

The Herglotz-Petrovskii-Leray formula in boundary value problems

阪大理 由良 浩一 (Koichi Yura)

本稿では、定数係数双曲型境界値問題における Herglotz-Petrovskii-Leray の公式を与える。

1 定数係数双曲型境界値問題の前進基本解

$\mathbf{R}_+^n$ で半空間 $\{x \in \mathbf{R}^n; x_n > 0\}$ をあらわし, $x = (x_1, \dots, x_n)$ に対して, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ などとして次のような定数係数双曲型境界値問題を考える。

$$\begin{cases} P(D)F_{k_0}(x) = 0, & x \in \mathbf{R}_+^n, \\ B_j(D)F_{k_0}(x) \Big|_{x_n=0} = \delta_{jk_0}\delta(x'), & x' \in \mathbf{R}^{n-1}, 1 \leq j \leq \mu. \end{cases} \quad (1)$$

$k_0 \in \mathbf{N}$ は $1 \leq k_0 \leq \mu$ で固定する. $P(D)$, $B_j(D)$ はそれぞれ $m(\geq 2)$ 階, r_j 階の斉次微分作用素であり, $B_j(D)$ ($1 \leq j \leq \mu$) の個数 μ はあとで決められる. ここで次の仮定をおく.

(A-1). $P(\xi)$ は $\vartheta = (1, 0, \dots, 0)$ に関して狭義双曲型 (strictly hyperbolic) で, $\mathbf{C}$ で既約である.

(A-2). $\{x \in \mathbf{R}^n; x_n = 0\}$ は $P(\xi)$ に関して非特性的である. すなわち, $P(0, 1) \neq 0$.

(A-3). (1) は $\mathcal{E}$ 適切である. すなわち, Lopatinskiï 行列式 $R(\xi')$ は ϑ' に関して双曲型である.

$F_{k_0}(x)$ は, 境界 $\{x \in \mathbf{R}^n; x_n = 0\}$ 上に単位衝撃を与えたときの波動の伝播をあらわす. 以下, $F_{k_0}(x)$ を記述するための準備をする.

$\Gamma(P, \vartheta) = \mathbf{R}^n \setminus \{\xi \in \mathbf{R}^n; P(\xi) = 0\}$ の ϑ を含む連結成分の $\xi_n = 0$ での切り口 $\Gamma^0(P, \vartheta)$ を

$$\Gamma^0(P, \vartheta) = \{\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}; (\xi', 0) \in \Gamma(P, \vartheta)\}$$

で定義する.

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^m P_{m-j}(\xi') \xi_n^j$$

とあらわせば, $P_0(\xi') = P(0, 1)$ であるから, (A-2) より $P_0(\xi')$ は 0 でない定数である. また, $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} - i\Gamma^0(P, \vartheta)$ に対して, $P(\xi', \lambda) = 0$ は λ に関して実根をもちえないので, それらの根を

$$\lambda_1^+(\xi'), \dots, \lambda_\mu^+(\xi'), \lambda_1^-(\xi'), \dots, \lambda_{m-\mu}^-(\xi'),$$

$$\operatorname{Im} \lambda_k^\pm(\xi') \geq 0$$

とあらわすことができる. もちろん, μ は $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} - i\Gamma^0(P, \vartheta)$ なる限り一定である. この μ が (1) の境界条件の個数である.

これらを使って, (1) に対する Lopatinskiĭ 行列式 $R(\xi')$ を定義する. $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} - i\Gamma^0(P, \vartheta)$ に対して,

$$R(\xi') = \det L(\xi'),$$

$$L(\xi') = \left(\frac{1}{2\pi i} \oint B_j(\xi', \lambda) \lambda^{k-1} P_+(\xi', \lambda)^{-1} d\lambda \right)_{j,k=1, \dots, \mu}, \quad (2)$$

$$P_+(\xi', \lambda) = \prod_{j=1}^{\mu} (\lambda - \lambda_j^+(\xi'))$$

とおく. ただし, (2) の積分は複素 λ 平面において, $P_+(\xi', \lambda) = 0$ の根を全て囲むような単一閉曲線に沿うものである. これより, $P_+(\xi)$, $R(\xi')$ はそれぞれ

$$(\xi_n, \lambda_1^+(\xi'), \dots, \lambda_\mu^+(\xi')), \quad (\xi', \lambda_1^+(\xi'), \dots, \lambda_\mu^+(\xi'))$$

