

一次元 Heisenberg 模型における 定差方程式の解

神戸大 教育 加藤 祐輔

神戸大 理 麦林 布道

明星大 理工 関根 克彦

有限個のスピンより成る一次元 Heisenberg 模型において,
ハミルトニアン固有値問題は, 附加条件のついた定差方程式
を解く問題に帰着する. 以下では, 逆転したスピン = 1 の
場合の定差方程式を系統的に解いて, 可能な全部の解を求め,
いわゆる Bethe ansatz による解 [1][2] との比較を行な
う.

§ 1. ハミルトニアン

一次元 Heisenberg 模型は, 元来は強磁性体の模型として考
えられたものであるが, 数学的には, 次のようなハミルトニ
アンを与えることによって定義できる:

$$(1.1) \quad H = - \sum_{j=1}^N (\vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1} - \frac{1}{4}).$$

ただし $\vec{S}_{N+1} \equiv \vec{S}_1$ とし, $\vec{S}_j$ ($j = 1, 2, \dots, N$) は

$$\vec{S}_j = I \otimes \dots \otimes I \otimes \frac{1}{2} \vec{\sigma} \otimes I \otimes \dots \otimes I.$$

ここに I は 2×2 の単位行列, $\vec{\sigma} = (\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z)$ は Pauli 行列で, 上の Kronecker 積の j 番目の因子としてあらわれるものとする. なお, 因子の総数は N で, N は 3 以上の自然数としておく.

$\vec{S}_j = (S_j^x, S_j^y, S_j^z)$ の各成分はいずれも 2^N 次の行列, 従ってハミルトニアン H も 2^N 次の行列であるから, 状態ベクトルのヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ はこの場合 2^N 次元のベクトル空間である. これは, $S^z = \sum_{j=1}^N S_j^z$ の固有空間の直和に分解される:

$$(1.2) \quad \mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^N \mathcal{H}_n$$

ここに $\mathcal{H}_n$ は, S^z の固有値 $\frac{N}{2} - n$ に対応する固有空間をあらわす. これを sector とよぶ. $\mathcal{H}_n$ の次元は $N C_n$ に等しい.

$[S^z, H] = 0$ であるから, ハミルトニアン H の固有値問題は各 sector 毎に解くことが出来る. すなわち,

$$(1.3) \quad H|\Phi_n\rangle = E|\Phi_n\rangle, \quad |\Phi_n\rangle \in \mathcal{H}_n.$$

§ 2. 定差方程式

$\mathcal{H}_n$ のベクトル $|\Phi_n\rangle$ は次の形の一次結合である:

$$(2.1) \quad |\Phi_n\rangle = \sum a(m_1, \dots, m_n) |m_1, \dots, m_n\rangle.$$

ここに, $|m_1, \dots, m_N\rangle = S_{m_1}^- \dots S_{m_N}^- |0\rangle$, $S_j^- = S_j^x - i S_j^y$
 $(j = 1, 2, \dots, N)$. 各 m_j は 1 から N までの整数値をとり,
 $m_1 < m_2 < \dots < m_N$ とする.

とくに, $|\Phi_0\rangle = a|0\rangle$ ($a \in \mathbb{C}$) で, $\mathcal{H}_0$ はベクトル $|\Phi_0\rangle$
 のはる一次元の部分空間である. 物理的には, $|0\rangle$ は N 個の
 スピンが全部上をむいた状態, $|m_1, \dots, m_N\rangle$ は, m_1 番目, $\dots$
 m_N 番目のスピンの逆転して下をむいている状態をあらわす.

(2.1) を (1.3) に代入することにより, 係数 a (以下
 これを波動関数とよぶ) にたいする方程式が得られる. これは,
 Bethe [1] に従って次の形に書かれる:

$$(2.2) \quad E a(m_1, \dots, m_N) = \\ = \frac{1}{2} \sum_{m'_1, \dots, m'_N} [a(m_1, \dots, m_N) - a(m'_1, \dots, m'_N)].$$

ただし, ここでは, 各 m_j はすべての有理整数値をとるもの
 とし, そのかわり次の周期性条件をおく:

$$(2.3) \quad a(m_1, m_2, \dots, m_N) = a(m_2, \dots, m_N, m_1 + N).$$

また (2.2) の和は, $(m_1, \dots, m_N)$ のうちのどれか一つ m_j
 を $m_j \pm 1$ とし得られる $(m'_1, \dots, m'_N)$ のあらゆる可能性
 にわたってとる.

