

モジュラー包含について

東京理科大学工学部 荒木 不二洋

(Huzihiro ARAKI)

ロース第2大学 Laszlo Zsidó

§1 序論

Bisognano & Wichmann [BW] は, ミンコフスキー空間 (相対論的時空) のくさび領域の中に台をもつ量子場が生じるフォン・ノイマン環の (真空ベクトルに関する) モジュラー作用素およびモジュラー共役作用素と, そのくさび領域を不変にする純ローレンツ変換およびそのくさび領域を因果的補領域 (反対側のくさび領域) に写す TCP_1 作用素などの相対論的変換の表現作用素とが一致するという発見をした。

最近になって, Borchers [Bo 1] はこの関係のひとつの重要な数学的側面を, 巡回分離的ベクトル Ω をもつフォン・ノイマン環 M と, 正の生成作用素をもち, (M, Ω) の準同型半群を誘起するユニタリ作用素の一助変数群の組という抽象的な枠組の中で定式化することに成功した。すなわち, そのような一

径数群 $U(\lambda)$ とモジュラー作用素およびモジュラー共役作用素

の交換関係（次節定理1の(1)および(2)）を導出し、くさび領域をその中へ写す（光的方向の）並行移動と上述の相対論的変換との運動論的交換関係を再現した。もちろん、モジュラー作用素およびモジュラー共役作用素が Bisognano および Wichmann の対応にならって相対論的変換であるかの如く想像すればちょうど相対論的運動の交換関係になっているという意味である。

Wiesbrück はこの研究をさらに発展させて、片側モジュラー包含という考え方を導入し、そのような包含関係にあるフォン・ノイマン環の対 $M \cap N$ の（共通の巡回分離的ベクトルに関する）モジュラー作用素（ M , N および $M \cap N'$ を考え子）が共形変換群を生成し、それぞれ（比較的単純で意味がはっきりした）ある条件をみたすⅡ型因子環の包含の同値類と2次元カイラル共形場の物理量の因子環束の同値類が1対1に対応すること示した。[Wie 1~6]

実はこの一連の理論の基礎になる定理の証明に決定的な間違がある。[Wie 6] 著者と Laszlo Zsidó はこの間違いを正して Wiesbrück の基本定理の証明を与え子とともに、一連の Borchers および Wiesbrück の定理を、巡回分離的ベクトルの場合から、正規半有限忠実な重みの場合に一般化した。
(荷重)

[A-Z] その結果を以下簡単に紹介する。

§2 主要結果

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上のフォン・ノイマン環 M が, その正規半有限忠実な重み φ に関して標準的というのは, M の左イデアル

$$\mathcal{H}_\varphi^M = \{x \in M; \varphi(x^*x) < \infty\}$$

から $\mathcal{H}$ の稠密な線形部分集合の上への写像

$$x \in \mathcal{H}_\varphi^M \longrightarrow x_\varphi \in \mathcal{H}$$

写像
線形

が次の性質をもつものである。

$$\varphi(x^*x) = \|x_\varphi\|^2, \quad ax_\varphi = (ax)_\varphi$$

ただし $x \in \mathcal{H}_\varphi^M$, $a \in M$ は任意。共役線形作用素,

$$S_\varphi : x_\varphi \longrightarrow (x^*)_\varphi$$

はその定義域

$$\{x_\varphi : x \in \mathcal{D}_\varphi^M \equiv \mathcal{H}_\varphi^M \cap (\mathcal{H}_\varphi^M)^*\}$$

の上で可閉であり, 極分解

$$\overline{S_\varphi} = J_M \Delta_M^{1/2}$$

によりモジュラー作用素 Δ_M とモジュラー共役作用素 J_M が定義される。

以下 M の部分環 N への φ の制限

$$\psi = \varphi|_N$$

も半有限であり, $y \in \mathcal{H}_\psi^N (\subset \mathcal{H}_\varphi^M)$ について $y_\psi = y_\varphi$ で,

$$\{y_\psi : y \in \mathcal{H}_\psi^N = \mathcal{H}_\varphi^M \cap N\}$$

が M で稠密である場合を考える。 N , $\mathcal{H}_\varphi^N$ についてのモジュラー作用素 Δ_N およびモジュラー共役作用素 J_N の定義は M の場合と同じである。

