X) = \det(X)^k$, k は正整数とする。このとき $\text{Maab}[1]$ の結果を使うと 定理 1, 2 は以下のように定式化できる。

まず行列空間 $M_{n \times m}(\mathbb{R})$ 上の次数 k の調和多項式を次のように定義する。

定義 $h(X)$ ($X = (x_{ij}) \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$) を x_{ij} の多項式で次の二つの条件をみたすとき $h(X)$ を次数 k の調和多項式ということとする。

$$(1) \quad \Lambda \in GL(n, \mathbb{R}) \text{ に対し } h(\Lambda \cdot X) = (\det \Lambda)^k \cdot h(X).$$

$\frac{\partial}{\partial X} = (\frac{\partial}{\partial x_{ij}})$ を $n \times m$ の微分作用素とする。 $f(\frac{\partial}{\partial X})$ を $n \times n$ 行列 $(\frac{\partial}{\partial X}) \cdot Q^{-1} \cdot (\frac{\partial}{\partial X})^t$ の行列式である $2n$ 次定係数微分作用素とする。このとき、

$$(2) \quad f(\frac{\partial}{\partial X}) \cdot h(X) = 0 \quad (\text{恒等的に零}).$$

定理 (MauB) 次数 k の調和多項式は $\det(X \cdot Q^t \cdot L)^k$ ($L Q^t L = 0$) たちの線型結合として書ける。つまり $h(X)$ に対して、定数 c_i と $L_i Q^t L_i = 0$ なる $n \times m$ 複素行列 L_i が存在して

$$h(X) = \sum_i c_i \cdot \{\det(X \cdot Q^t \cdot L_i)\}^k$$

が成立する。

さて次数 k の調和多項式 $h(X)$ に対して

$$\mathcal{N}(Z; Q; h) = \sum_{P \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})} h(P) \Theta\left[\frac{1}{2} \text{tr}(P Q^t P Z)\right]$$

$$\mathcal{N}(Z; Q; H; h) = \sum_{\substack{P \in M_{n \times m}(\mathbb{Z}) \\ P \equiv H \pmod{N}}} h(P) \Theta\left[\frac{1}{2N^2} \text{tr}(P Q^t P Z)\right]$$

$$(\text{ただし } H \text{ は integral } n \times m \text{ 行列で } H \cdot Q \equiv 0 \pmod{N})$$

と定義すると、

定理 1', 2' (定理 1, 2 の言い換え)

$\mathcal{V}(Z; Q; h)$ は $\Gamma_0(N)$ に属し weight $k + \frac{m}{2}$, multiplier μ_0 の Siegel modular 型式,

$\mathcal{V}(Z; Q; H; h)$ は $\Gamma(N)$ に属し weight $k + \frac{m}{2}$, multiplier μ_H の Siegel modular 型式である。

$k > 0$ のときは cusp 型式になる。

(証明) 前半は O.K. 後半の cusp 型式になることを示す。

$\mathcal{V}(Z; Q; p; L; v)$ が $p(*) = \det(*)^k$, $k > 0$ のとき cusp 型式になることをいえばよい。Fourier 展開を使う。

$$\mathcal{V}(Z; Q; p; L; v) = \sum_{P \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})} \det(P \cdot Q^t L)^k e\left[\frac{1}{2} \text{tr}(P Q^t P Z)\right]$$

$\det(P \cdot Q^t P) = 0$ のとき, $\det(P \cdot Q^t L) = 0$ となることを示す。

$Q = S \cdot S^t$ と書く。S はある実行列。よって $\det(PS)^t(PS) = 0$ のとき $\det(PS)^t(LS) = 0$ を示せばよい。よって上の定理の証明は次の補題に帰着される。

補題 9. R を $n \times m$ 実数行列とし $\det(R \cdot^t R) = 0$ とする。このとき任意の複素行列 $L' \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$ に対して $\det(R \cdot^t L') = 0$ 。

(補題の証明) $\det(R \cdot^t R) = \sum (R \text{ の } n\text{-次の小行列式})^2 = 0$

よって R の任意の $\underbrace{\text{小行列式}}_{(n\text{-次の})} = 0$ 。一方 $\det(R \cdot^t L') = \sum (R \text{ の } n\text{-次の小行列式}) \times (L' \text{ の } n\text{-次の小行列式}) = 0$ 。 (q.e.d.)