とくに $N=1$ の場合, (2.2)(2.3) はそれぞれ

$$(2.4) \quad E a(m) = a(m) - \frac{1}{2} a(m+1) - \frac{1}{2} a(m-1),$$

$$(2.5) \quad a(m) = a(m+N), \quad \forall m \in \mathbb{Z},$$

となる.

$2=2$ の場合には, $m_2 - m_1 = 1$ または $N-1$ のとき (これは逆転した二個のスピンが隣りあっているときである),

$$(2.6) \quad E a(m_1, m_2) = a(m_1, m_2) - \frac{1}{2} a(m_1 - 1, m_2) - \frac{1}{2} a(m_1, m_2 + 1).$$

$m_2 - m_1 \neq 1, N-1$ のときは,

$$(2.7) \quad E a(m_1, m_2) = 2 a(m_1, m_2) - \frac{1}{2} a(m_1 + 1, m_2) - \frac{1}{2} a(m_1 - 1, m_2) - \frac{1}{2} a(m_1, m_2 + 1) - \frac{1}{2} a(m_1, m_2 - 1).$$

一方, 周期性条件 (2.3) は,

$$(2.8) \quad a(m_1, m_2) = a(m_2, m_1 + N)$$

となる. ここで, 波動関数 $a(m_1, m_2)$ は, 次のような集合 $D \subset \mathbb{Z}^2$ の上で定義されっていると考える:

$$(2.9) \quad D = \{ (m_1, m_2) \mid 1 \leq m_2 - m_1 \leq N-1 \}.$$

§ 3. $2=1$ の場合の解. マクノン.

$2=1$, すなわち逆転したスピンを一個含む場合の解は, 附加条件 (2.5) を考慮して一変数の定差方程式 (2.4) を解くことにより得られる. その結果は, よく知られており,

$$(3.1) \quad E = 1 - \cos k$$

$$(3.2) \quad a(m) = e^{ikm}$$

ここに

$$(3.3) \quad k = \frac{2\pi n}{N} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1)$$

である。従って、全部で N 個の独立な固有関数がある。

これらの解は、通常、運動量が k の自由なスピノ波、またはマクソンをあらわすと解釈される。すなわち、自由なマクソン一個の状態は、ハミルトニアン H の固有状態になっており、その運動量は (3.3) のように量子化されている。

§ 4. $\lambda = 2$ の場合の解

この場合は、附加条件 (2.8) を考慮して、二変数の定差方程式 (2.6) (2.7) を解くことが問題である。

まず、方程式系 (2.6) - (2.8) が次の変換

$$(4.1) \quad U: a(m_1, m_2) \mapsto a(m_1 + 1, m_2 + 1)$$

にたいして不変であることを注目し、 U の固有値問題を先に解く。変数を

$$(4.2) \quad M = m_1 + m_2, \quad \mu = m_2 - m_1$$

に変え、 $a(m_1, m_2) = A(M, \mu)$ と書くと、 U の固有値問題は、

$$(4.3) \quad A(M+2, \mu) = \nu A(M, \mu)$$

と書かれる。ここで、新しい変数の変域は、

$$M = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad \mu = 1, 2, \dots, N-1$$

であることに注意しておく。

方程式(4.3)は、各 μ 毎に M にかんする一変数定差方程式で、簡単に解ける：

$$\begin{aligned}
 (4.4) \quad A(M, \mu) &= \nu^{\frac{M}{2}} A(0, \mu) \\
 &\quad (M \text{ が偶数のとき}) \\
 &= \nu^{\frac{M-1}{2}} A(1, \mu) \\
 &\quad (M \text{ が奇数のとき})
 \end{aligned}$$

ここで、周期性条件(2.8)を用いる。これは新しい変数で

$$(4.5) \quad A(M, \mu) = A(M+N, N-\mu)$$

と書かれるから、二回くりかえして用いると、

$$A(M, \mu) = A(M+2N, \mu).$$

一方、(4.3)から

$$A(M+2N, \mu) = \nu^N A(M, \mu).$$

故に、 $\nu^N = 1$ 。これより、

$$(4.6) \quad \nu = e^{iK}$$

$$(4.7) \quad K = \frac{2\pi n}{N} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1)$$

