

## 乱流におけるダイアグラム法 II

東大 理 金田行雄

乱流の初期値問題における非線形性の影響を調べるための一つの道具としてダイアグラムの方法がある。 §1. では、このダイアグラムの方法の一つについて、 §2. では、それに基づいて得られる vertex のくりこみについて述べる。

### §1.

ここでは Navier-Stokes 方程式に従う非圧縮粘性流体を考える。非圧縮性の条件を取り入れるには、波数空間における速度場の確率分布関数  $P(u, t)$  の代りに、そのフーリエ変換に相当する特性関数  $\Phi(\xi, t)$ ;

$$\Phi(\xi, t) \equiv \int du \exp \left\{ i \sum_{k, \alpha} u_{\alpha}(k) \xi_{\alpha}(k) \right\} P(u, t)$$

を導入するのが便利である。外力が一様等方的な Gaussian

で white-noise 的な場合  $\Phi$  は次式に従う。

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi = \mathcal{H} \Phi, \quad \mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 \quad (2)$$

$$\mathcal{H}_0 \equiv - \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \left[ \nu k^2 \xi_{\alpha}(\mathbf{k}) \partial_{\alpha}(\mathbf{k}) + \sum_{\beta} h(\mathbf{k}) D_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \xi_{\alpha}(\mathbf{k}) \xi_{\beta}(-\mathbf{k}) \right]$$

$$\mathcal{H}_1 \equiv \sum_{\substack{\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q} \\ \alpha \beta \gamma}} i M_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}) \delta^*(\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q}) \xi_{\alpha}(\mathbf{k}) \partial_{\beta}(\mathbf{p}) \partial_{\gamma}(\mathbf{q})$$

ただし,  $\partial_{\alpha}(\mathbf{k}) \equiv \partial / (\partial \xi_{\alpha}(\mathbf{k}))$  で,  $h(\mathbf{k})$  は外力の強さを表わし,  $D_{\alpha\beta}(\mathbf{k}), M_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k})$  は適当なテンソルである。

(2) の解は形式的に次のように与えられる。

$$\Phi(t) = \exp(\mathcal{H}_0 t) \Phi(0) \quad (3)$$

$$= \exp(\mathcal{H}_0 t) \left[ 1 + \int_0^t \tilde{\mathcal{H}}(s) ds + \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \tilde{\mathcal{H}}(s_1) \tilde{\mathcal{H}}(s_2) + \dots \right] \Phi(0) \quad (4)$$

$$= \exp(\mathcal{H}_0 t) \left[ \sum_n \frac{1}{n!} \int_0^t \dots \int_0^t ds_1 \dots ds_n T[\tilde{\mathcal{H}}(s_1) \dots \tilde{\mathcal{H}}(s_n)] \right] \Phi(0) \quad (5)$$

$$= \exp(\mathcal{H}_0 t) \exp \left[ T \int_0^t \tilde{\mathcal{H}}(s) ds \right] \Phi(0) \quad (6)$$

ここで,  $T$  は時間順序付けの演算子であり

$$\tilde{\mathcal{H}}(s) \equiv \exp(-\mathcal{H}_0 s) \mathcal{H}_1 \exp(\mathcal{H}_0 s) \quad (7)$$

$$= \sum \underbrace{i M_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}) \delta^*(\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q})}_{\bullet} \underbrace{(-i) \xi_{\alpha}(\mathbf{k}, s)}_{\sim} \underbrace{i \partial_{\beta}(\mathbf{p}, s)}_{\text{---}} \underbrace{i \partial_{\gamma}(\mathbf{q}, s)}_{\text{---}} \quad (8)$$

$$\xi_\alpha(p, s) \equiv \exp(-H_0 s) \xi_\alpha(p) \exp(H_0 s) = \exp(\nu p^2 s) \xi_\alpha(p) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \partial_\alpha(p, s) &\equiv \exp(-H_0 s) \partial_\alpha(p) \exp(H_0 s) \\ &= \exp(-\nu p^2 s) \partial_\alpha(p) - \sum_B \frac{2h(p)}{\nu p^2} \sinh(\nu p^2 s) D_{\alpha B}(p) \xi_B(-p) \end{aligned} \quad (10)$$

である。ダイアグラムの的に表現するため、(8)式の下  
の図のように対応させると、 $\tilde{H}(s)$ は  のように表現さ  
れることになる。また、たとえば、(4)式は

$$\Phi(t) = \exp(H_0 t) [1 + \text{diagram} + \text{diagram} + \dots] \Phi(0) \quad (11)$$

のように表わされる。ただし、ここでは時間積分の記号な  
どは省いてある。

さて、以下、初期の速度場の確率分布が一様等方的で、  
Gaussian の場合を考える。この場合、Wick の定理と  
類似の定理が成立する。即ち、 $\langle A \rangle_0 \equiv A \Phi(\xi, 0) \big|_{\xi=0}$   
で  $\langle \rangle_0$  を定義すると、 $x(s) \equiv a(s) \xi + b(s) \frac{\partial}{\partial \xi}$  ( $a, b$   
は  $s$  の適当な函数) のとき

$$\langle \prod_s x(s) \rangle_0 = \sum_{\text{pairing}} \langle x(\cdot) x(\cdot) \rangle_0 \cdots \langle x(\cdot) x(\cdot) \rangle_0 \quad (12)$$