の多項式 (特に $(\lambda_1^+(\xi'), \dots, \lambda_\mu^+(\xi'))$ の対称式) で, μ 次, $\gamma = \sum_{j=1}^{\mu} r_j - \mu(\mu-1)/2$ 次斉次であることがわかる. このとき, 前進基本解 (forward fundamental solution) $F_{k^0}(x)$ ($1 \leq k^0 \leq \mu$) は

$$F_{k^0}(x) = (2\pi)^{-n} i^{-1} \sum_{j=1}^{\mu} \int_{\mathbf{R}^{n-i\vartheta}} e^{ix\xi} R_{jk^0}(\xi') \xi_n^{j-1} (R(\xi') P_+(\xi))^{-1} d\xi \quad (3)$$

であらわされる. ここで, $R_{jk^0}(\xi')$ は $L(\xi')$ の (k^0, j) 余因子 ($\gamma + \mu - r_{k^0} - j$ 次斉次) である. また, 前進基本解とは,

$$\text{supp } F_{k^0}(x) \subset \{x \in \mathbf{R}^n; x_{\vartheta} \geq 0\}$$

となる基本解である.

2 終結式と双曲錐 $\tilde{\Gamma}_{\xi'}(\mathcal{R}_{\text{real}})$

P と $\partial P / \partial \xi_n$ の ξ_n に関する終結式 (resultant) を $\mathcal{R}(\xi')$ によってあらわす. すなわち,

$$\mathcal{L}(\xi') = \begin{pmatrix} P_0(\xi') & P_1(\xi') & \dots & P_m(\xi') \\ & P_0(\xi') & \dots & P_m(\xi') \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & P_0(\xi') & \dots & P_m(\xi') \\ mP_0(\xi') & (m-1)P_1(\xi') & \dots & P_{m-1}(\xi') \\ & mP_0(\xi') & \dots & P_{m-1}(\xi') \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & mP_0(\xi') & \dots & P_{m-1}(\xi') \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{L}(\xi')$ は, 上半分が $(m-1)$ 行で下半分が m 行の $(2m-1) \times (2m-1)$ 行列である. また,

$$\begin{aligned} \text{Re } \mathcal{R}_{\text{real}} &= \{\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}; P(\xi', \lambda) = 0 \text{ が } \lambda \text{ に関して} \\ &\quad \text{少なくとも 1 つの実多重根をもつ}\} \end{aligned}$$

とし, $\xi' \in \text{Re } \mathcal{R}_{\text{real}}$ で, $P(\xi', \lambda) = 0$ が λ に関して実多重根を $r_{\xi'}$ 個もつとき, それらを $\lambda_k(\xi')$ ($1 \leq k \leq r_{\xi'}$) と書いて,

$$\tilde{\Gamma}_{\xi'}(\mathcal{R}_{\text{real}}) = \begin{cases} \mathbf{R}^{n-1} \setminus \{\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}; \prod_{k=1}^{r_{\xi'}} P_{(\xi', \lambda_k(\xi'))}(\zeta) = 0\} \\ \text{の } \vartheta' \text{ を含む連結成分} & (\xi' \in \text{Re } \mathcal{R}_{\text{real}}), \\ \mathbf{R}^{n-1} & (\xi' \notin \text{Re } \mathcal{R}_{\text{real}}) \end{cases}$$

で定義する. $\xi' \in \text{Re } \mathcal{R}_{\text{real}}$ で $P(\xi', \lambda) = 0$ の λ に関する根が虚の多重根をもたないならば, $\tilde{\Gamma}_{\xi'}(\mathcal{R}_{\text{real}})$ は $\mathcal{R}$ の $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$ での局所双曲錐に一致する. このことを以下で証明する.

行列 $\mathcal{L}(\xi')$ の第 $j_1, \dots, j_r$ 行, 第 $k_1, \dots, k_r$ 列を省いてできる $(2m - r - 1) \times (2m - r - 1)$ 行列の行列式に

$$(-1)^{\sum_{i=1}^r (j_i + k_i) + \sum_{i=1}^{r-1} [(j_i - j_{i+1} + |j_i - j_{i+1}|) / (2|j_i - j_{i+1}|)]}$$

を掛けたものを $\mathcal{R}_{\left(\begin{smallmatrix} j_1, \dots, j_r \\ k_1, \dots, k_r \end{smallmatrix}\right)}(\xi')$ であらわす. 次の補題 2.1, 2.2, 2.3 は行列式の簡単な性質から導かれる.