$\mathcal{V}(Z; Q; H; h)$ についても同様。《定理 1, 2' の証明終り》

注意 上の定理の形ではまだ不十分である。完全な形はまた別の機会に。

§6. 例 “量指標” 上のテータ函数の類似物.

Q を 2×2 とする。つまり $Q = \begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ とする。

V として $n \times n$ 対称行列の空間をとる。表現 ρ は

$$X \in GL(n, \mathbb{C}) \longmapsto X \cdot V \cdot {}^t X$$

で与えられているとする。

このとき $\rho(Z: Q: \rho; L: v)$ を計算する。

$$D = \det Q = 4ac - b^2 > 0 \text{ とおく。}$$

$$ax^2 + bxy + cy^2 = \frac{1}{2} (x, y) Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a} (ax + \frac{b+\sqrt{-D}}{2}y)(ax + \frac{b-\sqrt{-D}}{2}y)$$

$$N \in M_{n \times 2}(\mathbb{Z}), \quad N = (n_{ij}) \quad (1 \leq i \leq n, \quad j=1, 2) \text{ とおく。}$$

$$\text{いま } v_k = an_{k,1} + \frac{b+\sqrt{-D}}{2}n_{k,2} \quad (1 \leq k \leq n) \text{ とおく。}$$

$$\sigma = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}\left(\frac{b+\sqrt{-D}}{2}\right) \text{ とおく。}$$

$$\frac{1}{2} \text{tr}(NQ^tNZ) = \frac{1}{a} \left(\sum_{i,j} v_i \bar{v}_j z_{ij} \right), \quad \text{ただし } Z = {}^t Z = (z_{ij}) \in \mathbb{S}_n$$

— は複素共役を意味する。

$$L \in M_{n \times 2}(\mathbb{C}), \quad L = (l_{ij}) \quad (1 \leq i \leq n, \quad j=1, 2) \text{ とおく}$$

$$\lambda_k = al_{k,1} + \frac{b+\sqrt{-D}}{2}l_{k,2}, \quad \lambda'_k = al_{k,1} + \frac{b-\sqrt{-D}}{2}l_{k,2} \quad (1 \leq k \leq n)$$

とおくとき、条件 $LQ^tL=0$ は、任意 k, l に対して

$$\lambda_k \lambda'_l + \lambda_l \lambda'_k = 0$$

ということと同値。これは $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, または $\lambda'_1 = \lambda'_2$

$= \lambda'_3 = \dots = \lambda'_n = 0$, ということと同値である。

以下, $\lambda'_1 = \lambda'_2 = \lambda'_3 = \dots = \lambda'_n = 0$ を仮定する。これより

$$NQ^tL = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

$$\begin{aligned} & \text{よって } (N Q^t L) v^t (N Q^t L) \\ &= \frac{1}{q^2} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) v^t (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \times \begin{pmatrix} \overline{v_1}^2 & \overline{v_1} \overline{v_2} & \overline{v_1} \overline{v_3} & \dots & \overline{v_1} \overline{v_n} \\ \overline{v_2} \overline{v_1} & \overline{v_2}^2 & \overline{v_2} \overline{v_3} & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \overline{v_n} \overline{v_1} & & & & \overline{v_n}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{よって } (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) v \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \neq 0 \text{ とする。}$$

