

1

①

PC-foliation について

京大理 足立正久

$\Gamma_q^{\mathbb{C}}$ を $\mathbb{C}^q$ の local analytic automorphisms の germs のつくる topological groupoid. とし, $B\Gamma_q^{\mathbb{C}}$ をその分類空間とする (Burrer-Lov の「4」). differential をとることにより次の連続写像をうる:

$$\nu: \Gamma_q^{\mathbb{C}} \rightarrow GL(q, \mathbb{C}).$$

これは次の連続写像を induce する; これも同じ ν でかく:

$$\nu: B\Gamma_q^{\mathbb{C}} \rightarrow BGL(q, \mathbb{C}).$$

この ν の homotopy fibre は $F\Gamma_q^{\mathbb{C}}$ とかく. ($B\Gamma_q^{\mathbb{C}}$ とかくことも多い).

この $F\Gamma_q^{\mathbb{C}}$ のホモトピー一群はついで次のことが知られている:

$$1971 \text{ A. Haefliger [4] } \pi_i(F\Gamma_q^{\mathbb{C}}) = 0, \quad i \geq 1.$$

$$1974 \text{ P. Landweber [6] } \pi_i(F\Gamma_q^{\mathbb{C}}) = 0, \quad i < q.$$

$$1977 \text{ M. Adachi [1] } \pi_q(F\Gamma_q^{\mathbb{C}}) = 0.$$

$$197? \text{ W. Thurston } \pi_2(F\Gamma_1^{\mathbb{C}}) = 0.$$

$$1971 \text{ R. Bott [2] } \pi_{2q+1}(F\Gamma_q^{\mathbb{C}}) \neq 0.$$

そこで次のことが予想される,

予想: $\pi_{q+r}(F\Gamma_q^{\mathbb{C}}) = 0$, $0 < r \leq q-2$.

この予想が正しいければ, "偶数次元の open manifold の上の almost complex structure は homotopic に "かせる" integrable にできる" ことがわかる. (Haefliger の classification theorem 54).

上の予想に近づくために PC-manifold の上には PC-foliation という概念を導入して考えてみる方がうまくいかなうか.

1. PC-foliations on PC-manifolds.

M は n 次元の $\mathbb{C}^{\omega}$ -manifold, $n = 2p + q$ とする.

Def. M の上の PC-structure of type (p, q) とは, $T(M)$ の complexification $\mathbb{C}T(M)$ の p 次元 subbundle S に対する条件を満足するもの:

$$i) \quad S \cap \bar{S} = \{0\},$$

$$ii) \quad T(M) \sim \mathbb{R}^{2p} \oplus \mathbb{R}^q, \quad \mathbb{C}T(M) \sim (S \oplus \bar{S}) \oplus (\mathbb{R}^q \otimes \mathbb{C}),$$

$$iii) \quad [\Gamma(S), \Gamma(S)] \subset \Gamma(S),$$

ここで $\Gamma(S) = \{S \text{ の } C^{\infty}\text{-cross-section}\}$.

Note: PC-structure については Tanaka [7] を参照,
Kuranishi [5] では CR-structure と呼んでいる.

S は M の上の PC-structure of type (p, q) とし, (M, S) は PC-manifold of type (p, q) とする.

§11.1. $M: \mathbb{C}^\omega\text{-manifold} \Rightarrow M$ is $PC\text{-manifold of type } (0, n)$
 $\hookrightarrow$ 考えさう。

§11.2. $M: \text{complex manifold of complex dimension } n$
 $\Rightarrow M: PC\text{-manifold of type } (n, 0) \hookrightarrow$ 考えさう。

§11.3. $M = \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^q, n = 2p + q.$

$\Rightarrow M$ is naturally $PC\text{-structure of type } (p, q)$ である。

次に $PC\text{-structure}$ に関する基本的な性質を述べよう。(cf. Kuranishi [5], Tanaka [7]).