が出る。

こうして、 $2 = 2$ sector は次のような直和に分解される：

$$(4.8) \quad \mathcal{H}_2 = \bigoplus_{n=0}^{N-1} \mathcal{H}_{2,n}$$

ここに $\mathcal{H}_{2,n}$ は、 U の固有値 $\nu = e^{i\frac{2\pi n}{N}}$ に属する固有空間である。これらを、subsector とよぶことにする。

次に、各 subsector 毎に、ハミルトニアン固有値問題、つまり (2.6) - (2.8) を解く。

波動関数 (4.4) は、まとめて、

$$(4.9) \quad A(M, \mu) = \nu^{\frac{M}{2}} [c^+(\mu) + (-1)^M c^-(\mu)]$$

の形に書くことが出来る。ここに、

$$c^\pm(\mu) = \frac{1}{2} [A(0, \mu) \pm \nu^{-\frac{1}{2}} A(1, \mu)].$$

ところが、 $(-1)^{M+\mu} = (-1)^{2m_2} = 1$ だから、

$$(4.10) \quad (-1)^M = (-1)^\mu$$

という関係がある。これを用いると、(4.9) の右辺は変数分離出来て、

$$(4.11) \quad A(M, \mu) = \nu^{\frac{M}{2}} c(\mu)$$

のように書かれる。ここで、

$$c(\mu) = c^+(\mu) + (-1)^\mu c^-(\mu)$$

である。

(4.11) を (2.6) - (2.8) に代入することにより、 $c(\mu)$ にたいする方程式が得られる。まず、(2.6) から、

$$(4.12) \quad \lambda c(2) + (E-1)c(1) = 0,$$

$$(4.12a) \quad \lambda c(N-2) + (E-1)c(N-1) = 0.$$

ただし、

$$(4.13) \quad \lambda = \frac{1}{2} (\nu^{\frac{1}{2}} + \nu^{-\frac{1}{2}}) = \cos \frac{K}{2}.$$

また、(2.7) から、

$$(4.14) \quad \lambda c(\mu+1) + (E-2)c(\mu) + \lambda c(\mu-1) = 0$$

$$(\mu = 2, 3, \dots, N-2)$$

さらに周期性条件 (2.8) は,

$$(4.15) \quad c(\mu) = \eta c(N-\mu)$$

$$(\mu = 1, 2, \dots, N-1)$$

を与える。ただし,

$$(4.16) \quad \eta = \nu^{\frac{N}{2}} = e^{i\frac{K}{2}N}$$

(4.7) を用いると $\eta = (-1)^n$ であり, これは一種のパリティを定義する。(4.15)により, 内部波動関数 $c(\mu)$ は, even か odd かの定まったパリティをもつ。

$$\underline{\lambda = 0}$$

これは $K = \pi$ のときであり, N が偶数の場合にのみ生ずる。

このとき, (4.12) (4.12a) から,

$$(E-1)c(1) = (E-1)c(N-1) = 0$$

(4.14) から,

$$(E-2)c(\mu) = 0 \quad (\mu = 2, 3, \dots, N-2).$$

従って, 一つの解は,

$$(4.17) \quad E = 1, \quad c(2) = \dots = c(N-2) = 0$$

である。このほかに,

$$(4.18) \quad E = 2, \quad c(1) = 0 = c(N-1)$$

であるような解がある。その独立なものの個数は, $\eta = +1$

なら $\frac{N}{2}$ 個, $\eta = -1$ なら $\frac{N}{2} - 1$ 個である.