$\vartheta(Z; Q; L; v)$ は定数倍を除いて

$$\vartheta_2(Z; Q) = \sum_{(v_1, v_2, \dots, v_n) \in \sigma^n} \begin{pmatrix} \overline{v_1}^2 & \overline{v_1} \overline{v_2} & \dots & \overline{v_1} \overline{v_n} \\ \overline{v_2} \overline{v_1} & \overline{v_2}^2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \overline{v_n} \overline{v_1} & & & \overline{v_n}^2 \end{pmatrix} \in \left[\frac{1}{q} \left(\sum_{i,j=1}^n v_i \overline{v_j} z_{ij} \right) \right]$$

と一致している。

命題 10 $\det \vartheta_2(Z; Q)$ は重さが $n+2$, multiplier が $\mu^n(\sigma)$ の

cusp form で $\Gamma_0(N)$ に属する。

(証明) 容易であるから省略する。

$n=2$ でしかも $-D$ が $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ の判別式と一致するとき、つまり σ の order が全整数環のとき、 $\det \vartheta_2(Z; Q)$ を Fourier 展開

$$\text{して } \det \vartheta_2(Z; Q) = \sum_{\substack{S \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}) \\ S \text{ is even}}} a(S) \in \left[\frac{1}{2} \text{tr} S Z \right]$$

ととするとき $\left(\frac{-D}{\det S} \right) = -1$ (平方剰余の記号) のとき $a(S) = 0$ がいえる。

$$\textcircled{\ast} \text{例} ; Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, n=2 \text{ とする。 } \vartheta_2(Z; Q) = 0$$

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, n=2 \text{ とする。 } \vartheta_2(Z; Q) \neq 0, \det \vartheta_2(Z; Q) \neq 0.$$

実はこのとき $\det \vartheta_2(Z; Q)$ を Fourier 展開すると

$$\frac{1}{4} \det \vartheta_2(Z; Q) = \in [Z_{11} + Z_{22}] + \dots \neq 0.$$

注) §6 の結果はもっと一般化できるが、このことについては別の機会に。

§ 7 定理 2 の後半の証明

$$\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{Z}), \quad Z \in \mathbb{C}_n, \quad Z^\# = (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \text{ とする}$$

とき,

$$\mathcal{I}(Z^\#; Q, H; p, L, v) = \det(CZ+D)^{-\frac{m}{2}} p(CZ+D) \sum_{H' \pmod{N}} \mu(\sigma, H, H') \mathcal{I}(Z; Q, H; p, L, v)$$

(ここで H, H' は $n \times m$ 整数行列で $HQ \equiv H'Q \equiv 0 \pmod{N}$)

右辺 $\sum_{H'} \mu(\sigma, H, H')$ は H' は $\pmod{N}$ での類の代表を動く, $\mu(\sigma, H, H')$ は σ と H' と Q のみに依る定数で, p, L, v は H に依らない。

証明に入るまえに $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$ のときに試みにやってみる。

まず二次形式のテータ級数の変換公式

$$\sum_{P \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})} e\left[-\frac{1}{2} \text{tr}(P+M)Q^t(P+M)Z^{-1}\right] = \frac{(-i)^n \det Z^{\frac{m}{2}}}{\det Q^{\frac{n}{2}}} \sum_{P \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})} e\left[\frac{1}{2} \text{tr}(PQ^{-1}PZ) + \text{tr}(P^t M)\right]$$

から出発する。(ただしここで $M \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ である)

上式の証明は Poisson の和公式を用いる。

右辺の和を変形する。 $P = \frac{1}{N} H_i Q + R$ $\underbrace{Q}_{(i=1, \dots, k)}$ という表示を P に対して考える。ただしここで $H_i \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})$, $R \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})$ で, $H_i Q \equiv 0 \pmod{N}$ (N は Q の level) しかも $H_i \not\equiv H_j \pmod{N}$ (if $i \neq j$) で $\{H_i\}$ ($i=1, 2, \dots, k$) は $\pmod{N}$ での代表系とする。このとき右辺の和は

