

$F_{0,n} \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ に付随する リー環の微分と $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の像

(京大・数理研) 伊原 康隆

ある種の(簡単な) 代数多様体 $Y/\mathbb{C}$ の基本群 $\pi_1 = \pi_1(Y(\mathbb{C}), *)$ の中心降下列から定まる $\mathbb{Q}$ 上のリー環 $\text{Lie } \pi_1$ の(ある条件を満す)外部微分全体をつくる $\mathbb{Q}$ 上のリー環 $\mathcal{D}_Y = \text{Der}(\text{Lie } \pi_1)$ を考え、 $\mathcal{D}_Y$ は(群 π_1 は外部自己同型をほとんど持たないにも拘らず) 大きな環になり、そんな大きなことの証明は各 $\mathcal{D}_Y \otimes \mathbb{Q}_\ell$ ($\mathbb{Q}_\ell: \ell$ 進体) がガロア群 $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の大きな像を含むことから(今のところ) はじめてわかる。その幾何的理由は何か? 又 考える Y は次元の増大する系列 Y_n ($n \geq 4$) になっており、 $n \rightarrow \infty$ とすると $\mathcal{D}_{Y_n}$ の方はどんどん小さくなってゆく——その共通部分 $\mathcal{D}_\infty = \mathcal{D}_{Y_n}$ はどういう構造を持つか? 又 $\mathcal{D}_\infty \otimes \mathbb{Q}_\ell$ と Galois 像との関係は? こういった問題提起と、関連する二、三の結果についてお話しします。 $\mathcal{D}_{Y_n}$ が真に減少することを示す計算 (§2) は寺田 至氏(東大・理) によるものです。又 このように一つの Y でなく system Y_n 等を考える事は A. Grothendieck, P. Deligne に刺激されたのが動機です。

§1 一般に位相空間 X に対して通常のように

$$F_{0,n} X = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n \mid x_i \neq x_j \text{ if } i \neq j\}$$

($n \geq 1$) とおき, 複素射影直線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に対して

$$Y_n = F_{0,n}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) / \text{PGL}_2(\mathbb{C})$$

$$= F_{0,n-3}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}) \quad (n \geq 4)$$

を考える。従って $Y_4 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}$, $Y_5 = Y_4 \times Y_4 - \Delta$, etc.

この位相的基本群は $n \geq 5$ では殆んど外部自己同型をもたない (Ivanov) が, 基本群のリ-環は沢山の外部微分 (outer derivations) を持つ。この説明からはいじめた。

$$P_n = \pi_1(Y_n, b), \quad b = (b_1, \dots, b_n)$$

は $\{n\text{-次の球面純組み系群} \} / (\cong C_2)$ で, b_i と b_j の (正の) 単純からまりの与える元 x_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$; $x_{ij} = x_{ji}$, $x_{ii} = 1$) で生成される。さて $\{P_n(m)\}_{m \geq 1}$ を $P_n = P_n(1)$ の中心降下列とし, $\mathbb{Q}$ 上の次数つきリ-環

$$P_n = \bigoplus_{m \geq 1} \text{gr}^m P_n; \quad \text{gr}^m P_n = \left(P_n(m) / P_n(m+1) \right) \otimes \mathbb{Q}$$

を考えると, それは x_{ij} で代表する $\text{gr}^1 P_n$ の元 X_{ij} たちで生成され, リ-環としての基本関係式は

$$\begin{aligned} X_{ii} &= 0, \quad X_{ij} = X_{ji}, & \sum_{j=1}^n X_{ij} &= 0 \quad (1 \leq i \leq n), \\ [X_{ij}, X_{kl}] &= 0 & \text{if } \{i, j\} \cap \{k, l\} &= \emptyset \end{aligned}$$

で与えられる (cf. [1]; also [2]).