$\lambda \neq 0$

このとき, (4.14) は λ でのった形:

$$(4.19) \quad c(\mu+1) + \frac{E-2}{\lambda} c(\mu) + c(\mu-1) = 0$$

にしておく. この形の定差方程式については, その一般解が知られている [3]. 対応する特性方程式

$$(4.20) \quad x^2 + \frac{E-2}{\lambda} x + 1 = 0$$

を考え, その二根を ω , ω^{-1} とすると, 根と係数の関係から,

$$(4.21) \quad E = 2 - \lambda(\omega + \omega^{-1})$$

(i) 特性方程式の二根 ω , ω^{-1} が相異なる場合. (4.19)

の一般解は,

$$c(\mu) = C_1 \omega^\mu + C_2 \omega^{-\mu}$$

であるが, パリティ確定の条件 (4.15) を考慮すれば,

$$(4.22) \quad c(\mu) = \text{const.} \left(\omega^{\frac{N}{2}-\mu} \pm \omega^{-\frac{N}{2}+\mu} \right),$$

($\eta = \pm 1$ にたいし)

一方, (4.12) から, (4.21) を考慮して,

$$\lambda = \frac{c(1)}{(\omega + \omega^{-1})c(1) - c(2)}$$

この右辺に (4.22) を代入すると,

$$(4.23) \quad \lambda = \frac{\omega^{\frac{N}{2}-1} \pm \omega^{-\frac{N}{2}+1}}{\omega^{\frac{N}{2}} \pm \omega^{-\frac{N}{2}}} \quad (\eta = \pm 1)$$

が得られる。各 subsector z の λ と η の値は知られてゐるから、
(4.23) は ω を定める方程式になる。

(ii) 特性方程式が等根をもつ場合。これは $\omega = \pm 1$ の場合である。(4.19) の一般解は、

$$c(\mu) = \omega^\mu (C_1 + \mu C_2)$$

で与えられるが、(4.12) および (4.15) を考慮すると、次の場合があり得る：

$$(ii a) \quad c(\mu) = \text{const.}$$

この解は $K=0$ のとき、従つて $\lambda=1$ 、 $\eta=1$ のときだけ存在し、 $\omega=+1$ である。従つて、(4.21) から $E=0$ 。

$$(ii b) \quad c(\mu) = \text{const.} (\pm 1)^\mu \left(1 - \frac{\mu}{2N}\right)$$

この解は、

$$(4.24) \quad \lambda = \pm \left(1 - \frac{2}{N}\right)$$

の関係が満たされるとき生ずる。複号は、 $\omega = \pm 1$ に対応する。

ところが、(4.24) の関係を満足する $\lambda = \cos \frac{n\pi}{N}$ ($n = 1, 2, \dots, N-1$) は実は存在しないこと、従つて (ii b) の形の解は存在しないことが証明できる。

実際、 $\frac{n\pi}{N} = \varphi$ とおくと、

$$(4.25) \quad \cos \varphi = \pm \left(1 - \frac{2}{N}\right),$$

$$(4.26) \quad \cos N\varphi = (-1)^n,$$

であるが、この二式が同時に成り立つことは、 N が3以上の自然数である限り決しておこらない。以下、三つの場合に分けてこのことを証明する。

(1) N が奇数の場合. $\cos N\varphi$ は一般に有理整数を係数にもつ $\cos \varphi$ の多項式であらわされるが、 N が奇数ならこの多項式は奇数次の項だけから成り、定数項を含まない。従って、 $x = \frac{1}{\cos \varphi}$ とおくと、(4.26)から、 x の満たす代数方程式が得られるが、その係数はすべて有理整数で、しかも最高次の項の係数を1に出来る。これは、 x が代数的整数であることを意味する。ところで、整数論のよく知られた定理により、代数的整数が有理数ならそれは有理整数でなければならぬ[4]。一方、(4.25)から $x = 1 + \frac{2}{N-2}$ で、これが有理整数になるのは、3以上の奇数について、 $N=3$ だけである。しかし、 $N=3$ で $\cos \varphi = \pm \frac{1}{3}$ のとき $\cos 3\varphi \neq \pm 1$ 、すなわち(4.26)は成立しない。従って、 N が奇数である限り、(4.25)(4.26)が同時に成り立つことは決してない。

(2) $N=2M$ で M が偶数の場合. このとき、(4.26)ならば $\cos M\varphi = 0$ であり、 $\cos M\varphi$ は有理整数を係数にもつ $\cos \varphi$ の多項式で、定数項がある。この定数項は、 $\frac{M}{2}$ が偶数か奇数かに応じて ± 1 であることが知られている。従って、(1)と同様に考えて、 $x = \frac{1}{\cos \varphi}$ は代数的整数であり、もし有理