変形されて

$$\sum_{H_i} \sum_{R \equiv H_i \pmod{N}} e\left[\frac{1}{2} \frac{1}{N^2} \text{tr}(RQ^t RZ) + \frac{1}{N} \text{tr}(RQ^t M)\right]$$

と書ける。ここで § 4 でやったように differential operators $\mathcal{L}_j$ を

両辺に適用して, そのうち $M = \frac{1}{N} H$ ($H \in M_{n \times m}(\mathbb{Z}), H \cdot Q \equiv 0 \pmod{N}$), と置く。これより

$$\begin{aligned} & \sum_{P \in H(\bmod N)} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{1}{N^2} \text{tr}(PQ^t PZ^{-1})\right] \rho(PQ^t) v \\ &= \frac{(-i)^n \det Z \left\{ \frac{m}{2} \right\}}{|\det Q|^{\frac{n}{2}}} \cdot \rho(-NE_n)^{-1} \cdot \sum_{H_i} \sum_{P \equiv H_i(\bmod N)} \exp\left[\frac{1}{2} \frac{1}{N^2} \text{tr}(PQ^t PZ) + \frac{1}{N^2} \text{tr}(PQ^t H)\right] \\ & \quad \times \rho(PQ^t) v \\ &= \frac{(-i)^n \det Z \left\{ \frac{m}{2} \right\}}{|\det Q|^{\frac{n}{2}}} \cdot \rho(-NE_n)^{-1} \cdot \sum_{H_i} \exp\left[\frac{1}{N^2} \text{tr}(H_i Q^t H_i)\right] \cdot \sum_{P \equiv H_i(\bmod N)} \exp\left[\frac{1}{2N^2} \text{tr}(PQ^t PZ)\right] \\ & \quad \times \rho(PQ^t) v \end{aligned}$$

$\rho(-NE_n)^{-1}$ は scalar である。定理 2 の後半を証明するために Igusa [2] にある次の補題を用いる。

補題 11. $Sp(n, \mathbb{Z})$ は $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ なる形の元で生成される。

よってある $\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$: $C \equiv 0$ のときを差えればよい。

$Z^\# = (AZ + B)D^{-1} = AZ^t A + B^t A$. $A \in GL_n(\mathbb{Z})$, $B^t A$ は対称行列である。

これより

$$\sum_{P \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})} \exp\left[\frac{1}{2} \text{tr}\{(P+M)Q^t(P+M)Z^\#\}\right] = \sum_{P \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})} \exp\left[\frac{1}{2} \text{tr}\{(P+AM)Q^t(P+AM)Z\}\right]$$

$$+ \frac{1}{2} \text{tr} \{ (P + \tilde{A}M) Q (\tilde{P} + \tilde{A}M) A^{-1} B \}$$

§4の方法を適用して

$$\sum_{\substack{P \in H(\text{mod } N) \\ HQ \equiv 0(\text{mod } N)}} \Theta \left[\frac{1}{2} \text{tr} (PQ \tilde{P} Z^\#) \right] f(PQ^t L)$$

$$= \Theta \left[\frac{1}{2N^2} \text{tr} (HQ \tilde{H} B \tilde{A}) \right] \cdot f(\tilde{A}^{-1}) \cdot \sum_{P \in \tilde{A}H(\text{mod } N)} \Theta \left[\frac{1}{2} \text{tr} (PQ^t P Z) \right] \times$$

$$\times f(PQ^t L)$$

が導かれる。これで定理2の後半も証明された。

§8. $\mu(\sigma)^2 = 1$ の証明.