Def. $(M, S_M), (V, S_V) \in PC\text{-manifold}$ とする。 $f: M \rightarrow V \in \mathbb{C}^\omega\text{-map}$ とする。 f が次の条件を満足するとき、
 $f \in PC\text{-map}$ あるいは holomorphic とする:

$$df: T(M) \rightarrow T(V), \quad \mathbb{C}(df): \mathbb{C}T(M) \rightarrow \mathbb{C}T(V),$$

$$\mathbb{C}(df)(S_M) \subset S_V.$$

Proposition 1. $M \in PC\text{-manifold of type } (p, q), n = 2p + q$
 $\hookrightarrow$ である。

i) $\exists (j, W): W: \text{complex manifold of dim } p + q,$

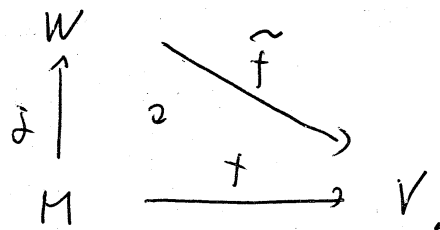
$$j: M \rightarrow W, \text{ holomorphic embedding,}$$

such that $\forall V: \text{complex manifold,}$

$$\forall f: M \rightarrow V, \text{ holomorphic map,}$$

$$\exists \tilde{f}: W \rightarrow V, \text{ holomorphic map,}$$

次の図式が成立:



ii) 上のような (j, W) は germ の "only" unique.
 あるわけ、 $(j, W), (j', W')$ と 2 つあったとすると、

$$j(M) \subset \overset{\exists}{\sigma'} \subset W,$$

$$j'(M) \subset \overset{\exists}{\sigma'} \subset W',$$

$$\exists h: \sigma \rightarrow \sigma', \text{ biholomorphic home.}$$

次の図式は可換:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{j} & \sigma \subset W \\ & \searrow j' & \downarrow h \\ & & \sigma' \subset W'. \end{array}$$

上の (j, W) , ある n はその germ $\in M$ の PC-loc とする.
 $PC(M)$ とかく。また上の $\tilde{f} \in f$ の PC-loc とする $PC(f)$ とかく。

例 1. $M^n = S^{n-1} \times \mathbb{R}^1, \quad n: \text{even}.$

$$M^n = S^{n-1} \times \mathbb{R}^1 \simeq \mathbb{R}^n - \{0\} \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{C}^{\frac{n}{2}}.$$

M^n は上の f には PC-manifold of type $(\frac{n}{2}, 0)$ と考えられ、
 $PC(M^n) = \mathbb{C}^{\frac{n}{2}} - \{0\}.$

例 2. $M^n = S^{n-1} \times \mathbb{R}^2 = (S^{n-1} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \quad n: \text{even}.$

M は $(\tilde{g}, h)$ に PC-structure of type $(\frac{n}{2}, 1)$ $\exists$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ $\alpha \in \mathbb{Z}$, $PC(M) = (\mathbb{C}^{\frac{n}{2}-1} \times \mathbb{C})^{\alpha}$.

Proposition 2. (M, S) $\in$ PC-manifold of type (p, q) $\Leftrightarrow$ $\exists$ $(j, W) \in (M, S)$ の PC-rc $\Leftrightarrow$ $\exists$ $\alpha \in \mathbb{Z}$,

$j^* T(W) \sim \xi_{\mathbb{C}} \oplus \eta^q \oplus \mathbb{C}$, (complex vector bundle π_1),
 $\Leftrightarrow$ $\exists$ $T(M) \sim \xi^{2p} \oplus \eta^q$, $\xi_{\mathbb{C}}$ は ξ^{2p} の complex reduction.

Remark. (M, S) : PC-manifold of type (p, q) , $\sigma \in M$ の open set $\Leftrightarrow$ $\exists$ $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\sigma \sim (\tilde{g}, h)$ に PC-structure of type (p, q) $\Leftrightarrow$ $\exists$.

Definition (M, S) : PC-manifold of type (p, q) ,

V : complex manifold.

$f: M \rightarrow V$. PC-map.