このような状況を, $M \cap N$ が共通の正規半有限忠実な重み φ に関し標準形にあるという。

主要結果は次のようにまとめられる。

定理 1 ヒルベルト空間 M 上, フォン・ノイマン環の包含 $M \cap N$ が共通の正規半有限忠実な重み φ に関し標準形にあり, 次の意味で負片側包含関係をもつものとする。

$$\Delta_M^{it} N \Delta_M^{-it} \subset N \quad (\forall t \leq 0)$$

このとき, $\log \Delta_M$ と $\log \Delta_N$ の定義域の共通部分は M で稠密であり, そこで定義される作用素

$$p = \frac{1}{2\pi} (\log \Delta_N - \log \Delta_M)$$

の閉包 $\bar{p}$ は正の自己共役作用素であり,

$$U(a) = \exp(i a \bar{p})$$

は次の諸性質をみたす。

BBW 関係式 (BBW = Borchers, Bisognano, Wichmann)

$$(1) \quad \Delta_M^{it} U(a) \Delta_M^{-it} = \Delta_N^{it} U(a) \Delta_N^{-it} = U(e^{-2\pi t} a)$$

$$(2) \quad J_M U(a) J_M = J_N U(a) J_N = U(-a) \quad (t, a \in \mathbb{R})$$

Longo の正準自己準同型写像

$$(3) \quad J_N J_M = U(2), \quad \gamma_2 = \text{Ad } U(2) \in \text{End } M.$$

部分環のトンネル

$$(4) \quad \Delta_N^{it} = U(1) \Delta_M^{it} U(1)^* \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$(5) \quad N = U(1) M U(1)^*$$

$$(6) \quad U(a) M U(a)^* \subset M, \quad \gamma_a = \text{Ad } U(a) \in \text{End } M \quad (\forall a \geq 0)$$

$$M \supset \gamma_1(M) = N \supset \gamma_2(M) \supset \gamma_3(M) = \gamma_2(N) \supset \dots$$

Lie 群の生成

$$(7) \quad \Delta_M^{it} \Delta_N^{-it} = U(e^{-2\pi t} - 1) \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$(8) \quad \{\Delta_M^{it} \Delta_N^{is} : s, t \in \mathbb{R}\} \text{ は } 2\pi\pi \text{ の Lie 群 を}$$

生成し, Lie 環の交換関係は

$$[i \log \Delta_N, i \log \Delta_M] = 2\pi (i \log \Delta_N - i \log \Delta_M) \\ (= 4\pi^2 i p)$$

§3 エルミート写像

上の定理の証明で重要な役割を果たすのは, 次に定義するエルミート写像の概念である。いま次の2組の標準形にあるフォン・ノイマン環が(前節で述べたように)あるものとする。たがも両者は完全に別もので, 前節のような包含関係は必要としない。(包含関係があっても差し支えない。)

$$M, \mathcal{N}, \varphi, \mathcal{M}_\varphi^M, S_\varphi, \Delta_M, J_M$$

$$N, \mathcal{K}, \psi, \mathcal{M}_\psi^N, S_\psi, \Delta_N, J_N.$$

定義 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{N})$ について,

$$TK^{S_\psi} \subset \mathcal{N}^{S_\varphi}$$

のとき, T は (ψ, φ) に関し エルミート写像 であるという。

ただし,

$$\mathcal{N}^{S\psi} \equiv \{ \eta \in \text{Dom } \overline{S_\varphi} : \overline{S_\varphi} \eta = \eta \}$$

$$\mathcal{K}^{S\psi} \equiv \{ \xi \in \text{Dom } \overline{S_\varphi} : \overline{S_\varphi} \xi = \xi \}$$