$\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \text{Sp}(n, \mathbb{Z})$ $C \equiv 0 \pmod{N}$ とする。 $\det C \neq 0$ のとき Krazer [] などの方法で $\mu(\sigma)$ は Gauss の型として表わされる。 $\mu(\sigma)$ は二次形式 Q の σ に依り ρ, L, v に依るなから $\mu(\sigma)$ を決定するためには, ρ が trivial 表現のときに制限してもよい。

$Z \in \mathbb{G}_n$, $Z^\# = \sigma(Z) = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$ とする。 $Q^* = N \cdot Q^{-1}$ とする。ただし N は Q の level。 Q^* も偶で整数行列である。 μ の二次形式 $\wedge$ の dependency をはらきより表示するために $\mu = \mu_Q$ と書く。 μ_Q と μ_{Q^*} との関係をまず調べる。定義より

$$\mathcal{N}(Z^\#; Q) = \mu_Q(\sigma)^{-1} \det(Z + D)^{\frac{m}{2}} \mathcal{V}(Z; Q) \dots \dots \dots (\pi)$$

$$\text{ここで } \mathcal{V}(Z; Q) = \sum_{P \in M_{n \times m}} \Theta \left[\frac{1}{2} \text{tr} (PQ^t P Z) \right] \text{ であらう。}$$

さて二次形式のレータの変換公式

$$\sum_{P \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})} \Theta \left[\frac{1}{2} \text{tr} (PQ^t P Z) \right] = (\det Q)^{-\frac{n}{2}} \det(-iZ)^{-\frac{m}{2}} \sum_{P \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})} \Theta \left[\frac{1}{2} \text{tr} (PQ^t P (-Z)) \right]$$

$$\begin{aligned} \text{より} \quad \nu(Z; Q) &= |\det Q|^{-\frac{n}{2}} \det(-iZ)^{-\frac{m}{2}} \nu(-(NZ)^{-1}, Q^*) \\ \text{同様に} \quad \nu(Z^\#; Q) &= |\det Q|^{-\frac{n}{2}} \det(-iZ^\#)^{-\frac{m}{2}} \nu(-(NZ^\#)^{-1}, Q^*) \end{aligned}$$

この二式を上式の(7)に代入して

$$\begin{aligned} \nu(-(NZ^\#)^{-1}, Q^*) &= \mu_Q(\sigma) \det(CZ+D)^{\frac{m}{2}} \det(-iZ)^{-\frac{m}{2}} \det(-iZ^\#)^{-\frac{m}{2}} \times \\ &\quad \times \nu(-(NZ)^{-1}, Q^*) \\ &= \mu_Q(\sigma) \det((CZ+D)Z^{-1}Z^\#)^{\frac{m}{2}} \nu(-(NZ)^{-1}, Q^*) \\ &= \mu_Q(\sigma) \det(A+BZ^{-1})^{\frac{m}{2}} \nu(-(NZ)^{-1}, Q^*) \end{aligned}$$

ここで $-(NZ)^{-1} = Z_1$, $-(NZ^\#)^{-1} = Z_1^\#$ とおいて, 上式を書きなおす。

$$\begin{aligned} \nu(Z_1^\#; Q^*) &= \mu_Q(\sigma) \left\{ \det((-NB)Z_1 + A) \right\}^{\frac{m}{2}} \nu(Z_1; Q^*) \\ Z_1^\# &= -(NZ^\#)^{-1} = \dots = (DZ_1 - N^1C)(-NBZ_1 + A)^{-1} \\ \sigma^* &= \begin{pmatrix} D & -\frac{1}{N}C \\ -NB & A \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \text{ とおく。} \end{aligned}$$

補題 12. 上式より $\mu_Q(\sigma) = \mu_{Q^*}(\sigma^*)$

補題 13. $\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ i.e. $C=0$ のとき, $\mu_Q(\sigma) = \det(D)^{\frac{m}{2}} = \pm 1$.
(証明) $Z^\# = (AZ+B)^{-1}A$. 直接に計算して容易にわかる。

補題 14. $\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ $\det C \neq 0$ とせよ. このとき

$$\mu_Q(\sigma) = (\det Q)^{\frac{m}{2}} |\det C|^{-\frac{m}{2}} \sum_{R \pmod{C, Q^{-1}}} e\left[-\frac{1}{2} \text{tr}\{RQ^t R(C^1D)\}\right]$$