補題 2.1

$$\sum_{0 \leq k \leq m-1} \mathcal{R}_{\left(\begin{smallmatrix} m+k \\ m+k-l \end{smallmatrix}\right)}(\xi') = 0 \quad (0 \leq l \leq m-2),$$

$$\sum_{\substack{1 \leq j_i \leq m-1 \ (1 \leq i \leq r) \\ 0 \leq k \leq m-1 \\ s \neq t \Rightarrow j_s \neq j_t \\ k \neq j_i + l \ (1 \leq i \leq r)}} \mathcal{R}_{\left(\begin{smallmatrix} j_1, \dots, j_r, m+k \\ m+j_1, \dots, m+j_r, m+k-l \end{smallmatrix}\right)}(\xi') = 0$$

$$(1 \leq r \leq m-1, 0 \leq l \leq m-2).$$

□

補題 2.2 $P(\xi) = \frac{\partial P}{\partial \xi_n}(\xi) = 0$ なる $\xi \in \mathbf{C}^n$ に対して,

$$\sum_{0 \leq k \leq m-1} \mathcal{R}_{\left(\begin{smallmatrix} m+k \\ k+1 \end{smallmatrix}\right)}(\xi') = 0.$$

さらに, $P(\xi) = \frac{\partial P}{\partial \xi_n}(\xi) = \dots = \frac{\partial^{r+1} P}{\partial \xi_n^{r+1}}(\xi) = 0$ なる $\xi \in \mathbf{C}^n$ に対して,

$$\sum_{\substack{1 \leq j_i \leq m-1 \ (1 \leq i \leq r) \\ 0 \leq k \leq m-1 \\ s \neq t \Rightarrow j_s \neq j_t \\ k \neq m+j_i-1 \ (1 \leq i \leq r)}} \mathcal{R}_{\left(\begin{smallmatrix} j_1, \dots, j_r, m+k \\ m+j_1, \dots, m+j_r, k+1 \end{smallmatrix}\right)}(\xi') = 0 \quad (1 \leq r \leq m-1).$$

□

補題 2.3 $P(\xi) = \frac{\partial P}{\partial \xi_n}(\xi) = 0$ なる $\xi \in \mathbf{C}^n$ に対して,

$$\mathcal{R}_{(m+k-l)}^k(\xi') = \xi_n^l \mathcal{R}_{(m+k)}^k(\xi') \quad (1 \leq k \leq m-1, 1 \leq l \leq m).$$

さらに $m \geq 3$ のとき, $P(\xi) = \frac{\partial P}{\partial \xi_n}(\xi) = \cdots = \frac{\partial^{r+1} P}{\partial \xi_n^{r+1}}(\xi) = 0$ なる $\xi \in \mathbf{C}^n$ に対して,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq j_i \leq m-1 \ (1 \leq i \leq r) \\ 1 \leq k \leq m-1 \\ s \neq t \Rightarrow j_s \neq j_t \\ k \neq j_i, j_i+l \ (1 \leq i \leq r)}} \mathcal{R}_{(m+j_1, \dots, m+j_r, m+k-l)}^{j_1, \dots, j_r, k}(\xi') \\ = \xi_n^l \sum_{\substack{1 \leq j_i \leq m-1 \ (1 \leq i \leq r) \\ 1 \leq k \leq m-1 \\ s \neq t \Rightarrow j_s \neq j_t \\ k \neq j_i \ (1 \leq i \leq r)}} \mathcal{R}_{(m+j_1, \dots, m+j_r, m+k)}^{j_1, \dots, j_r, k}(\xi') \\ (1 \leq r \leq m-2, 1 \leq l \leq m). \end{aligned}$$

□

これらの補題を使えば次が示せる.

命題 2.4 $\xi' \in \text{Re } \mathcal{R}_{\text{real}}$ において $P(\xi', \lambda) = 0$ が λ に関して実多重根のみをもつとき, $\mathcal{R}$ の $\xi' \in \text{Re } \mathcal{R}_{\text{real}}$ での局所化は, ϑ' に関して双曲型である.