数なら有理整数でなければならぬ。一方, (4.25) から $x = 1 + \frac{2}{N-2}$ 。これが有理整数になるのは, 偶数に於ては $N = 4$ だけであるが, このとき (4.26) が成立しないことは直接確かめられる。

(3) $N = 2M$ で M が奇数の場合. (4.26) は $\cos M(2\varphi) = \pm 1$ と書け, M が奇数だから, (1) の場合と同様に考える。

しかしこの場合は, $y = \frac{1}{\cos 2\varphi}$ が有理数なら有理整数でなければならぬことが導かれる。ところが (4.25) から,

$$y = \frac{1}{2\cos^2\varphi - 1} = \frac{M^2}{M^2 - 4M + 2}$$

で, これが有理整数になるのは $M = 3$ のときだけであり, しかもこのとき (4.26) が成立しないことが示せる。

以上を総合して, N が 3 以上の任意の自然数であるとき, (4.25)(4.26) は根をもたないことが証明出来た。従って, (4.24) の関係は決して実現されず, 方程式系 (4.12)(4.14)(4.15) には (ii b) の形の解はない。

§ 5. 解の分類と解釈. 完全性

5. 1. $\lambda \neq 0$ の解の分類と解釈

$\lambda \neq 0$ で, 特性方程式 (4.20) が相異なる二根をもつ (i) の場合を最初に考える。このとき ω は,

$$(5.1) \quad \omega = e^{ik}, \quad 0 < k < \pi,$$

または

$$(5.2) \quad \omega = \pm e^{\nu}, \quad \nu > 0,$$

の形に書けることが示せる. これは, ω と ω^{-1} が実係数の二次方程式の二根であり, しかも互いに異なるということから出る.

(5.1) の形の解にたいしては,

$$(5.3) \quad c(\mu) = \text{const.} [e^{ik(\frac{N}{2}-\mu)} \pm e^{-ik(\frac{N}{2}-\mu)}].$$

ここで,

$$(5.4) \quad k_1 = \frac{K}{2} + k, \quad k_2 = \frac{K}{2} - k$$

とおくと, 全波動関数は,

$$(5.5) \quad a(m_1, m_2) = A(k_1, k_2) e^{ik_1 m_1 + ik_2 m_2} + \\ + B(k_1, k_2) e^{ik_1 m_2 + ik_2 m_1}$$

の形に書かれる. これは, 運動量が k_1, k_2 の二個のスピン波 (マグノン) が存在する状態をあらわす. 一方, エネルギー固有値は,

$$(5.6) \quad E = 2 - \cos k_1 - \cos k_2$$

で与えられる. この形の解を一般に unbound state solution とよぶ.

二個のマグノンの相対運動量 k を定めるには, (4.23) に

(5.1) を代入して得られる次の式

$$(5.7) \quad \lambda = \frac{\cos(\frac{N}{2}-\mu)k}{\cos \frac{N}{2}k} \quad (\eta = +1)$$

$$(5.8) \quad \lambda = \frac{\sin\left(\frac{N}{2} - k\right)k}{\sin \frac{N}{2}k} \quad (\eta = -1)$$

を用いる。

(5.7)の右辺を $f^+(k)$ と書くと,

$$(5.9) \quad I^+ = \{k \mid 0 < k < \pi, -1 < f^+(k) \leq 1\}$$

は次のような和集合としてあらわされる:

$$(5.10) \quad \begin{aligned} I^+ &= \bigcup_{m=1}^{\frac{N}{2}-1} I_{2m-1} \quad (N \text{ が偶数のとき}) \\ &= \bigcup_{m=1}^{\frac{N-3}{2}} I_{2m-1} + \overset{\circ}{I} \quad (N \text{ が奇数のとき}) \end{aligned}$$

ここに, $I_n =]\frac{n}{N-1}\pi, \frac{n+1}{N-1}\pi]$, $\overset{\circ}{I} =]\frac{N-2}{N-1}\pi, \pi[$ である.

$f^+(k)$ は, すべての半開区間 I_{2m-1} において -1 から 1 まで, $\overset{\circ}{I}$ においては -1 から $-(1 - \frac{2}{N})$ まで変る真増加関数である. このことから, (5.7) は, N が偶数なら $-1 < \lambda \leq 1$ の範囲のどの $\lambda \neq 0$ にたいしても $\frac{N}{2} - 1$ 個の根をもつこと, N が奇数なら, $-1 < \lambda < -(1 - \frac{2}{N})$ の範囲の λ にたいしては $\frac{N-1}{2}$ 個, $-(1 - \frac{2}{N}) < \lambda \leq 1$ の範囲の $\lambda \neq 0$ にたいしては $\frac{N-3}{2}$ 個の根をもつことがわかる.

