

アフィン対称空間上の pseudo-laplacian の大域的可解性について

広大

木幡篤孝

田中 誠

§0 Introduction

C^∞ -多様体 M 上の微分作用素 P , M 上の C^∞ -関数 f を与えたとき, 微分方程式

$$(*) \quad Pu = f$$

を考える。微分方程式 $(*)$ の C^∞ -解の存在を論じる問題は色々な人達によって研究されてきた。1972 年には A. Cérèzo と F. Rouvière が論文 [1] の中で M を複素連結半単純リー群とし, P を M 上のカシミール作用素としたとき, 微分方程式 $(*)$ の大域的 C^∞ -解の存在を証明した。又同論文の中で複素カシミールの虚数部分を P としたときは微分方程式 $(*)$ は必ずしも大域的解をもつとは限らないことを示した。1973 年には S. Helgason が論文 [2] の中で M を非有界対称空間 G/K とし, P を M 上の零でない G -不変な微分

作用素のとき微分方程式(*)の大域的 C^∞ -解の存在を証明した。

J. Rauch と D. Wigner は 1976 年に論文 [4] で A. Cérézo と F. Rouvière の結果を更に M を中心有限な非有界半単純リー群とし, P を M のカシミール作用素の場合に拡張したが, その論文の中で微分方程式(*)が大域的 C^∞ -解をもつための十分条件を次のように与えた。

- (1) 微分作用素 P は real symbol P_m をもち $P^*P = P$ をみたす。
- (2) P の principal symbol が生じられる Hamiltonian vector field の積分曲線を考える。 $P_m(x_0, \xi_0) = 0$ ($\xi_0 \neq 0$) とする点 (x_0, ξ_0) を通る $T^*(M)$ の積分曲線を M 上に Projection したとき, M の compact なところにおちていない。
- (3) $u \in C^\infty(M)'$, $Pu = 0 \Rightarrow u = 0$
- (4) $M \supset \forall \Gamma: \text{compact}$ に対し次の条件をみたす $M \supset \widehat{\Gamma}$: compact が存在する。
 - (i) $\Gamma \subset \text{Int } \widehat{\Gamma}$
 - (ii) $u \in C^\infty(M)'$, $\text{supp } Pu \subset \Gamma \Rightarrow \text{supp } u \subset \widehat{\Gamma}$

さて G をリー群とし σ を G の involutive automorphism とし, G_σ を σ の fix element 全体の作る G の部分群とする。

$(G\sigma)_0 \subset H \subset G\sigma$ とする G の閉部分群 H に対し, 等質空間 G/H をアフィン対称空間と呼ぶ。特に σ を G の Cartan involution とすれば G/H は対称空間となる。又 $G \times G$ の involution を $\sigma(x, y) = (y, x)$ で定義すれば $(G \times G)_\sigma = \Delta G$ となり,

$G \times G / \Delta G \ni (g_1, g_2) \Delta G \longmapsto g_1 g_2^{-1} \in G$ は C^∞ -同型対応となるが, この対応によってリー群 G はアフィン対称空間の特別の場合とみなすことができる。

そこで残すは S. Helgason の結果並びに J. Rauch と D. Wigner の結果と一般のアフィン対称空間 G/H に拡張して考え, J. Rauch と D. Wigner らの得た条件 (1) ~ (4) を示すことによって次の結果を得た。

G を中心有限な非有界連結実半単純リー群で, G/H をアフィン対称空間とし, P を G/H 上の pseudo-laplacian とすると, 微分方程式 (*) は大域的な C^∞ 解をもつ。

§ 1. Notation and Preliminaries

G を中心有限な非有界実半単純リー群とし, σ を G の involutive automorphism とする。 $G_\sigma = \{g \in G; \sigma(g) = g\}$ とおき, $(G\sigma)_0$ を G_σ の単位元を含む連結成分とする。 $(G\sigma)_0 \subset H \subset G_\sigma$ をみたす G の閉部分群 H を固定する。 G のリー環を $\mathfrak{g}$ とし,