□

(証明) 簡単のため $P(\xi^{0'}, \xi_n) = 0$ が ξ_n に関して実多重根 λ_1 (重複度 l_1) を一つだけもつ場合を考える. このとき $\mathcal{R}$ は $\xi^{0'}$ で $(l_1 - 1)$ 次で消える. $\mathcal{R}$ の 1 回微分は補題 2.1, 2.2, 2.3 を使えば,

$$\begin{aligned} \partial_{\xi_s} \mathcal{R}(\xi^{0'}) &= \partial_{\xi_s} P_m(\xi^{0'}) \sum_{1 \leq k \leq m-1} \mathcal{R}_{(m+k)}^k(\xi^{0'}) \\ &+ \sum_{1 \leq j \leq m} [\partial_{\xi_s} P_{m-j}(\xi^{0'}) \{ \sum_{1 \leq k \leq m-1} \mathcal{R}_{(m+k-j)}^k(\xi^{0'}) \\ &\quad + j \sum_{0 \leq k \leq m-1} \mathcal{R}_{(m+k-j+1)}^{m+k}(\xi^{0'}) \}] \\ &= \{ \sum_{0 \leq j \leq m} \lambda_1^j \partial_{\xi_s} P_{m-j}(\xi^{0'}) \} \sum_{1 \leq k \leq m-1} \mathcal{R}_{(m+k)}^k(\xi^{0'}). \end{aligned}$$

$P(\xi)$ が狭義双曲型であることより,

$$\sum_{0 \leq j \leq m} \lambda_1^j \partial_{\xi_s} P_{m-j}(\xi^{0'}) \neq 0$$

なる $1 \leq s \leq m-1$ が少なくとも一つ存在する. ゆえに $l_1 - 1 \geq 2$ なら,

$$\sum_{1 \leq k \leq m-1} \mathcal{R} \binom{k}{m+k}(\xi^{0'}) = 0.$$

そこで $\sum_{1 \leq k \leq m-1} \mathcal{R} \binom{k}{m+k}$ の1回微分を考える. 補題2.1, 2.2, 2.3を使えば,

$$\begin{aligned} & \partial_{\xi_s} \sum_{1 \leq k \leq m-1} \mathcal{R} \binom{k}{m+k}(\xi^{0'}) \\ &= \partial_{\xi_s} P_m(\xi^{0'}) \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq m-1 \\ 1 \leq k \leq m-1, k \neq j_1}} \mathcal{R} \binom{j_1, k}{m+j_1, m+k}(\xi^{0'}) \\ &+ \sum_{1 \leq j \leq m} [\partial_{\xi_s} P_{m-j}(\xi^{0'}) \{ \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq m-1 \\ 1 \leq k \leq m-1 \\ k \neq j_1, j_1+j}} \mathcal{R} \binom{j_1, k}{m+j_1, m+k-j}(\xi^{0'}) \\ &+ j \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq m-1 \\ 0 \leq k \leq m-1 \\ k \neq j_1, j_1+j-1}} \mathcal{R} \binom{j_1, m+j_1}{m+k, m+k-j+1}(\xi^{0'}) \}] \\ &= \{ \sum_{0 \leq j \leq m} \lambda_1^j \partial_{\xi_s} P_{m-j}(\xi^{0'}) \} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq m-1 \\ 1 \leq k \leq m-1, k \neq j_1}} \mathcal{R} \binom{j_1, k}{m+j_1, m+k}(\xi^{0'}). \end{aligned}$$

したがって結局,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\xi^{0'}}(\zeta') &= \frac{1}{(l_1 - 1)!} \left\{ \sum_{s=1}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^m \lambda_1^j \partial_{\xi_s} P_{m-j}(\xi^{0'}) \right) \zeta_s \right\}^{l_1-1} \\ &\times \sum_{\substack{1 \leq j_i \leq m-1 \ (1 \leq i \leq l_1-1) \\ s \neq t \Rightarrow j_s \neq j_t}} \mathcal{R} \binom{j_1, \dots, j_{l_1-1}}{m+j_1, \dots, m+j_{l_1-1}}(\xi^{0'}). \end{aligned}$$

もし, $P(\xi^{0'}, \lambda) = 0$ が λ に関して実多重根を r 個もてば, それらを λ_k ($1 \leq k \leq r$), その重複度を l_k とすると, $\mathcal{R}$ は $\xi^{0'}$ で $L_{\xi^{0'}} = \sum_{k=1}^r (l_k - 1)$ 次で