同様に (5.8) の右辺を $f^-(k)$ と書くと,

$$(5.11) \quad I^- = \{k \mid 0 < k < \pi, -1 < f^-(k) \leq 1\}$$

は次のようにあらわされる:

$$(5.12) \quad \begin{aligned} I^- &= \bigcup_{m=0}^{\frac{N}{2}-2} I_{2m} + \overset{\circ}{I} \quad (N \text{ が偶数のとき}) \\ &= \bigcup_{m=0}^{\frac{N-3}{2}} I_{2m} \quad (N \text{ が奇数のとき}) \end{aligned}$$

$f^-(k)$ は, I_0 を除くすべての I_{2m} において -1 から 1 まで, I_0 では $1 - \frac{2}{N}$ から 1 まで, I^- では -1 から $-(1 - \frac{2}{N})$ まで変る真増加関数である. 従って (5.8) は, N が偶数なら, $-(1 - \frac{2}{N}) < \lambda < 1 - \frac{2}{N}$ の範囲の $\lambda \neq 0$ にたいしては $\frac{N}{2} - 2$ 個, $-1 < \lambda < -(1 - \frac{2}{N})$ および $1 - \frac{2}{N} < \lambda \leq 1$ の範囲の λ にたいしては $\frac{N}{2} - 1$ 個の根をもつ. N が奇数なら, $-1 < \lambda < 1 - \frac{2}{N}$ なる $\lambda \neq 0$ にたいして $\frac{N-1}{2}$ 個, $1 - \frac{2}{N} < \lambda \leq 1$ なる λ にたいしては $\frac{N-3}{2}$ 個の根をもつ.

次に, (5.2) の形の解にたいしては,

$$(5.13) \quad c(\mu) = \text{const.} (\pm 1)^\mu \cosh\left(\frac{N}{2} - \mu\right)v.$$

$$\text{または,} \quad = \text{const.} (\pm 1)^\mu \sinh\left(\frac{N}{2} - \mu\right)v.$$

ここで, 確率をあらわす $|c(\mu)|^2$ を計算してみると, これは $\mu = 1, N-1$ のところで最大値をとる. このことは Bethe によって, 二つの逆転したスピオンが近づいて "結合状態" をつくる傾向を示すものと解釈された.

この結合状態のエネルギーは,

$$(5.14) \quad E_b = 2 - 2 \cos \frac{K}{2} \cosh v$$

を与えられ, 同じ K の値をもつ unbound state のエネルギー - (5.6) より $E(k) = 2 - 2 \cos \frac{K}{2} \cos k$ よりもつねに低い.

ここに得られた解を, bound state solution of Bethe

type とよぶことにする.

(4.23)の右辺を $h^\pm(\omega)$ と書くと, $h^+(\omega)$ は, 区間 $]1, \infty[$ において N の偶奇に関係なく 1 から 0 まで変る真減少関数, $] -\infty, -1[$ においては N が偶数なら 0 から -1 まで, N が奇数なら 0 から $-(1 - \frac{2}{N})$ まで変る真減少関数である. $h^-(\omega)$ は, $]1, \infty[$ においては N の偶奇に関係なく $1 - \frac{2}{N}$ から 0 まで, $] -\infty, -1[$ においては N が偶数なら 0 から $-(1 - \frac{2}{N})$ まで, N が奇数なら 0 から -1 まで変る真減少関数である.

従って, $\lambda = h^+(\omega)$ は, N が偶数なら $-1 < \lambda < 1$ の範囲のどの $\lambda \neq 0$ についても必ず一つ, しかもただ一つの根をもつ. N が奇数なら, $-(1 - \frac{2}{N}) < \lambda < 1$ なる $\lambda \neq 0$ についても一つ, しかもただ一つの根をもつ. 同様 $\lambda = h^-(\omega)$ は, N が偶数のとき $-(1 - \frac{2}{N}) < \lambda < 1 - \frac{2}{N}$ なる $\lambda \neq 0$ についても, N が奇数のときは $-1 < \lambda < 1 - \frac{2}{N}$ なる $\lambda \neq 0$ についても, 一つの根をもつ.