$\mathfrak{g}$ の involution σ による固有値分解で固有値 1 に対応する空間を $\mathfrak{f}$, 固有値 -1 に対応する空間を $\mathfrak{g}$ であらわす。つまり $\mathfrak{f} = \{X \in \mathfrak{g}; \sigma(X) = X\}$, $\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{g}; \sigma(X) = -X\}$ とおくと, $\mathfrak{f}$ はリ-群 H に対応するリ-環となり, $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} + \mathfrak{g}$ は直和分解となる。 θ を $\mathfrak{g}$ の σ と可換な involution とし, θ による Cartan 分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ とする。このとき $\mathfrak{g}$ は次の 4 つの部分空間の直和に分解される; $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{k}$, $\mathfrak{f} \cap \mathfrak{k}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}$, $\mathfrak{f} \cap \mathfrak{p}$. $\mathfrak{g}$ の基底を次の条件を満たすようにとる;

$$\begin{array}{cccc} \mathfrak{g} \cap \mathfrak{k} & \mathfrak{f} \cap \mathfrak{k} & \mathfrak{g} \cap \mathfrak{p} & \mathfrak{f} \cap \mathfrak{p} \\ \hline X_1, \dots, X_p & X_{p+1}, \dots, X_r & Y_1, \dots, Y_s & Y_{s+1}, \dots, Y_t \end{array}$$

$$B(X_i, X_j) = -\delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq r)$$

$$B(Y_i, Y_j) = +\delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq s)$$

但し B は $\mathfrak{g}$ の Killing 形式とする。

G のカシミール C はこれらの基底で $C = -\sum_{i=1}^r X_i^2 + \sum_{j=1}^s Y_j^2$ と表わされる。 $X \in \mathfrak{g}$ に対し $(X^* f)(gH) = \frac{d}{dt} f(e^{tX} gH) \big|_{t=0}$

と定義する ($f \in C^\infty(G/H)$) ことにより $\mathfrak{g}$ の元はアフィン対称空間 G/H の一階の微分作用素と定義する。この定義を $\mathfrak{g}$ の展開環 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ に拡張することによりカシミール $C \in G/H$ 上の微分作用素と考えることができるが, よく知られているようにこの微分作用素は G/H の pseudo-laplacian となる。

さて G/H 上の接ベクトル束 $T(G/H)$ の構造をわかりやすく

<4>

するために次の同型対応を考える。

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\sim} & T_{eH}(G/H) & \xrightarrow{\sim} & T_{xH}(G/H) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & D_x & \longrightarrow & (L_x)_* D_x \end{array}$$

$$\text{但し } D_x f = \frac{d}{dt} f(e^{tX}H) \Big|_{t=0}, \quad L_x(gH) = xgH$$

更に $G \times \mathfrak{g} \ni (x, X) \longmapsto (xH, (L_x)_* D_x) \in T(G/H)$ とする写像を考えると, $(xH, (L_x)_* D_x) = (yH, (L_y)_* D_y)$ であるための必要十分条件は $\exists h \in H \quad y = xh, Y = \text{Ad}(h^{-1})X$

である。従って $G \times \mathfrak{g} \ni (x, X), (y, Y)$ に対し

$$(x, X) \sim (y, Y) \iff y = xh, Y = \text{Ad}(h^{-1})X$$

と定義すれば、

$$G \times \mathfrak{g} / \sim \xrightarrow{\sim} T(G/H)$$

とする。以後 $G \times \mathfrak{g} / \sim$ を記号 $G_H \times \mathfrak{g}$ で表わす。

$\mathfrak{g}$ の dual space を $\mathfrak{g}^*$ で表わすと、 $T^*(G/H)$ に対しても同様の議論を行う。

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{\sim} & T_{eH}^*(G/H) & \xrightarrow{\sim} & T_{xH}^*(G/H) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \lambda & \longrightarrow & \xi_\lambda & \longrightarrow & (L_x^*)^{-1} \xi_\lambda \end{array}$$

$$\text{但し } \xi_\lambda(D) = \lambda(X_D), \quad (Df = \frac{d}{dt} f(e^{tX_D}H) \Big|_{t=0} \text{ とする } X_D \in \mathfrak{g})$$

$$\text{更に } G \times \mathfrak{g}^* \ni (x, \lambda) \longmapsto (xH, (L_x^*)^{-1} \xi_\lambda) \in T^*(G/H)$$