消える。したがって,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\xi^{0'}}(\zeta') &= \sum_{|\alpha|=L_{\xi^{0'}}} \frac{1}{\alpha!} \zeta'^{\alpha} \partial_{\xi'}^{\alpha} \mathcal{R}(\xi^{0'}) \\ &= \frac{1}{L_{\xi^{0'}}!} \prod_{k=1}^r \left\{ \sum_{s=1}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^m \lambda_k^j \partial_{\xi_s} P_{m-j}(\xi^{0'}) \right) \zeta_s \right\}^{l_k-1} \\ &\quad \times \sum_{\substack{1 \leq j_i \leq m-1 \ (1 \leq i \leq L_{\xi^{0'}}) \\ s \neq t \Rightarrow j_s \neq j_t}} \mathcal{R}_{\left(\begin{smallmatrix} j_1, \dots, j_{L_{\xi^{0'}}} \\ m+j_1, \dots, m+j_{L_{\xi^{0'}}} \end{smallmatrix} \right)}(\xi^{0'}).\end{aligned}$$

ゆえに, $\mathcal{R}_{\xi^{0'}}$ は ϑ' に関して双曲型である. ■

$P(\xi)$ が ϑ に関して双曲型多項式のとき, P の $\xi \in \mathbf{R}^n$ における局所双曲錐 $\Gamma_{\xi}(P, \vartheta)$ が $\xi \in \mathbf{R}^n$ に関して内半連続であることより, $\tilde{\Gamma}_{\xi'}(\mathcal{R}_{\text{real}})$ は $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$ に関して内半連続 (inner semi-continuous) である. 内半連続性の定義を [1] からそのまま引用すると,

定義 2.5 τ をある位相空間, C_{τ} を $\mathbf{R}^n$ の錐集合とする. 写像 $\tau \rightarrow C_{\tau}$ が内半連続であるとは, 任意の閉錐集合 $N \subset C_{\tau_0} \cup \{0\}$ に対して, 次を満たす τ_0 の近傍 U が存在することをいう.

$$N \setminus \{0\} \subset C_{\tau}, \quad \tau \in U.$$

□

R, P_+ は共に

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\text{real}} &= \{ \xi' \in \mathbf{C}^{n-1}; P(\xi', \lambda) = 0 \text{ が } \lambda \text{ に関して} \\ &\quad \text{少なくとも 1 つの実多重根をもつ} \}\end{aligned}$$

に分岐点をもつ. したがって, R, P_+ の $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}, \xi \in \mathbf{R}^n$ での局所双曲錐をそれぞれ

$$\begin{aligned}\Gamma_{\xi'}(R, \vartheta') &= \{ \eta' \in \tilde{\Gamma}_{\xi'}(\mathcal{R}_{\text{real}}); R_{\xi'}(\eta') \neq 0 \} \text{ の } \vartheta' \text{ を含む連結成分,} \\ \Gamma_{\xi}(P_+, \vartheta) &= \{ \eta \in \tilde{\Gamma}_{\xi'}(\mathcal{R}_{\text{real}}) \times \mathbf{R}; P_{+\xi}(\eta) \neq 0 \} \text{ の } \vartheta \text{ を含む連結成分}\end{aligned}$$

で定義する. また, RP_+ の局所双曲錐とその双対錐を

$$\begin{aligned}\Gamma_\xi(RP_+, \vartheta) &= (\Gamma_{\xi'}(R, \vartheta') \times \mathbf{R}) \cap \Gamma_\xi(P_+, \vartheta), \\ K_\xi(RP_+, \vartheta) &= \{x \in \mathbf{R}^n; \xi \in \Gamma_\xi(RP_+, \vartheta) \text{ ならば, } x\xi \geq 0\}\end{aligned}$$

で定義する. $K(RP_+, \vartheta) = K_0(RP_+, \vartheta)$ と書けば,

$$\text{supp } F_{k^0}(x) \subset K(RP_+, \vartheta)$$

である.

次の補題は $\Gamma_{\xi'}(R, \vartheta')$ の $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$ に関する内半連続性を述べたものである.