又定義の対称性から P_n には n 次対称群 S_n が

$X_{ij} \rightarrow X_{\sigma(i), \sigma(j)}$ ($\sigma \in S_n$) によって作用する。

(例としては S_n の $gr^1 P_n$ への作用は既約でヤング図形

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad n-2, \quad gr^2 P_n \text{ も既約 } \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad n-3, \quad gr^3 P_n \text{ は 3 つの}$$

既約成分の和であることがわかる。なお $n=4$ は特殊でこのとき

P_4 は $X_{12} = X_{34}, X_{13} = X_{24}$ で生成される自由 $\mathbb{Q}$ -環となり、 S_4 はその商 $S_3 = S_4/V_4$ を通じて作用する。

さて [3][2] により、群 P_n の自己同型写像で各 i, j に対して共役類 $Conj(X_{ij})$ を変えないものは内部自己同型に限らなることがわかっているが、対応する P_n の derivation の方はそうではない。

P_n の m 次 special derivation とは P_n の微分

$$D: P_n \rightarrow P_n$$

で、しかも各 i, j に対してある $T_{ij} \in gr^m P_n$ が存在して

$$D(X_{ij}) = [T_{ij}, X_{ij}]$$

と表わせるものの事とする。このとき、各 $\sigma \in S_n$ に対して $D^\sigma = \sigma^! D \sigma$ も m 次 special derivation になる。そこで

$$gr^m D(P_n) = \left\{ \begin{array}{l} m\text{-次 } S_n\text{-invariant} \\ \text{special derivations of } P_n \end{array} \right\} \setminus \left\{ \begin{array}{l} m\text{-次 } S_n\text{-invariant} \\ \text{inner derivations} \\ \text{of } P_n \end{array} \right\}$$

(有限 $\mathbb{Q}$ -加群),

$$\mathcal{D}(P_n) = \bigoplus_{m \geq 1} \text{gr}^m \mathcal{D}(P_n)$$

とみると, $\mathcal{D}(P_n)$ は自然に $\mathbb{Q}$ 上の次数つき リー環 になる.

例えば $\text{gr}^1 \mathcal{D}(P_n) = \text{gr}^2 \mathcal{D}(P_n) = 0$. 又 $\text{gr}^3 \mathcal{D}(P_n)$ は 1次元
で

$$T_{ij} = \sum_{k=1}^n [X_{ik} [X_{kj}, X_{ik}]] \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

で定まる special derivations で生成される. 一般に m : 奇数 ≥ 3
なら 後に 能う なるように, $\text{gr}^m \mathcal{D}(P_n) \neq (0)$ となる ($\text{gr}^m \mathcal{D}(P_n) \otimes \mathbb{Q}_\ell$
が Soule' 等による cyclotomic element を含むことがわかるから).

(1b) $\mathcal{D}(P_n)$ の 構造 は?

又 その (生成) 元の 幾何学的, 代数的 構造 は 出来な-か?

さて n を 一つ 落す 準同型 $P_n \rightarrow P_{n-1}$ が

$X_{in} \rightarrow 0 \ (1 \leq i \leq n)$ によって 定まり, $\mathcal{D}$ は 次数を 保つ 準同型

$$(2-1) \quad \mathcal{D}(P_n) \rightarrow \mathcal{D}(P_{n-1}) \quad (n \geq 5)$$

を 誘導する.

定理 1 [2] $(2-1)$ は 単射.

証明は やや デリケートである. n によって,

$$(2-2) \quad \cdots \subseteq \mathcal{D}(P_n) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{D}(P_5) \subseteq \mathcal{D}(P_4)$$

$$(2-3) \quad \cdots \subseteq \mathrm{gr}^m \mathcal{D}(p_n) \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{gr}^m \mathcal{D}(p_5) \subseteq \mathrm{gr}^m \mathcal{D}(p_4)$$

$(m \geq 1)$ と見なせる。これがどこで stable になるかについては:

定理 2 各 $m \geq 1$ に対して, $n \geq m+7$ なら

$$\mathrm{gr}^m \mathcal{D}(p_{n+1}) = \mathrm{gr}^m \mathcal{D}(p_n).$$

証明は S_n の表現論の演習問題。上界 $m+7$ は改善の余地がある。

真に減少する数については、後の表でわかるように、 $m=7$ が調べる必要のある最小の m なのだ、これにて、

$$\dim \mathrm{gr}^7 \mathcal{D}(p_5) = 1 < 2 = \dim \mathrm{gr}^7 \mathcal{D}(p_4)$$