とする写像を考えると $(xH, (L_x^*)^{-1} \xi_\lambda) = (yH, (L_y^*)^{-1} \xi_\mu)$ であるため

の必要十分条件は $\exists h \in H, y = xh, \mu = h^* \lambda$ (即ち $h\lambda(x) = \lambda(h^{-1}x)$)
 である。従って $G \times \mathfrak{g}^* \ni (x, \lambda), (y, \mu)$ に対し

$$(x, \lambda) \sim (y, \mu) \stackrel{\text{def}}{\iff} y = xh, \mu = h^* \lambda$$

と定義すれば

$$G \times \mathfrak{g}^* / \sim \cong T^*(G/H)$$

という。以後 $G \times \mathfrak{g}^* / \sim$ を記号 $G \times_H \mathfrak{g}^*$ で表わす。

M を C^∞ -多様体とし, T^*M 上の vector field 全体を $\mathcal{X}(T^*M)$,
 T^*M 上の 1-form 全体を $\Omega^1(T^*M)$ で表わすとき, 次の同型
 が成り立つ;

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}(T^*M) & \xrightarrow{\quad} & \Omega^1(T^*M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\quad} & i(X) \Omega \quad (\Omega = d\theta) \end{array}$$

但し $\theta \in \Omega^1(T^*M)$ は次の式で与えられる; 各 $r \in T^*M$ に対
 し, $\theta_r(v) = \langle r, \pi_* v \rangle$ ($v \in T_r(T^*M)$). ここに π は
 T^*M から M 上への自然な射影とする。 $f \in T^*M$ 上の C^∞ 関数
 とするとき, $df \in \Omega^1(T^*M)$ に対し上の同型で対応する T^*M
 上の vector field を H_f で表わし, これを f に対応する Hamiltonian
 vector field と呼ぶ。

§2. Pseudo-laplacian の principal symbol に対応する
 Hamiltonian vector field

アヒル対称空間上の Pseudo-laplacian は $\mathfrak{g}$ 上のカシミール

C から得られるから同じ記号 C で, 又その principal symbol
を C で表わすことにする。principal symbol C は $T^*(G/H)$ 上の
 C^∞ 関数で, 局所座標系で考えれば, 簡単に

$$C(xH, \xi) = - \sum_{i=1}^r \langle (X_i^*)_{xH}, \xi \rangle^2 + \sum_{j=1}^s \langle (Y_j^*)_{xH}, \xi \rangle^2$$

であることがわかる。但し X_i, Y_j は $\mathfrak{g}$ の $\xi \perp$ で決められた
基底である。カシミール C は $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_C)$ の Center の元であるから,

$$\text{Ad}(x) \text{ 不変より, } C = - \sum_{i=1}^r X_i^2 + \sum_{j=1}^s Y_j^2 = - \sum_{i=1}^r (xX_i)^2 + \sum_{j=1}^s (xY_j)^2$$

となる。(但し xX は $\text{Ad}(x)X$ を表わす。以後簡単のために Ad
を省く。) 従って, $G \times \mathfrak{g}^*$ の点 (x, λ) を含む同値類を $[(x, \lambda)]$ で表すと,

$$\begin{aligned} C(xH, \xi) &= - \sum_{i=1}^r \langle (xX_i)^*_{xH}, \xi \rangle^2 + \sum_{j=1}^s \langle (xY_j)^*_{xH}, \xi \rangle^2 \\ &= - \sum_{i=1}^r \langle (L_x)_* D_{X_i}, \xi \rangle^2 + \sum_{j=1}^s \langle (L_x)_* D_{Y_j}, \xi \rangle^2 \\ &= - \sum_{i=1}^r \langle (L_x)_* D_{X_i}, \xi \rangle^2 + \sum_{j=1}^s \langle (L_x)_* D_{Y_j}, \xi \rangle^2 \end{aligned}$$

$$\text{より, } C([(x, \lambda)]) = - \sum_{i=1}^r \langle (L_x)_* D_{X_i}, (L_x^*)^{-1} \xi_\lambda \rangle^2 + \sum_{j=1}^s \langle (L_x)_* D_{Y_j}, (L_x^*)^{-1} \xi_\lambda \rangle^2$$

$$\text{となるから, } (L_x^*)^{-1} \xi_\lambda ((L_x)_* D_x) = \xi_\lambda ((L_x^{-1})_* (L_x)_* D_x) = \xi_\lambda(D_x) = \lambda(X)$$