補題 2.6 (Wakabayashi[2]) $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ とする. 任意のコンパクト集合 $K \subset \Gamma_{\xi'}(R, \vartheta')$ に対して, ξ' の錐近傍 U と $t_0 > 0$ が存在して, $\eta' \in K, \zeta' \in U, 0 < t \leq t_0$ のとき,

$$R(\zeta' - it|\zeta'|\eta') \neq 0.$$

□

P_+ に対しても補題 2.6 と同じことが言える.

$$W(RP_+, \vartheta) = \bigcup_{\xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}} K_\xi(RP_+, \vartheta)$$

とおくと, 補題 2.6 より

系 2.7 $x \notin W(RP_+, \vartheta)$ のとき, 次を満たす C^∞ -ベクトル場 $v(\xi)$ が存在する.

- $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ のとき,

$$v(\lambda\xi) = |\lambda|v(\xi).$$

- 任意の $\xi \in \mathbf{R}^n$ に対して,

$$v(\xi) \in \Gamma_\xi(RP_+, \vartheta) \cap \{\xi \in \mathbf{R}^n; x\xi = 0\}.$$

• $0 < t \leq 1$ のとき,

$$R(\xi - itv(\xi))P_+(\xi - itv(\xi)) \neq 0.$$

□

上を満たすベクトル場 $v(\xi)$ の集合を $V(RP_+, X, \vartheta)$ と書く.

3 ホモロジー類 $[\alpha_x^\dagger]$

ベクトル場の集合 $V(RP_+, X, \vartheta)$ を用いて Herglotz-Petrovskii-Leray の公式にあらわれるホモロジー類 $[\alpha_x^\dagger]$ を構成する.

Kronecker の微分形式を

$$\omega(\zeta) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \zeta_j d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\zeta_j} \wedge \cdots \wedge d\zeta_n,$$

S_X^{n-1} を, ξ 空間における実 $(n-1)$ 次元球面に $(x\xi)\omega(\xi) > 0$ なる向きを入れたチェーン (境界が $\{x\xi = 0\}$ に含まれる実 $(n-1)$ 次元相対サイクル) とする.

定義 3.1 $x \notin \pm W(RP_+, \vartheta)$, $v \in V(RP_+, X, \vartheta)$ のとき,

$$\alpha_{x,v} = \text{chain-}\{\xi - iv(\xi); \xi \in \tfrac{1}{2}S_X^{n-1}\}$$

とおく. S_X^{n-1} の前についた $\frac{1}{2}$ はチェーンの係数である.

□

定義 3.1 で, $\text{chain-}\{\cdot\}$ と書いたのは, 単なる点集合と向き付け可能で向きが定義されたチェーンを区別しているからである. 向きは $\frac{1}{2}S_X^{n-1}$ から誘導される向きをもつ. $\mathcal{R}_{\text{real}}^*$, X^* , W^* をそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\text{real}}, \\ X &= \{\zeta \in \mathbb{C}^n; x\zeta = 0\}, \\ W &= \bigcup \{\xi + i\varepsilon\Gamma_\xi(RP_+, \vartheta); \xi \in \mathbb{R}^n, \varepsilon = \pm 1\} \end{aligned}$$

の複素射影空間 $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ への像とし, Φ, Φ_{X^*} をそれぞれ

$$W^* \setminus \mathcal{R}_{\text{real}}^*, \quad (W^* \cap X^*) \setminus \mathcal{R}_{\text{real}}^*$$

の m 重被覆面とする. また, $(RP_+)^{\dagger}$ によって $\{\zeta \in W; R(\zeta')P_+(\zeta) = 0\}$ の Φ における像をあらわす.

定義 3.2 $\alpha_{x,v}$ の Φ への像 $\alpha_{x,v}^{\dagger}$ は, v の選び方に依存せず, ホモロジー群

$$H_{n-1}(\Phi \setminus (RP_+)^{\dagger}, \Phi_{X^*} \setminus (RP_+)^{\dagger}; \mathbf{C})$$

の元を定めるので $[\alpha_x^{\dagger}]$ と書く.