$\lambda \neq 0$ の解は, 上に求めた unbound および u bound state solution のほかに, 特性方程式 (4.20) が等根をもつ場合の解 (ii a) があるが, これは unbound state solution で $k_1 = k_2 = 0$ の特別の場合と考えられる.

5. 2. 解の完全性

$\lambda \neq 0$ の解は全部求めたので, その総数を調べてみる.

N が偶数のとき, $\eta = +1$ の解は, unbound および bound state solution あわせて, $-1 < \lambda \leq 1$ の範囲のどの $\lambda \neq 0$ にたいして $\frac{N}{2}$ 個, $\eta = -1$ の解は $\frac{N}{2} - 1$ 個である. N が奇数のときは $\eta = \pm 1$ に関係なくつねに $\frac{N-1}{2}$ 個である.

ところで, N が奇数のときには $\lambda = 0$ の subsector は存在しない. そして, subsector は全部で N 個ある. 従って, 解の総数は $\frac{N-1}{2} \times N = {}_N C_2$ で, これは丁度 $2=2$ sector の次元に等しい. これによつて, N が奇数のときの解の完全性が証明できた.

N が偶数のときは $\lambda = 0$ の subsector があり, これに含まれる独立な解の数は, この subsector が $\eta = +1$ なら $\frac{N}{2}$ 個, $\eta = -1$ なら $\frac{N}{2} - 1$ 個であった. しかるに, 上に見たように, $\lambda \neq 0$ のどの subsector について, unbound および bound state solution をあわせたものは $\eta = +1$ なら $\frac{N}{2}$ 個, $\eta = -1$ なら $\frac{N}{2} - 1$ 個であった. ところで, subsector は全部で N (偶数) 個あり, そのうちの半分 $\frac{N}{2}$ が $\eta = +1$, 残りの $\frac{N}{2}$ が $\eta = -1$ である. よつて, 解の総数は, $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2} + (\frac{N}{2} - 1) \times \frac{N}{2} = {}_N C_2$ と計算される. これによつて, N が偶数のときも, 解の完全性が証明できた.

5. 3. $\lambda = 0$ の解の分類と解釈

(5.6) において $k_2 = \pi - k_1$ にとると, $E = 2$ が得られる. 一方, (5.3) で $\mu = 1, N-1$ とおくと

$$c(1) = c(N-1) = \text{const.} \cos\left(\frac{N}{2} - 1\right)k \quad (\eta = +1)$$

$$c(1) = -c(N-1) = \text{const.} \sin\left(\frac{N}{2} - 1\right)k \quad (\eta = -1)$$

従って, $\eta = +1$ なら

$$k = \frac{2m-1}{\frac{N}{2}-1} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (m = 1, 2, \dots, \frac{N}{2})$$

ととることにより, また $\eta = -1$ なら

$$k = \frac{2(m-1)}{\frac{N}{2}-1} \cdot \pi \quad (m = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}-1)$$

ととることにより, $c(1) = c(N-1) = 0$ であり $0 \leq k < \pi$ であるような unbound state solution がそれぞれ $\frac{N}{2}$ 個, $\frac{N}{2} - 1$ 個得られる.

こうして, (4.18) の形の解は全部, unbound state solution の特別の場合と考えることが出来る. これらのすべての解は縮退して, そのエネルギーは $E = 2$ である.

一方 (4.17) の形の解については, 確率をあらわす $|c(\mu)|^2$ が $\mu = 1, N-1$ にたいしてのみ 0 でない値をもつこと, およびエネルギー $E = 1$ が, 上に求めた unbound state のエネルギー $E = 2$ より下にあることから, 一種の bound state をあらわすと解釈される. 対応する状態ベクトルは,

$$|\Phi\rangle = \text{const} \sum_{j=1}^N (-1)^j S_j^- S_{j+1}^- |0\rangle$$

である。

ところで、この解は、Bethe ansatz によつてはあらわすことが出来る。次にこの点を検討しよう。

§ 6. Betheの解法との比較

Betheは、(2.6)(2.7)の二種類の定差方程式を一つにまとめ書く方法を提案した。それには、二つの変数 m_1 と m_2 の値が等しいときの波動関数 a を定義して、次の条件が満たされるとする：

$$(6.1) \quad a(m, m) + a(m+1, m+1) = 2a(m, m+1).$$

そうすると、(2.6)も(2.7)と同じ形に書くことが出来る。いかえると、 $m_2 - m_1 = 1$, $N-1$ のときも、 $m_2 - m_1 \neq 1$, $N-1$ のときも、同じ一つの方程式(2.7)が使える。そのかわり、新しい附加条件として(6.1)を課する。