より,

$$C([(x, \lambda)]) = - \sum_{i=1}^r \lambda(X_i)^2 + \sum_{j=1}^s \lambda(Y_j)^2$$

を得る。以後 $G \times \mathfrak{g}^*$ から $G \times \mathfrak{g}^*$ への自然な射影を P で表わす。

$$X \in \mathfrak{g} \text{ に対し, } (\tilde{X} f)(x, \lambda) = \frac{d}{dt} f(x e^{tX}, \lambda) /_{t=0} \quad (f \in C^\infty(G \times \mathfrak{g}^*))$$

と定義することにより, $G \times \mathfrak{g}^*$ 上の vector field $\tilde{X}$ を得る。

$$\tilde{H}_{(x, \lambda)} = 2 \sum_{i=1}^r \lambda(X_i) \tilde{X}_i - 2 \sum_{j=1}^s \lambda(Y_j) \tilde{Y}_j$$

<7>

と定義すると $\tilde{H}$ は $G \times \mathfrak{g}^*$ の vector field となるが, カシミール
 の G -不変性から $\sum_{i=1}^P (hX_i)^2 - \sum_{j=1}^Q (hY_j)^2 = \sum_{i=1}^P X_i^2 - \sum_{j=1}^Q Y_j^2$ ($\forall h \in H$)
 となり, 各 $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ に対し $\sum_{i=1}^P \lambda(X_i) \tilde{X}_i - \sum_{j=1}^Q \lambda(Y_j) \tilde{Y}_j = \sum_{i=1}^P \lambda(X_i) \tilde{X}_i$
 $- \sum_{j=1}^Q \lambda(Y_j) \tilde{Y}_j$ が成り立つ, vector field $\tilde{H}$ は $H_{(\alpha, \lambda)} = H_{(\alpha, \lambda)}$
 とみたす。従って $(P^*)_{(\alpha, \lambda)}(\tilde{H})$ は $T^*(G/H)$ 上の vector field と
 なる。この vector field $(P^*)_{(\alpha, \lambda)}(\tilde{H}) = H_{(\alpha, \lambda)}$ の pseudo-laplacian
 の principal symbol C に対応する Hamiltonian vector field に
 なることをこの節で示そう。そのためには次の 2 つの lemma
 が必要である。

Lemma 1. $P^* \in \Omega^1(G \times \mathfrak{g}^*)$ から $\Omega^1(G \times \mathfrak{g}^*)$ への自然な写
 像とすると以下の等式が成り立つ。

$$(i) \quad (P^*\theta)_{(\alpha, \lambda)}(\tilde{X}) = \begin{cases} \lambda(X) & (X \in \mathfrak{g}) \\ 0 & (X \in \mathfrak{f}) \end{cases}$$

$$(ii) \quad (P^*\theta)_{(\alpha, \lambda)}(\tilde{H}) = 2 \sum_{i=1}^P \lambda(X_i)^2 - 2 \sum_{j=1}^Q \lambda(Y_j)^2$$

$$(iii) \quad (P^*\theta)_{(\alpha, \lambda)}(\partial_\nu) = 0 \quad \text{且し} \quad (\partial_\nu f)_{(\alpha, \lambda)} = \frac{d}{dt} f(\alpha, \lambda + t\nu) \Big|_{t=0}$$

$$(iv) \quad (P^*\theta)_{(\alpha, \lambda)}([\tilde{H}, \tilde{X}]) = 0 \quad (\forall X \in \mathfrak{g})$$

$$(v) \quad (P^*\theta)_{(\alpha, \lambda)}([\tilde{H}, \partial_\nu]) = -2 \sum_{i=1}^P \lambda(X_i) \nu(X_i) + 2 \sum_{j=1}^Q \lambda(Y_j) \nu(Y_j)$$

$$(vi) \quad (\partial_\nu)_{(\alpha, \lambda)}((P^*\theta)(\tilde{H})) = 4 \sum_{i=1}^P \lambda(X_i) \nu(X_i) - 4 \sum_{j=1}^Q \lambda(Y_j) \nu(Y_j)$$