$\Leftrightarrow$ $\exists$ f $\wedge$ 次の条件 $\exists$ 満足 $\exists$ $\Leftrightarrow$ $f \in$ PC-submersion

$\Leftrightarrow$ $\exists$ $PC(f): W \rightarrow V$ $\wedge$ holomorphic submersion,

$\Leftrightarrow$ $\exists$ (j, W) は M の PC-rc.

Definition (M, S) $\in$ PC-manifold of type (p, q) $\Leftrightarrow$ $\exists$ $\exists$.

$\mathcal{G} = \{(V_{\alpha}, g_{\alpha}) ; \alpha \in A\}$ $\wedge$ PC-foliation of codim. r on M

$\Leftrightarrow$ $\exists$,

i) $M = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$, open covering.

ii) $g_{\alpha}: V_{\alpha} \rightarrow \mathbb{C}^r$, PC-submersion,

iii) $V_{\alpha} \cap V_{\beta} \neq \emptyset$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ α, β , continuous map $g_{\alpha\beta}$:

$$V_\alpha \cap V_\beta \rightarrow \Gamma_r^G \text{ が存在して,}$$

$$g_\alpha(x) = g_{\alpha\beta}(x) \cdot g_\beta(x), \quad x \in V_\alpha \cap V_\beta.$$

2 つの PC-foliation of codim. r on M の (b) の equivalence は小
うの foliation のときと同様に定義する。

$M \in \text{PC-manifold of type } (p, q), (j, W) \in M$ の PC-
化とする。

Lemma 1. $\mathcal{F}$ は holomorphic foliation of codim. r on W
 $\Rightarrow \mathcal{F}|_M = j^* \mathcal{F}$ は PC-foliation of codim. r on M .

Proof. やさしい。

$$\begin{array}{ccc} \text{Lemma 2} & \left\{ \begin{array}{l} \text{holomorphic foliation of codim. } r \\ \text{on } W \end{array} \right\} & \xleftrightarrow{|\cdot|} \left\{ \begin{array}{l} \text{PC-foliation of} \\ \text{codim. } r \text{ on } M \end{array} \right\} \\ & \downarrow \sim & \downarrow \sim \\ & \{ \mathcal{F} \} & \longrightarrow \{ \mathcal{F}|_M = j^* \mathcal{F} \} \end{array}$$

は bijective, 左の $\sim$ は germ のこと。

Proof. inj: 一対一の定理

surj: PC-foliation のときと同様にしてできる。Prop. 1 を
用いる。

2.

は (i) の $\sim$ の予想を示すには「PC-foliation」に注意する。

Gromov-Phillips の transversality theorem が Key となる。これは
証明できる。反例もあるから注意。

3. 偶数次元 closed manifold に almost complex structure は
 つか、 complex structure を持つものから $\cong$ である
 こと (cf. van de Ven [8], S.-T. Yau [9]).

References

- [1] M. Adachi, A note on complex structures on open manifolds,
 J. Math. Kyoto Univ., 17(1977), 35-46.
 J.
- [2] R. Bott, On Lefschetz formula and exotic characteristic classes,
 Symposia Math., 10(1972), 95-105.
- [3] A. Haefliger, Feuilletages sur les variétés ouvertes,
 Topology, 9(1970), 183-194.
- [4] A. Haefliger, Homotopy and integrability,
 Lecture Notes in Math. Springer, 197(1971), 133-163.
- [5] M. Kuranishi, Isolated singularities and $\bar{\partial}_b$
 京大 数研 174P-1-1.
- [6] P. Landweber, Complex structures on open manifolds,
 Topology, 13(1974), 69-75.
- [7] N. Tanaka, A differential geometric study on strongly pseudo-
 convex manifolds, Lecture Notes in Math. Kyoto Univ., 9(1975).
- [8] A. van de Ven, On the Chern numbers of certain complex and
 almost complex manifolds, Proc. Nat. Acad. Sci. USA., 55(1966),

1624-1627.

- [9] S.-T. Yau, Parallelizable manifolds without complex structure,
Topology, 15(1976), 51-53.