Dom は定義域を表わす。

また任意の $x \in \mathcal{H}_\psi^N$ に対し

$$T x T^* \in \mathcal{M}_\varphi^M, \quad (T x T^*)_\varphi = T x_\varphi$$

が成り立つとき, T は ψ を φ で 実現する という

補題

$$(1) \mathcal{N}^{S\psi} = \overline{\{ y_\psi : y = y^* \in \mathcal{O}_\psi^M \}}$$

$$\mathcal{K}^{S\psi} = \overline{\{ x_\psi : x = x^* \in \mathcal{O}_\psi^N \}}$$

$$(2) \text{Dom } \overline{S_\psi} = \text{Dom } \Delta_N^{1/2} = \mathcal{K}^{S\psi} + i \mathcal{K}^{S\psi}$$

$$\text{Dom } \overline{S_\varphi} = \text{Dom } \Delta_M^{1/2} = \mathcal{N}^{S\varphi} + i \mathcal{N}^{S\varphi}$$

(3) $T \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{N})$ が ψ を φ で実現すれば, T は (ψ, φ) に関してエルミート写像であり, $T N T^* \subset M$ である。

(4) T が等長で ψ を φ で実現すれば,

$$x \in N \longrightarrow T x T^* \in M$$

は単射 * 同形写像であり, 任意の $0 \leq a \in \mathcal{M}_\psi^N$ について

$$\psi(a) = \varphi(T^* a T)$$

が成立する。

定理 2 次の条件 (1) ~ (8) は互に同値である。

(1) T は $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ に関してエルミート写像である。

(2) $x = x^* \in \mathcal{O}_\varphi^N$ ならば $Tx_\varphi \in \mathcal{H}^S_\varphi$ である。

(3) $x = x^* \in \mathcal{O}_\varphi^N$, $y = y^* \in \mathcal{O}_\varphi^M$ ならば

$$(Tx_\varphi, J_M y_\varphi) \in \mathbb{R}.$$

(4) $x \in \mathcal{O}_\varphi^N$, $y \in \mathcal{O}_\varphi^M$ ならば

$$(Tx_\varphi, J_M y_\varphi) = (J_M (y^*)_\varphi, T(x^*)_\varphi)$$

(5) $T\overline{S}_\varphi \subset \overline{S}_\varphi T$

(6) $\text{Dom}(\Delta_M^{1/2} T \Delta_N^{-1/2}) = \text{Dom}(\Delta_N^{-1/2})$ であって、

任意の $\xi \in \text{Dom}(\Delta_N^{-1/2})$ について次式が成立する。

$$\Delta_M^{1/2} T \Delta_N^{-1/2} \xi = J_M T J_N \xi.$$

(7) $J_N T^* J_N$ は $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ に関してエルミート写像である。

(8) $s \in \mathbb{R} \rightarrow \Delta_M^{is} T \Delta_N^{-is}$ は複素変数

$$z \in \overline{S}_{-1/2} \rightarrow T(z) \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H}) \text{ に解析接続される。}$$

$$(S_\beta = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \beta^{-1} \text{Im } z < 1\}, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0)$$

$$\begin{cases} T(z) : \text{作用素強位相で連続} \\ T(z) \in H^{\infty}(S_{-1/2}) = \{S_{-1/2} \text{ 上の有界解析関数全体} \} \\ T(-\frac{i}{2}) = J_M T J_N \end{cases}$$

上の条件が満たされれば

$$T(z+t) = \Delta_M^{it} T(z) \Delta_N^{-it} \quad (z \in \overline{S}_{-1/2}, t \in \mathbb{R}),$$

$$T(s - \frac{i}{2}) = J_M T(s) J_N \quad (s \in \mathbb{R}).$$

§ 4 Borchers の構造定理の一般化

まず準備として解析接続に関する定理を述べる。

定理 3 A, B はそれぞれ $\mathcal{M}, \mathcal{K}$ 上の正作用素で非特異とし, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{M})$ とする。次の条件は同値である。

(a) $s \in \mathbb{R} \rightarrow A^{is} T B^{-is}$ は次の“解析接続”をもつ。

$$z \in \overline{S_\beta} \rightarrow T(z) \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{M}),$$

$T(z)$ は $\overline{S_\beta}$ で作用素強位相で連続,

$$T(z) \big|_{S_\beta} \in H^\infty(S_\beta)$$

(b) 上の条件で作用素強位相と作用素弱位相としたもの。

(c) $\exists B_0$: Borel 集合, $\mu(B_0) \neq 0$ (μ : ルベーグ測度)