且し θ は $\Omega^1(G \times \mathfrak{g}^*) \simeq \Omega^1(T^*(G/H))$ の canonical な 1-form
 である。(§ 1 で定義を与えてある。)

Lemma 2. 次の等式が成り立つ。

$$(i) (P^*i(H)\Omega)_{(x,\lambda)}(\tilde{X}) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

$$(ii) (P^*i(H)\Omega)_{(x,\lambda)}(\partial_\nu) = -2 \sum_{i=1}^r \lambda(X_i) \nu(X_i) + 2 \sum_{j=1}^s \lambda(Y_j) \nu(Y_j)$$

< Lemma 1 の証明 >

π を $T^*(G/H)$ から G/H への自然な射影とする。 θ の定義から

$$\begin{aligned} (P^*\theta)_{(x,\lambda)}(v) &= \theta_{P(x,\lambda)}(P_*v) = \langle P(x,\lambda), \pi_*P_*v \rangle \\ &= \langle L_{x^{-1}}^* \xi_x, \pi_*P_*v \rangle \quad \forall v \in T_{(x,\lambda)}(G \times \mathfrak{g}^*) \end{aligned}$$

が成り立つ。

(i) の証明; $(\pi_*P_*\tilde{X})_{xH}(\tilde{f}) = \tilde{X}_{(x,\lambda)}(\tilde{f} \cdot \pi \circ P) = \frac{d}{dt} \tilde{f}(ge^{tX})|_{t=0}$
 から $X \in \mathfrak{f}$ とすると $\pi_*P_*\tilde{X} = 0$ 。又 $X \in \mathfrak{g}$ とすると
 $\pi_*P_*\tilde{X} = (L_x)_*D_X$ となり, $(P^*\theta)_{(x,\lambda)}(\tilde{X}) = \langle L_{x^{-1}}^* \xi_x, (L_x)_*D_X \rangle$
 $= \langle \xi_x, D_X \rangle = \lambda(X)$ となる。

(ii) の証明; $(\pi_*P_*(\tilde{H}))_{xH}(\tilde{f}) = \tilde{H}_{(x,\lambda)}(\tilde{f} \cdot \pi \circ P)$
 $= 2 \sum_{i=1}^r \lambda(X_i) \frac{d}{dt} \tilde{f}(xe^{tX_i}H)|_{t=0} - 2 \sum_{j=1}^s \lambda(Y_j) \frac{d}{dt} \tilde{f}(xe^{tY_j}H)|_{t=0}$
 $\therefore (\pi_*P_*)(\tilde{H}) = 2 \sum \lambda(X_i) (L_x)_*D_{X_i} - 2 \sum \lambda(Y_j) (L_x)_*D_{Y_j}$
 $\therefore (P^*\theta)_{(x,\lambda)}(\tilde{H}) = 2 \sum \lambda(X_i)^2 - 2 \sum \lambda(Y_j)^2$

(iii) の証明; $\pi_*P_*\partial_\nu = 0$ がいさ明か。

(iv) の証明; $[\tilde{H}, \tilde{X}] = 2 \sum \lambda(X_i) [\tilde{X}_i, \tilde{X}] - 2 \sum \lambda(Y_j) [\tilde{Y}_j, \tilde{X}]$
 $X \in \mathfrak{g}$ のとき $[\tilde{X}_i, \tilde{X}] = [\tilde{X}_i, X]$ かつ $[\tilde{X}_i, X] \in \mathfrak{f}$ かつ $\pi_*P_*\tilde{f} = 0$
 から $\pi_*P_*[\tilde{X}_i, \tilde{X}] = 0$ 同様に $\pi_*P_*[\tilde{Y}_j, \tilde{X}] = 0 \therefore (P^*\theta)_{(x,\lambda)}([\tilde{H}, \tilde{X}]) = 0$

$X \in f$ のとき, $[X_i, X] \in \mathfrak{g}$, $[Y_j, X] \in \mathfrak{g}$ より.

$$(P^*\theta)_{(\alpha, \lambda)}([\tilde{H}, X]) = 2 \sum_i \lambda(X_i) \lambda([X_i, X]) - 2 \sum_j \lambda(Y_j) \lambda([Y_j, X])$$