ただし ここで R は integral $n \times m$ matrix. $R \equiv R' \pmod{C, Q^{-1}}$ とは $C^1(R-R')Q$ が integral matrix のときをいうことにする。 Σ は $(\text{mod. } C, Q^{-1})$ での代表系を重く。

補題 14 と 補題 12 より $\det B \neq 0$ をとく,

$$\mu_Q(\sigma) = \mu_{Q^*}(\sigma^*) = (\det Q^*)^{\frac{m}{2}} |\det(-NB)|^{-\frac{m}{2}} \sum_{R \pmod{-NB^*, Q^{*-1}}} \oplus [-\frac{1}{2}t \{RQ^*R(-NB^*)A\}]$$

Siegel [2] の Gauss の 90 の相互律より

$$\text{右辺} = |\det A|^{-\frac{m}{2}} \sum_{R \pmod{A, E_m}} \oplus [\frac{1}{2}t \{RQ^*R(A^*, B)\}]$$

結局 $\det B \neq 0$ をとく.

$$\mu(\sigma) = |\det A|^{-\frac{m}{2}} \sum_{R \pmod{A, E_m}} \oplus [\frac{1}{2}t \{RQ^*R(A^*, B)\}]$$

よって $\mu(\sigma)$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ に 1 の $\det A$ 乗根を付け加えた体
に含まれる。

$$\Phi(B, A) = \sum_{R \pmod{A, E_m}} \oplus [\frac{1}{2}t \{RQ^*R(A^*, B)\}] \in \mathbb{C}.$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}.$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \sigma_2 \sigma \sigma_1 = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_2 A A_1 + B_2 C A_1 & A_2 A B_1 + B_2 (C B_1 + A_2 B D_1 + B_2 D D_1) \\ D_2 C A_1^* & D_2 C B_1 + D_2 D D_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mu(\tilde{\sigma}) = \mu(\sigma_2 \sigma \sigma_1) = \mu(\sigma_2) \mu(\sigma) \mu(\sigma_1) = (\det A_2)^{\frac{m}{2}} (\det A_1)^{\frac{m}{2}} \mu(\sigma)$$

$$\begin{cases} \tilde{A} = (A_2 A + B_2 C) A \\ \tilde{B} = A_2 B D + B_2 D D_1 + A_2 A B_1 + B_2 C B_1 \end{cases}$$

$$\therefore \Phi(\tilde{B}, \tilde{A}) = \text{有理数} \times \Phi(B, A)$$

左辺は $\mathbb{Q}$ に 1 の $\det \tilde{A} = \det A_1 \det A_2 \det(A + A_1^* B_2 C)$ 乗根を付け
加えた体に, 右辺は $\det A$ 乗根を付け加えた体に含まれる。
($\mathbb{Q}$ に 1 の)

$\Phi(B, A)$ が有理数であることを示す。

そうでないとする。上の等式よりある素数 p があて

A_1, A_2, B_2 を動かしても $\det \tilde{A} \equiv 0 \pmod{p}$ が成立しなくてはならない。(さもないと $\Phi(\tilde{B}, \tilde{A}) = \text{有理数} \times \Phi(B, A)$ の両辺は有理数体に属する)。特に $\det A \equiv 0 \pmod{p}$ 。 A の $\text{mod } p$ での階数 $r < n$ とする。 A_1, A_2 を適当にとれば

$$A_2 A A_1 \equiv \left(\begin{array}{c|c} A_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \pmod{p}. \quad \left(\begin{array}{l} \det A_r \not\equiv 0 \pmod{p} \\ A_r \text{ は } r \times r \text{ 行列} \end{array} \right)$$