任意の $\xi \in \mathcal{K}, \eta \in \mathcal{M}$ に対し $f_{\xi, \eta} \in H^\infty(S_\beta)$ が存在して

$$\lim_{\beta t \rightarrow +0} f_{\xi, \eta}(s+it) = (A^{is} T B^{-is} \xi, \eta) \quad (\text{a. a. } s \in B_0)$$

(d) $A^{-\beta} T B^\beta$ は B^β の core の上で定義されて有界。

(e) $\text{Dom}(A^{-\beta} T B^\beta) = \text{Dom}(B^\beta)$, $A^{-\beta} T B^\beta$ は有界。

以上の条件が満たされているとき, 次が成立する。

$$\text{Dom}(A^{iz} T B^{-iz}) = \text{Dom}(B^{-iz}) \quad (z \in S_\beta)$$

$$A^{iz} T B^{-iz} \subset T(z) \quad (z \in S_\beta)$$

$$A^{it} T(z) B^{-it} = T(z+t) \quad (t \in \mathbb{R}, z \in \overline{S_\beta})$$

定理 1 の証明ではこの定理を 2 回使う。最初は $\mathcal{K} = \mathcal{M}$, $T = \mathbb{1}$,

$A = \Delta_M$, $B = \Delta_N$, $\beta = \frac{1}{2}$, 2 回目は非自明な T についてである。

定理 4 (Borchers の構造定理の一般化)

$\beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0, \mu(E_0) = \mu(E_1) = 0$ (E_0, E_1 は $\mathbb{R}$ 上ボレル集合)
とし, $T(z) \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ は $z \in \overline{S}_\beta, z \notin E_0 \cup E_1 + i\beta$ に対
し与えられていて, 一様有界, S_β で正則, かつ

(i) $T(s)$ は (ψ, φ) に関しエルミート写像 ($s \in \mathbb{R}, s \notin E_0$),

$$T(s) = w\text{-}\lim_{\beta t \rightarrow +0} T(s + it) \quad (\text{作用素弱位相})$$

(ii) $J_M T(s + i\beta) J_N$ は (ψ, φ) に関しエルミート写像で

$$T(s + i\beta) = w\text{-}\lim_{(s/\beta) \rightarrow 1-0} T(s + it) \quad (\text{作用素弱位相})$$

ただし, $s \in \mathbb{R}, s \notin E_1$.

の 2 条件をみたすとき, 次が成立する。

$\exists T \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$:

$$T(s) = \Delta_M^{-i(s/2\beta)} T \Delta_N^{i(s/2\beta)}$$

$T(s)$ は $z \in \overline{S}_\beta$ で $T(z)$ に「解析接続」され,

$T(0) = T$, $\overline{S}_\beta$ 上 $T(z)$ は作用素弱位相で連続,

$$T(z + 2\beta t) = \Delta_M^{-it} T(z) \Delta_N^{it} \quad (z \in \overline{S}_\beta, t \in \mathbb{R})$$

$$T(s + i\beta) = J_M T(s) J_N \quad (s \in \mathbb{R}).$$

定理 4 の証明の概要

最初にこの証明の特徴を列挙する。まず Borchers の定理では 2 変数の解析関数の正則領域の拡大に関し, 境界での振舞を含めた微妙な議論を用いるが, ここではそれを非常に簡単化して, 一変数解析関数についての「くさびの刃の定理」(い

くつかの成書に証明があり、Cauchyの積分定理で簡単に証明
 ができる)と、2変数の場合のOsgoodの定理(連続性がわか
 っている場合のHartogの定理)だけである。またエルミ
 ト写像の条件を使うだけで、重みの実現を仮定しなくてもよ
 い。そのほか、連続性に関しても、境界の垂直方向からの弱
 連続性だけを仮定し、それも測度0の例外点集合(連続性を
 仮定しない点)を許容する。この最後の点は 主要結
 果の証明に応用すると是非必要になる。これらの弱い仮定
 から閉単位領域の任意の点(内部では正則なので境界点が問
 題となる)で連続になり、特に例外点であらかじめ 作用
 素が定義できていなくても、あらゆる方向から連続でありよ
 うに定義できるところが大変応用で役に立つ。主要結果の証
 明への応用では、例外点は1点であるが、結果的に散乱理論
 で波動作用素とよばれるものの存在(も無限大の極限の存在)
 を証明したことになっているのは興味深い。既に序論で述べ
 たように、Borchersの結果は巡回分離ベクトルの場合につい
 てであったものを、正規半有限忠実な重みの場合に拡張した
 結論になっている。