上の等式の右辺は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の symmetric algebra $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の元 $\sum X_i [X_i, X] + \sum Y_j [Y_j, X]$ を $\mathfrak{g}^*$ 上の polynomial function として $X \in \mathfrak{g}^*$ での値と見ることができる。 $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の元 $\sum X_i [X_i, X] - \sum Y_j [Y_j, X]$ は symmetrization によって $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の元 $\frac{1}{2} [\sum X_i^2 - \sum Y_j^2, X]$ に移る。 $C_f = -\sum_{i=1}^r X_i^2 + \sum_{j=1}^s Y_j^2$ とおくと $[\sum_{i=1}^r X_i^2 - \sum_{j=1}^s Y_j^2, X] = [-(C - C_f), X]$ で C_f は algebra f のカシミールとなり、 $X \in f$ ならば $[-(C - C_f), X] = 0 \therefore \frac{1}{2} [\sum_{i=1}^r X_i^2 - \sum_{j=1}^s Y_j^2, X] = 0$ λ は linear 形式ゆえに $\sum X_i [X_i, X] - \sum Y_j [Y_j, X] = 0$.
従って $(P^*\theta)_{(\alpha, \lambda)}([\tilde{H}, X]) = 0$ となる。

$$\begin{aligned} \text{(v) の証明;} \quad [\tilde{H}, \partial_\nu] &= [2 \sum \lambda(X_i) \tilde{X}_i - 2 \sum \lambda(Y_j) \tilde{Y}_j, \partial_\nu] \\ &= -2 \sum \partial_\nu(\lambda(X_i)) \tilde{X}_i + 2 \sum \partial_\nu(\lambda(Y_j)) \tilde{Y}_j \\ &= -2 \sum \nu(X_i) \tilde{X}_i + 2 \sum \nu(Y_j) \tilde{Y}_j \end{aligned}$$

$$\therefore (P^*\theta)_{(\alpha, \lambda)}([\tilde{H}, \partial_\nu]) = -2 \sum \lambda(X_i) \nu(X_i) + 2 \sum \lambda(Y_j) \nu(Y_j)$$

$$\text{(vi) の証明;} \quad \text{(ii) より } (P^*\theta)_{(\alpha, \lambda)}(\tilde{H}) = 2 \sum \lambda(X_i)^2 - 2 \sum \lambda(Y_j)^2$$

$$((\lambda + t\nu)(X))^2 = \lambda(X)^2 + 2t\lambda(X)\nu(X) + t^2\nu(X)^2 \text{ より (vi) となる。}$$

q. e. d.

< Lemma 2 の証明 >

$$\begin{aligned} \forall v \in T_{(\alpha, \lambda)}(G \times \mathfrak{g}^*) \text{ に対し } (P^*i^*(H) \Omega)_{(\alpha, \lambda)}(v) &= (i^*(H) \Omega)_{P(\alpha, \lambda)}(P_*v) \\ &= \Omega_{P(\alpha, \lambda)}(H_{P(\alpha, \lambda)}, P_*v) = (P^*\Omega)_{(\alpha, \lambda)}(\tilde{H}, v) = (d\varphi^*)_{(\alpha, \lambda)}(\tilde{H}, v) \end{aligned}$$

$$= \widetilde{H}_{\alpha, \lambda}((p^* \theta)(v)) - \nu_{\alpha, \lambda}((p^* \theta)(H)) - (p^* \theta)_{\alpha, \lambda}([\tilde{H}, v])$$

$$(\quad d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) \text{ より})$$

となり, Lemma 1 から Lemma 2 を得る。 q. e. d.