一方、周期性条件(2.8)は、形はそのままだが、 $m_2 - m_1 = 0$, N にたいしても成り立つものと考える。すなわち、

$$(6.2) \quad a(m_1, m_2) = a(m_2, m_1 + N), \quad 0 \leq m_2 - m_1 \leq N.$$

さて、二つの附加条件(6.1)(6.2)がついた定差方程式(2.7)を解くのに、Betheは次のansatzを用いた：

$$(6.3) \quad a(m_1, m_2) =$$

$$= e^{i(k_1 m_1 + k_2 m_2 + \frac{\varphi}{2})} + e^{i(k_1 m_2 + k_2 m_1 - \frac{\varphi}{2})}$$

$$(6.4) \quad E = 2 - \cos k_1 - \cos k_2$$

ここで k_1, k_2, φ は必ずしも実数でなくともよい。この ansatz が (2.7) を満足することは容易にわかるが、さらに (6.1)(6.2) が成り立つためには、 (k_1, k_2, φ) が次の関係を満たせばよい：

$$(A) \quad 2 \cot \frac{\varphi}{2} = \cot \frac{k_1}{2} - \cot \frac{k_2}{2}$$

$$(B) \quad N k_1 - \varphi = 2\pi n_1, \quad N k_2 + \varphi = 2\pi n_2,$$

$$n_1, n_2 = 0, 1, \dots, N-1$$

$$-\pi \leq \operatorname{Re} \varphi \leq \pi$$

この (A)(B) を満足する実数の (k_1, k_2, φ) にたいしては、unbound state solution が得られる。また、 $k_1 = u + iv, k_2 = u - iv, \varphi = iNv$ (または $iNv \pm \pi$) (ここで u, v は実数) の形の (k_1, k_2, φ) が (A)(B) を満足するとき、それは bound state solution を与える。

ところで、われわれの (4.17) の形の解は、Katsura [2] によつて、 $v = -\infty$ に相当する (A)(B) の特殊解として分類されているが、厳密には、波動関数 (4.17) を Bethe ansatz によつてあらわすことは出来ない。実際、(6.3) は、

$$(6.5) \quad a(m_1, m_2) = e^{i \frac{M}{2} K} c(\mu),$$

$$(6.6) \quad c(\mu) = e^{i(\frac{\varphi}{2} - k\mu)} + e^{-i(\frac{\varphi}{2} - k\mu)}$$

と書けるが, この $c(\mu)$ は,

$$c(1) - 2 \cos k c(2) + c(3) = 0$$

という関係を満たす. 従って, もし $c(2) = c(3) = 0$ だったら, 必然的に $c(1) = 0$ になってしまう. しかしに問題の解は, $c(1) \neq 0$ で $c(2) = c(3) = 0$ であるようなものである.

Betheの方法でこの解が求められなかった理由は, (6.5)の形を $\mu=0$ にたいしてまで要求したことにある. われわれが求めた解は, 問題の解(4.17)も含めて, すべて(6.5)の形であるが, われわれはこの式を $\mu = 1, 2, \dots, N-1$ にたいしてだけ用いた. いま, この式が $\mu=0$ にたいしても成り立つことを要求してみると, Betheの附加条件(6.1)は $c(1) = \lambda c(0)$ を与える. 従って, $\lambda = 0$ なら必然的に $c(1) = 0$.

文 献

- [1] H. Bethe, ZS. f. Physik 71 (1931) 205-226.
- [2] S. Katsura, Ann. of Phys. 31 (1965) 325-341.
- [3] A. O. Guelfond, Calcul des différences finies, Dunod, 1963.
- [4] 高木貞治, 代数的整数論, 岩波書店, 1948.