証明の概要に入る。証明のひとつの道具は指数型の富田環

$$\mathcal{G}_\varphi = \left\{ w - \int_{\mathbb{R}} f(t) \sigma_t^\varphi(x) dt : x \in \mathcal{O}_\varphi^M, f \in L^1(\mathbb{R}), \right. \\ \left. f \text{ の 台 : コンパクト} \right\}$$

(w - $\int$ は作用素弱位相での積分) であり, これが自動的に正則性を与えてくれるので証明が簡単になる。すなわち, $y \in G_\varphi$ に対し, $\Delta_M^{iz} y_\varphi$ および $\sigma_2^\varphi(y)$ は $\mathcal{M}$ および M の元として, z の指数型整関数である。しかも y_φ ($y \in G_\varphi$) は $\mathcal{M}$ で稠密である。同様に, N, ψ に関する副因子環 G_ψ を定義する。

このとき任意の $x \in G_\psi$, $y \in G_\varphi$ に対し,

$$f_1(z_1, z_2) = (T(z_2) \Delta_N^{-iz_1} x_\psi, J_M \Delta_M^{-iz_1} y_\varphi)$$

$$f_2(z_1, z_2) = (\Delta_M^{-iz_1 + (i/2)} y_\varphi, T(\bar{z}_2) J_N \Delta_N^{-iz_1 + (i/2)} x_\psi)$$

f_1 は $\mathbb{C} \times \overline{S}_\beta$, f_2 は $\mathbb{C} \times \overline{S}_{-\beta}$ で定義され, それぞれ $S_\beta, S_{-\beta}$ で正則である。さらに $T(s)$ がエルミート写像であることから,

$$f_1(z, s) = f_2(z, s) \quad (s \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}, s \notin E_0)$$

が云える。したがって一変数の「くさびの刃の定理」(Morera の定理と云われる)により,

$$z_1 \in \mathbb{C}, \quad z_2 \in S_\beta \cup S_{-\beta} \cup (\overline{S}_\beta \cap \overline{S}_{-\beta}) = \{z \in \mathbb{C}; |\operatorname{Im} z| < \beta\}$$

で正則な関数 $F(z_1, z_2)$ が存在して

$$F(z_1, z_2) = f_1(z_1, z_2) \quad (z_2 \in \overline{S}_\beta)$$

$$= f_2(z_1, z_2) \quad (z_2 \in \overline{S}_{-\beta})$$

となる。さらに $J_M T(s + i\beta) J_N$ のエルミート性から,

$$F(z_1 + (i/2), s + i\beta) = F(z_1 - (i/2), s - i\beta)$$

$$(s \in \mathbb{R}, z_1 \in \mathbb{C}, s \notin E_1)$$

が得られ, $F(z_1, z_2)$ は $(i, 2\beta i)$ を周期とする 2 変数の

整関数であることがわかる。(Moreiraの定理では、測度0の例外実数集合 E_0, E_1 は、Cauchy積分に影響を与えないので許容されることに注意。)

したがって、 $s \in \mathbb{R}$ を固定したとき

$$g(z) = F(z, s + 2\beta z)$$

は z の有界周期的整関数になり、 z に無関係な定数になる。

とくに $g(z) = g(0)$, すなわち $F(0, s) = F(-s/2\beta, 0)$ であることから

$$T(s) = \Delta_M^{-is/2\beta} T(0) \Delta_N^{is/2\beta}$$

と云う結論が得られる。

E_0, E_1 の例外実や弱位相で E_0, E_1 以外での垂直方向での連続性という弱い仮定が真になる人には、次の方法がある。

$$T_n(z) = w \cdot \int_0^\infty T(z+t) f_n(t) dt, \quad f_n(t) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} e^{-nt^2}$$