であることが 寺田 至 氏の計算によって確認された。

{2} (2-2), (2-3) の共通部分 $\mathcal{D}_\infty$, $\mathrm{gr}^m \mathcal{D}_\infty$ と書くと, $\mathcal{D}_\infty = \bigoplus_{m \geq 1} \mathrm{gr}^m \mathcal{D}_\infty$ であり、各 $m \geq 1$ に対して $\mathcal{D}_\infty \otimes \mathcal{Q}_\ell$ は $G_{\mathbb{A}}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の $\pi_1^{\mathrm{po}-\ell}(Y_n)$ への作用から生ずる像 $\mathcal{Q}_\ell = \bigoplus_{m \geq 1} \mathrm{gr}^m \mathcal{Q}_\ell$ を含む ([4] 参照)。

$$\mathcal{Q}_\ell \subseteq \mathcal{D}_\infty \otimes \mathcal{Q}_\ell.$$

$\mathcal{O}_e$ については, C. Soule [5] により $\dim(\mathrm{gr}^m \mathcal{O}_e) \geq 1$ ($m \geq 3, \text{odd}$) ([4][6])
 又 [4] に於て $[\mathrm{gr}^m \mathcal{O}_e, \mathrm{gr}^{m'} \mathcal{O}_e] \neq 0$ ($m, m': \text{odd} \geq 3, m \neq m'$), 等
 が示されているので, 知らんより $\mathrm{gr}^m \mathcal{D}_\infty$ の次元の 一つの下界が
 与えられる. わかっている部分を表にすると([]):

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\dim \mathrm{gr}^m \mathcal{D}(p_4)$	0	1	0	1, 0	2, 1	4, 1	4, 2	9	7		
VII $\dim \mathrm{gr}^m \mathcal{D}_\infty$											
VII $\dim \mathrm{gr}^m \mathcal{O}_e$	0	1	0	1, 0	1, 1	$\geq 1, 1$	$\geq 2, \geq 1$				

これによって $\dim \mathrm{gr}^m \mathcal{D}_\infty$ が $m \leq 6, m=8$ では確定し,
 $m=7$ では 寺田 氏の計算によって $\dim \mathrm{gr}^7 \mathcal{D}(p_5)=1$, 従って
 $\dim \mathrm{gr}^7 \mathcal{D}_\infty=1$ がわかった. $m \geq 9$ についてはまだ $\mathrm{gr}^m \mathcal{D}_\infty$
 はわかっていない. 従って次の向を「予想」とする根拠は未だ十分
 とは云えないが, 正しいかはステキと思われる.

問 $\mathcal{O}_e = \mathcal{D}_\infty \otimes \mathcal{O}_e$?

[参考文献]

- [1] T. Kohno, On the holonomy Lie algebra and the nilpotent completion of the fundamental group of the complement of hypersurfaces, Nagoya J. Math 92 (1983), 21-37
- [2] Y. Ihara, Automorphisms of pure sphere braid groups and Galois representations, to appear in Grothendieck Festschrift, Birkhäuser
- [3] N.V. Ivanov, Algebraic properties of mapping class groups of surfaces, "Geometric and Algebraic Topology" 18 (1986), 15-35, Banach Center Publ.
- [4] Y. Ihara, The Galois representation arising from $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ and Tate twists of even degree, in "Galois groups over $\mathbb{Q}$ ", MSRI Publications 16 (1987), 299-314, Springer.
- [5] C. Soulé, On higher p-adic regulators, SLN 854 (1981), 372-401
- [6] H. Ichimura-K. Sakaguchi, The non-vanishing of a certain Kummer character χ_m (after C. Soulé) and some related topics, Adv. Studies in Pure Math 12 (1987), 53-64.

- [7] Y. Ihara, Some problems on three point ramifications and associated large Galois representations, *ibid*, 173-188.