さて $p^*: \Omega^1(G/H \times \mathfrak{g}^*) \longrightarrow \Omega^1(G \times \mathfrak{g}^*)$ は injective であり、 $i(H)\Omega = dC$ を示すためには $p^*i(H)\Omega = p^*dC$ を示せばよい。 $p^*dC = d(C \circ p)$ であり $(C \circ p)(x, \lambda) = -\sum \lambda(\alpha_i)^2 + \sum \lambda(\beta_j)^2$ であるから、 $\mathfrak{g}^*$ 上の変数 $\lambda_i \in \lambda_i(\lambda) = \lambda(X_i) \quad (1 \leq i \leq p)$
 $\lambda_j(\lambda) = \lambda(Y_{j-p}) \quad (p+1 \leq j \leq p+q)$ と定義すると

$$p^*dC = -2 \sum \lambda(X_i) d\lambda_i + 2 \sum \lambda(Y_j) d\lambda_{j+p}$$

より、 $X \in \mathfrak{g}$ とすると $(p^*dC)(\tilde{X}) = 0$ 。又 $(d\lambda_i)(\partial_\nu) = \partial_\nu(\lambda_i) = \nu(X_i)$ から $(p^*dC)(\partial_\nu) = -2 \sum \lambda(X_i) \nu(X_i) + 2 \sum \lambda(Y_j) \nu(Y_j)$

$\tilde{X}_{\alpha, \lambda} (X \in \mathfrak{g})$, $\partial_\nu (\nu \in \mathfrak{g}^*)$ は $T_{\alpha, \lambda}(G \times \mathfrak{g}^*)$ を生成するから次の Proposition を得る。

Proposition $T^*(G/H)$ 上の vector field $H = p_* \tilde{H}$ は pseudo-laplacian $\mathcal{C}$ の principal symbol C に対応する Hamiltonian vector field である。

§ 3. Pseudo-laplacian の大域的可解性

さて我々は § 0 に述べた J. Rauch と D. Wigner の得た可解であるための十分条件 (1) ~ (4) が $M = G/H$ とし、 $P = \mathcal{C}$ としたとき成り立つことをこの節で証明しよう。

<(1)の証明> pseudo-laplacian C の principal symbol c は
 §2 で計算したように $-\sum_{i=1}^p \lambda(x_i)^2 + \sum_{j=1}^q \lambda(y_j)^2$ である
 から real であることは明らかである。 $cC = C$ を示そう。

そのためには, $\varphi, \psi \in C_c^\infty(G/H)$ に対し

$$(\varphi, \psi) = \int_{G/H} \varphi(gH) \psi(gH) dg_H$$

(ただし dg_H は G/H 上の G -invariant measure とする。)

と定義すると $(C\varphi, \psi) = (\varphi, C\psi) \quad \forall \varphi, \psi \in C_c^\infty(G/H)$

を示せばよい。 $X \in \mathfrak{g}$ に対し, 簡単な計算により,

$$(X^*\varphi, \psi) = -(\varphi, X^*\psi)$$

がわかるが, $\mathfrak{g}$ のカシミールは $C = -\sum_{i=1}^p X_i^2 + \sum_{j=1}^q Y_j^2$ である

より $(C\varphi, \psi) = (\varphi, C\psi) \quad \forall \varphi, \psi \in C_c^\infty(G/H)$ が成り立つ。
 g.e.d.

<(2)の証明>

§2 の Proposition から 簡単な計算により, 任意 $[(\lambda, \lambda)] \in$

$G \times_{\mathbb{H}} \mathfrak{g}^* \simeq T^*(G/H)$ を通る Hamiltonian vector field H の積分
 曲線は $\Gamma(t) = [(\chi e^{2t(\sum \lambda(x_i)x_i - \sum \lambda(y_j)y_j)}, \lambda)] \quad (t \in \mathbb{R})$

となるから, 曲線 $\Gamma(t)$ の G/H への projection を $\gamma(t)$ とす

ると, $\gamma(t) = (\pi \circ \Gamma)(t) = \chi e^{2t(\sum \lambda(x_i)x_i - \sum \lambda(y_j)y_j)} H$

となる。 $C([\lambda_0, \lambda_2]) = 0 \quad \lambda_0 \neq 0$ となる点を通る曲線の G/H への

projection は $\gamma_0(t) = \chi_0 e^{2t(\sum \lambda_0(x_i)x_i - \sum \lambda_0(y_j)y_j)} H$ となるが,

この曲線の非有界性を示すには, χ_0 が単位元である場合を示

せばよい。さて eH を通る曲線 $e^{2t(\sum \lambda_0(x_i)x_i - \sum \lambda_0(y_j)y_j)} H \quad (t \in \mathbb{R})$