□

4 Herglotz-Petrovskii-Leray の公式

関数 $\chi_s(z)$ ($z, s \in \mathbf{C}$, $0 < \arg z < \pi$) を

$$\chi_s(z) = \begin{cases} \Gamma(-s)e^{-\pi i s} z^s, & s \neq 0, 1, \dots, \\ z^s(\log z^{-1} + c_s + \pi i)/s!, & s = 0, 1, \dots \end{cases}$$

で定義する. ここで, $c_s = \Gamma'(1) + \sum_{k=1}^s k^{-1}$, $c_0 = \Gamma'(1)$ である. $\chi_s(z)$ は s を固定するごとに $\text{Im } z > 0$ で正則ゆえ, 実軸への境界値として超関数を定める. それを $\chi_s(x+i0)$ と書く. $\chi_s(x+i0)$ は s の整関数である. また, $\sigma_q \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ を

$$\sigma_q(x) = (2\pi i)^{-1} \{ \chi_q(x+i0) - (-1)^q \chi_q(-x+i0) \}, \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4)$$

で定義すれば, $q = N = 0, 1, \dots$ のときは, $\chi_N(x)$ の $\log$ 項が消えて,

$$\sigma_q(x) = 2^{-1}(\text{sgn } x)x^q/q!, \quad q = 0, 1, \dots \quad (5)$$

$q = -N = -1, -2, \dots$ のときは, $\sigma'_q = \sigma_{q-1}$, $\sigma_0(x) = 2^{-1}(\text{sgn } x)$ より,

$$\sigma_q(x) = \delta^{(-q-1)}(x), \quad q = -1, -2, \dots \quad (6)$$

補題 4.1 $v \in V(RP_+, X, \vartheta)$ とし, $F_{k^0}(x)$ は (3) で与えたものとする.

(i). $x \notin W(RP_+, \vartheta)$ のとき,

$$F_{k^0}(x) = (2\pi)^{-n} \sum_{j=1}^{\mu} \int_{|\xi|=1} i^{r_{k^0}-n-2\mu-1} \chi_{r_{k^0}-n-2\mu}(x\zeta) R_{jk^0}(\zeta') \zeta_n^{j-1} (R(\zeta')P_+(\zeta))^{-1} \omega(\zeta) \quad (7)$$

と書ける. ただし, $\zeta = \xi - i(v(\xi) - \varepsilon|\xi|\vartheta)$ ($\varepsilon > 0$ は十分小) である.

(ii). (7) は $\varepsilon \rightarrow +0$ としても, 超関数の意味での積分として成り立つ.

□

(証明) $x \notin W(RP_+, \vartheta)$ のとき, Stokes の公式を用いれば,

$$F_{k^0}(x) = (2\pi)^{-n} i^{-1} \sum_{j=1}^{\mu} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\zeta} R_{jk^0}(\zeta') \zeta_n^{j-1} (R(\zeta')P_+(\zeta))^{-1} d\zeta \quad (8)$$

と書ける. ただし, $\zeta = \xi - i(v(\xi) - \varepsilon|\xi|\vartheta)$ である. (8) に極座標変換 $\xi = \rho\eta$, $|\eta| = 1$ をほどこして動径方向に積分すれば, (7) が得られる. (ii) は明らか.

■

$t_x : H_{n-2}(\Phi_{X^*} \setminus (RP_+)^{\dagger}) \rightarrow H_{n-1}(\Phi \setminus (\Phi_{X^*} \cup (RP_+)^{\dagger}))$ を Leray の tube operation とすれば, 次の Herglotz-Petrovskii-Leray の公式が得られる.

定理 4.2 (Herglotz-Petrovskii-Leray) $F_{k^0}(x)$ は (3) で与えたものとする. すると, $F_{k^0}(x)$ は $x \notin W(RP_+, \vartheta) \cup (-K(RP_+, \vartheta))$ のとき, x に関して実解析的で

$q = r_{k^0} - n - 2\mu - |\nu| \geq 0$ のとき,

$$D^{\nu} F_{k^0}(x) = (2\pi)^{1-n} \sum_{j=1}^{\mu} \int_{[\alpha_x^{\dagger}]} \chi_q^0(ix\xi) \xi^{\nu} R_{jk^0}(\xi') \xi_n^{j-1} (R(\xi')P_+(\xi))^{-1} \omega(\xi), \quad (9)$$

$q = r_{k^0} - n - 2\mu - |\nu| < 0$ のとき,

$$D^\nu F_{k^0}(x) = (2\pi)^{-n} i^{-1} \sum_{j=1}^{\mu} \int_{t_x \partial[\alpha_x^\dagger]} \chi_q^0(ix\xi) \xi^\nu R_{jk^0}(\xi') \xi_n^{j-1} (R(\xi')P_+(\xi))^{-1} \omega(\xi). \quad (10)$$

ここで,

$$\chi_q^0(z) = \begin{cases} z^q/q!, & q \geq 0, \\ (-1)^{q+1}(-q-1)!z^q, & q < 0 \end{cases}$$

である.