とみると、 $T_n(z)$ は E_0 や E_1 の例外実もなく、また $\bar{S}_\beta$ での作用素弱位相での連続性を(境界を含めて)含めて、 $T(z)$ の仮定を満たすので、上記の証明が必然なく適用できて、

$$T_n(z) = \Delta_M^{is/2\beta} T_n \Delta_N^{-is/2\beta}$$

が成立する。ここに $T_n = T_n(z)$ である。

$z \in S_\beta$ では $T_n(z) \rightarrow T(z)$ となり、上の等式が

$$T(z+s) = \Delta_M^{is/2\beta} T(z) \Delta_N^{-is/2\beta}$$

の形で成立する。そこで $s_0 \in \mathbb{R}$, $s_0 \notin E_0$ を固定し、

$$T = \Delta_M^{-i(s_0/2\beta)} T(s_0) \Delta_N^{i(s_0/2\beta)}$$

とあく、境界に垂直方向の弱連続性から、 $s \in \mathbb{R}$, $s \notin E_0$ で

$$T(s) = \Delta_M^{i(s/2\beta)} T \Delta_N^{-i(s/2\beta)}$$

が示される。そこで $y \in \mathcal{G}_\varphi$, $x \in \mathcal{G}_\psi$ に對して

$$(T \Delta_M^{i(z/2\beta)} x, \Delta_N^{i(\bar{z}/2\beta)} y)$$

は z の整関数であり、 $z \in \mathbb{R}$, $z \notin E_0$ では、

$$(T(z) x, y)$$

に一致するので、解析接続の一貫性 (Osgood の定理 2 の
関数の差 ($z \in \bar{S}_\beta$) と $z \in \bar{S}_{-\beta}$ における 0 とに適用すればよい。)

により

$$T(z) = \Delta_M^{i(z/2\beta)} T \Delta_N^{-i(z/2\beta)} \quad (z \in \bar{S}_\beta)$$

が得られると同時に、例外集 E_0 , E_1 にも $T(z)$ が拡張されて、
 $T(z)$ は $\bar{S}_\beta$ で作用素強連続になる。

§5 主要結果の証明の概要

(i) まず $\mathcal{H} = \mathcal{K}$, $\varphi = \varphi|_N$, $T = 1$ とおく。

定理 2 の (1) は $T = 1$ で満たされるので、条件 (8) から

$$T(t) = \Delta_M^{it} \Delta_N^{-it}$$

の解析接続 $T(z) \in H^\infty(S_{-1/2})$ が得られて、 $\bar{S}_{-1/2}$ で

$$\|T(z)\| \leq 1$$

をみたす。

(ii) 次に $\zeta \in \overline{S}_{-1/2}$ に対し

$$W(\zeta) = T(-\zeta)^*$$

を定義すると,

$$W(t) = \Delta_N^{-it} \Delta_M^{it} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

となり,

$$W(t - \frac{i}{2}) \quad (t \in \mathbb{R}), \quad W(t) \quad (t \in \mathbb{R}, t \leq 0)$$

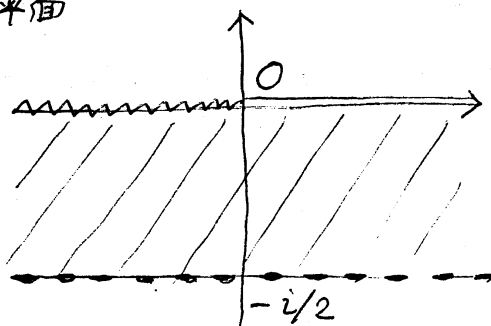
$$J_N W(s) J_N \quad (s \in \mathbb{R}, s \geq 0)$$

がすべて (Ψ, Ψ) についてエルミート写像になる。

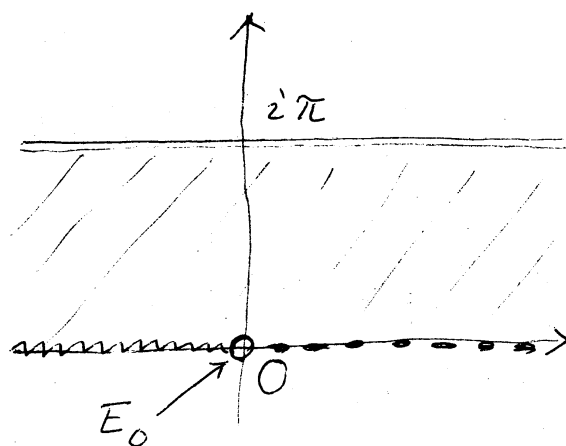
(iii) そこで次の変数変換を行う。

$$\zeta \in \overline{S}_{-1/2} \longrightarrow z(\zeta) = \log(1 - e^{2\pi\zeta}) \in \overline{S}_\pi$$