と A_2, A_1 を選ぶことができる。 $A_2 A A_1$ を新しく A と書く。

$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \text{Sp}(n, \mathbb{Z})$ より $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$ は coprime pair である。 pair ということより ${}^t C A = {}^t A C$, 特に ${}^t C A \equiv {}^t A C \pmod{p}$ 。

$$C \equiv \left(\begin{array}{c|c} C_1 & C_2 \\ \hline C_3 & C_4 \end{array} \right) \pmod{p}. \quad \begin{array}{l} C_1, r \times r \text{ 行列} \quad C_2 \ r \times (n-r), \quad C_3 \ (n-r) \times r \\ C_4 \ (n-r) \times (n-r) \text{ 行列と} \end{array}$$

${}^t C A \equiv {}^t A C \pmod{p}$ より $C_2 \equiv 0 \pmod{p}$ 。 $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$ は coprime

$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$ は $\text{mod } p$ で rank n である。 $\therefore \det A_r \cdot \det C_4 \not\equiv 0 \pmod{p}$

いま $\begin{pmatrix} E_n & S \\ 0 & F_n \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ で $S \equiv \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & E_{n-r} \end{array} \right) \pmod{p}$ なるものを取ってくる。 $\sigma_2 = \begin{pmatrix} E_n & S \\ 0 & F_n \end{pmatrix}$ $\sigma_1 = E_{2n}$ とすると $\tilde{A} = A + SC$ 。

$$\det \tilde{A} \equiv \det(A + SC) \equiv \det A_r \cdot \det C_4 \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

$\therefore$ 背理法によつて証明は完了した。

$\Phi(B, A)$ は有理数, $\therefore \mu(\sigma)$ も有理数, しかし $\mu(\sigma)$ は絶対値 1 である。 $\therefore \mu(\sigma) = \pm 1$ 。 $\Gamma_0(N)$ は $\det B \neq 0$ なる元で生成されるから一般の σ に対しても $\mu(\sigma) = \pm 1$ 。

§ 9 $\mu(\sigma)$ の決定.

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_1^{-1} \end{pmatrix} \sigma \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix} \text{ とする.}$$

$$\tilde{A} = A_2 A A_1, \quad \tilde{B} = A_2 B A_1^{-1}, \quad \det \tilde{A} = \pm \det A, \quad \det \tilde{B} = \pm \det B.$$

$$\mu(\tilde{\sigma}) = (\det A_1 \cdot \det A_2)^{\frac{m}{2}} \mu(\sigma)$$

単因子論を用いて

$$\tilde{A} = A_2 A A_1 = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix} \quad (d_i > 0)$$

としてよい。さらに $\det A$ と $\det B$ が互いに素と仮定する。

これより Gauss の法を計算して $\mu(\sigma)$ を平方剰余の記号で与えることができる。結果は $\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ とするとき, $\det A > 0$

のとき, $\mu(\sigma) = \left(\frac{(-1)^{\frac{m}{2}} \det Q}{\det A} \right)$ ($(-)$ は平方剰余記号), $\det A < 0$ のときは,

$$\mu(\sigma) = (-1)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{(-1)^{\frac{m}{2}} \det Q}{-\det A} \right) \text{ である.}$$

$\mu_H(\sigma)$ も同様にして $= 1$ であることがわかる。詳しい証明は省略。

§ 10. 一般化。

上述の方法は Hermitian modular の場合や, その他の場合にも同様な形で適用できる。

文献

- Hecke [1] Analytische Arithmetik der positiven Quadratischen Formen (全集の後から
二番目の論文)
- Schoeneberg [1] Das Verhalten von mehrfachen Theta-Reihen bei Modulsubstitutionen
Math. Ann. 116 (1939)
- Igusa [1] Theta functions (Springer Verlag (1972))
- [2] On the graded ring of theta-constants I, II (Amer. J. of Math.
86 (1964), 88 (1966))
- Krazer [1] Lehrbuch der Thetafunktionen
- Siegel [1] Moduln Abelscher Funktionen (全集, 第三卷 p373-)
- [2] Über das quadratische Reziprozitätsgesetz in... (全集第三卷 p337)
- Maass [1] Zur Theorie der harmonischen Formen; Math. Annalen. Bd 137 (1959)