□

(証明) $\nu = 0$ の場合を示す. $F_{k^0}(x)$ は前進基本解で, $x \notin -K(RP_+, \vartheta)$ より $F_{k^0}(-x) = 0$. ゆえに補題 4.1 より,

$$\begin{aligned} F_{k^0}(x) &= F_{k^0}(x) - (-1)^{r_{k^0}-n+1} F_{k^0}(-x) \\ &= (2\pi)^{-n} \sum_{j=1}^{\mu} i^{r_{k^0}-n-2\mu-1} \\ &\quad \left\{ \int_{|\xi|=1} \chi_{r_{k^0}-n-2\mu}(x\zeta) R_{jk^0}(\zeta') \zeta_n^{j-1} (R(\zeta')P_+(\zeta))^{-1} \omega(\zeta) \right. \\ &\quad \left. - \int_{|\xi|=1} \chi_{r_{k^0}-n-2\mu}(x\tilde{\zeta}) R_{jk^0}(\tilde{\zeta}') \tilde{\zeta}_n^{j-1} (R(\tilde{\zeta}')P_+(\tilde{\zeta}))^{-1} \omega(\tilde{\zeta}) \right\}, \\ &\quad \zeta = \xi - i(v(\xi) - \varepsilon|\xi|\vartheta), \quad \tilde{\zeta} = \xi - i(v(\xi) + \varepsilon|\xi|\vartheta). \end{aligned}$$

$\varepsilon \rightarrow +0$ として, (4) を使えば

$$F_{k^0}(x) = (2\pi)^{1-n} \sum_{j=1}^{\mu} i^{r_{k^0}-n-2\mu} \int_{|\xi|=1} \sigma_{r_{k^0}-n-2\mu}(x\xi) R_{jk^0}(\xi') \xi_n^{j-1} (R(\xi')P_+(\xi))^{-1} \omega(\xi).$$

ただし, $\zeta = \xi - i\nu(\xi)$ である. $q = r_{k^0} - n - 2\mu \geq 0$ のとき, (5) より

$$F_{k^0}(x) = (2\pi)^{1-n} \sum_{j=1}^{\mu} i^q \int_{|\xi|=1} 2^{-1}(\operatorname{sgn} x\xi) x^q/q! R_{jk^0}(\xi') \xi_n^{j-1} (R(\xi')P_+(\xi))^{-1} \omega(\xi).$$

$2^{-1}(\operatorname{sgn} x\xi)$ を積分範囲の $|\xi| = 1$ に入れて考えれば, 積分範囲は S_X^{n-1} となる. ゆえに (9) が成り立つ. (10) は (6) と Cauchy の積分表示を使って示される.

■

系 4.3 $x \in \mathcal{O} = \{\mathbf{R}^n \setminus (W(RP_+, \vartheta) \cup (-K(RP_+, \vartheta)))$ の一つの連結成分} とする.

- (i). $r_{k^0} \geq n + 2\mu$ かつ $[\alpha_x^\dagger] = 0$ ならば, $\mathcal{O}$ は $F_{k^0}(x)$ の strong regular lacuna である.
- (ii). $r_{k^0} < n + 2\mu$ かつ $\partial[\alpha_x^\dagger] = 0$ ならば, $\mathcal{O}$ は $F_{k^0}(x)$ の strong regular lacuna である.
- (iii). $\partial[\alpha_x^\dagger] = 0$ ならば, $\mathcal{O}$ は $F_{k^0}(x)$ の lacuna である.

□

参考文献

- [1] M. F. Atiyah, R. Bott and L. Gårding. Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients I, II. *Acta Math.*, Vol. 124, pp. 109-189, 1970; Vol. 131, pp. 145-206, 1973.
- [2] S. Wakabayashi. Analytic wave front sets of the Riemann functions of hyperbolic mixed problems in a quarter-space. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, Vol. 11, pp. 785-807, 1976.