ζ -平面



z -平面



$$\zeta = -\infty \longrightarrow z = 0$$

$$\zeta = \tau 0 \longrightarrow z = -\infty$$

$$\zeta = +0 \longrightarrow z = i\pi - \infty$$

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} \log(1 - e^z)$$

この変換により $Z(z)$ を次のように定義する

$$Z(z(\zeta)) = W(\zeta) \quad (Z(z) = W(\frac{1}{2\pi} \log(1 - e^z)))$$

(iv) $Z(z)$ は Borchers の構造定理の条件を満たすので、

($\nabla =$) $Z(0) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \Delta_N^{-it} \Delta_M^{it}$ (波動作用素)
が存在して

$$Z(z - 2\pi t) = \Delta_N^{it} Z(z) \Delta_N^{-it}.$$

ただし $E_0 = \{0\}$, $E_1 = \emptyset$ にとる。

(v) さらに変数変換 $w = e^z$ を行い

$$V(e^z) = Z(z) \quad (V(w) = Z(\log w))$$

を $\mathbb{C}_+$ で正則, $\overline{\mathbb{C}_+}$ で連続な関数として

$$w \in \mathbb{C}_+ = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}$$

で定義する。次式が成り立つ

$$\|V(w)\| \leq 1$$

(vi) $V(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) が一変数群であることを示せる。

$$V(x) V(y) = V(x+y)$$

したがって

$$V(t) = e^{itP}.$$

$\|V(t)\| \leq 1$ より

$$P \geq 0$$

がわかる。あとで $P = \overline{P}$, $V(x) = U(x)$ がわかる。その前に

$U(x) = V(x)$ について, (1) ~ (8) の性質を容易に示すこと

ができる。したがって, Lie 群のユニタリ表現の一般論から,

P が本質的に自己共役で, $P = \overline{P}$ であることがわかる。

参考文献

- [A-Z] H. Araki & L. Zsidó, Extension of the structure theorem of Borchers & its application to half-sided modular inclusions. (In preparation.)
- [B-W] J. Bisognano & E. Wichmann, On the duality condition for a Hermitian scalar field, *J. Math. Phys.* 16 (1975), 985-1007.
- [Bo1] H. J. Borchers, The CPT-theorem in two-dimensional theories of local observables, *Commun. Math. Phys.* 143 (1992), 315-332.
- [Bo2] H. J. Borchers, On the use of modular groups in quantum field theory, *Ann. Inst. Henri Poincaré — Physique-Théorique* 63 (1995), 331-382.
- [Bo3] H. J. Borchers, Tensor Product decomposition in quantum field theory, Oberwolfach lecture, March 1997.
- [Wie1] H.-W. Wiesbrock, Half-sided modular inclusions of von Neumann algebras, *Commun. Math. Phys.* 157 (1993), 83-92.
- [Wie2] H.-W. Wiesbrock, Symmetries and half-sided modular inclusions of von Neumann algebras, *Lett. Math. Phys.* 28 (1993), 107-114.

- [Wie 3] H.-W. Wiesbrock, Superselection structure of conformal field theory on the circle and localized Connes' cocycles, *Rev. Math. Phys.* 7 (1995), 133-160.
- [Wie 4] H.-W. Wiesbrock, A note on strongly additive conformal field theory and half-sided modular standard inclusions, *Lett. Math. Phys.* 31 (1994), 303-307.
- [Wie 5] H.-W. Wiesbrock, Conformal quantum field theory and half-sided modular inclusions of von Neumann algebras, *Commun. Math. Phys.* 158 (1993), 537-543.
- [Wie 6] H.-W. Wiesbrock, Erratum: Half-sided modular inclusions of von Neumann algebras, *Commun. Math. Phys.* 184 (1997), 683-685.