でもし $\forall j' (1 \leq j' \leq g)$ に対して $\lambda_0(\gamma_{j'}) = 0$ とすると, $C(\alpha_0, \lambda_0) = 0$ から $-\sum_{i=1}^p \lambda_0(X_i)^2 + \sum_{j=1}^g \lambda_0(\gamma_j)^2 = 0$ より $\forall i (1 \leq i \leq p)$ に対して $\lambda_0(X_i) = 0$ から $\lambda_0 = 0$ となり $\lambda_0 \neq 0$ に矛盾する。従って $\sum \lambda_0(X_i)X_i - \sum \lambda_0(\gamma_j)\gamma_j$ には零でない $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{f}$ の元があるから曲線 $e^{2t(\sum \lambda_0(X_i)X_i - \sum \lambda_0(\gamma_j)\gamma_j)}H$ は非有界である。 g.e.d.

<(3)の証明>

(3)と(4)の証明には Hörmander [3] の Th. 7.3 が本質的であるので定理を述べる。

Theorem (Hörmander)

X は analytic 多様体, $P \in X$ 上の analytic 係数の微分作用素とし real principal symbol P_m をもつとする。 $u \in X$ 上の distribution とあるとき $\{(x, \xi) \in WFA(u); (x, \xi) \notin WFA(Pu), \frac{\partial P_m}{\partial \xi} \neq 0\}$ は P_m の Hamiltonian vector field で "invariant" である。
(但し $WFA(u)$ は X 上の analytic 関数を modulo として wave front set である。)

さて G/H は analytic 多様体であり, C は analytic 係数で real symbol C をもつ。更に $T^*(G/H)$ に座標近傍系を入れて計算すればわかるように $\xi \neq 0$ のとき $\frac{\partial C}{\partial \xi} \neq 0$ であるから、上の定理が適用できる。今 $u \in C^\infty(G/H)'$ で $Cu = 0$ とする。もし $WFA(u)$ の元 (x_0, ξ_0) が存在したとすると, (x_0, ξ_0) を通る Hamiltonian vector field の積分曲線 $\Gamma(t)$ は常に $WFA(u)$

にある。ところが(2)により $\Gamma(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) は非有界であるから $u \in C^\infty(G/H)'$ に矛盾する。故に $WF_A(u) = \emptyset$ となり u は至るところ analytic であり, G/H は連結非有界で $u \in C^\infty(G/H)'$ から $u=0$ が示される。 g. e. d.

〈(4)の証明〉

$G/H \supset \forall \Gamma$ compact に対して次の条件をみたすように G/H の compact set $\hat{\Gamma}$ をとる。

① $\Gamma \subset \text{Int } \hat{\Gamma}$ ② $G/H - \hat{\Gamma}$ のどの connected component も非有界。(もし $G/H - \hat{\Gamma}$ の connected component で有界なものがあれば, それを含むように改めて $\hat{\Gamma}$ をとり直せばよい。)

この $\hat{\Gamma}$ に対し $G/H - \hat{\Gamma}$ で(3)と同様の議論を行なうと

$G/H - \hat{\Gamma}$ 上で u は analytic となり, ②から $G/H - \hat{\Gamma}$ 上で

$u=0$ となる。従って $\text{supp } u \subset \hat{\Gamma}$ g. e. d.

かくして我々は次の定理を得る。

Theorem. G/H を連結非有界なアフィン対称空間 (G の中心は有限) とし, $\mathcal{C} \in G/H$ 上の pseudo-laplacian とすると写像 $\mathcal{C} : C^\infty(G/H) \longrightarrow C^\infty(G/H)$ は onto である。

References

- [1] A. Gérézo and F. Rouvière ; Opérateurs différentiels invariants sur un groupe de Lie. École Polytechnique Paris (1972)
- [2] S. Helgason ; The surjectivity of invariant differential operators on symmetric spaces I, Annals of Mathematics vol 98 (1973)
- [3] Hörmander ; Uniqueness Theorems and Wave Front Sets for Solutions of Linear Differential Equations with Analytic Coefficients , Comm. Pure Appl Math, 24 (1971)
- [4] J. Rouch and D. Wigner ; Global solvability of the Casimir operator, Annals of Math, 103 (1976)