が成り立つ。ただし、 $\sum_{\text{pairing}}$  は「すべての対のとりかた  
についての和」と意味する。

このことから、速度相関などの種々の平均量が次の一連の

の対 (  $\text{---}$  と  $\text{---}$  ) を構成要素とするダイアグラムによって表現でき、普通の場合の理論におけるダイアグラムの方法と類似の手法が使えらるようになる。ここに  $\text{---}$  と  $\text{---}$  は各々次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} p, \alpha \\ s_1 \end{array} \text{---} \begin{array}{c} q, \beta \\ s_2 \end{array} &\iff \langle T[i\partial_\alpha(p, s_1) i\partial_\beta(q, s_2)] \rangle_0 \equiv Q_{\alpha\beta}^0(p, q, s_1, s_2) \\
 &= D_{\alpha\beta}(p) \delta^*(p+q) f(p, s_1, s_2) \quad (s_1 \geq s_2) \\
 &= \quad \quad \quad f(p, s_2, s_1) \quad (s_2 \geq s_1) \quad \left. \vphantom{\begin{array}{c} p, \alpha \\ s_1 \end{array} \text{---} \begin{array}{c} q, \beta \\ s_2 \end{array}} \right\} \quad (13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} p, \alpha \\ s_1 \end{array} \text{---} \begin{array}{c} q, \beta \\ s_2 \end{array} &\iff \langle T[i\partial_\alpha(p, s_1) (-i)\xi_\beta(q, s_2)] \rangle_0 \equiv G_{\alpha\beta}^0(p, q, s_1, s_2) \\
 &= \delta_{\alpha\beta} \delta^*(p-q) \exp[-\nu p^2(s_1 - s_2)] \theta(s_1 - s_2) \quad (14)
 \end{aligned}$$

ただし

$$f(p, s_1, s_2) = \phi(p) \exp[-\nu p^2(s_1 + s_2)] + \frac{2h(p)}{\nu p^2} \exp(-\nu p^2 s_1) \sinh(\nu p^2 s_2)$$

であり、 $\phi(p)$  は初期のエネルギースペクトル、 $\theta$  は Heaviside 函数である。

以上のことを用いて、各次の摂動項、あるいはダイアグラムの性質、たとえば、外力のない場合 ( $h(k)=0$ ) の各項の時間依存性等を調べることができらる。

また、次式で定義される二時間速度相関函数  $Q$  とレスポンス函数  $G$  に対して、いわゆる Dyson の式を得ることができ

3:

$$Q_{\alpha\beta}(p, q, s_1, s_2) \equiv \langle u_{\alpha}(p, s_1) u_{\beta}(q, s_2) \rangle$$

$$= \langle T[i\partial_{\alpha}(p, s_1) i\partial_{\beta}(q, s_2) S(\infty, 0)] \rangle_0 \quad (15)$$

$$G_{\alpha\beta}(p, q, s_1, s_2) \equiv \langle T[i\partial_{\alpha}(p, s_1) (-i)\xi_{\beta}(q, s_2) S(\infty, 0)] \rangle_0 \quad (16)$$

$$\text{ここで } S(t_1, t_2) \equiv \exp \left[ T \int_{t_2}^{t_1} \tilde{H}(s) ds \right]$$

であり,  $G$  は Kraichnan 式の記法では  $\langle \delta u_{\alpha}(p, s_1) / \delta f_{\beta}(q, s_2) \rangle$  と表わされるものである。たとえば,  $Q$  に対する

Dyson の式はダイアグラムの

$$\text{---} = \text{---} + \text{---} \bigcirc U \text{---} + \text{---} \bigcirc V \text{---} + \text{---} \bigcirc U \text{---} \quad (F.1)$$

で与えられる。ここで, 太い  $\text{---}$ ,  $\text{---}$ , 細い  $\text{---}$ ,  $\text{---}$  はそれぞれ,  $Q, G, Q^0, G^0$  と表われ,  $\bigcirc U, \bigcirc V$  は二種類のレウゆる自己エネルギー部分を表わす。右辺の最後の項があることに注意されたい。

くりこまれた vertex については, 下図  $\Gamma_i, i=1, 2, 3$  と Martin, Siggia & Rose によって指摘されたように三種類必要なことがわかる。

$$\text{---} \bigcirc \Gamma_1 \text{---} \quad \text{---} \bigcirc \Gamma_2 \text{---} \quad \text{---} \bigcirc \Gamma_3 \text{---} \quad (F.2)$$

$P_i$  は  $O(P^2)$  までの次の式に従う。

$$\bigcirc = \delta_{i2} \cdot + \sum \text{triangle diagram} \quad (\text{F.3})$$

ここで-----には  $Q$  または  $G$  が,  $\bigcirc$  には  $P_1, P_2$ , または  $P_3$  が,  $\bigcirc$  から出る — と w の数の, じ, まのあうように, 入る。

なお, ここで述べた方法によって,  $P(u, 0)$  が Gaussian のときの, D.I.A. や 0-4 次 Cumulant 近似等が摂動級数のある部分和として解釈できることも示される。

乱流におけるダイアグラムの方法としては, 上記の方法の他に, とくにそれと関連するものとして Kawasaki による方法があり, その他 Balescu & Senatorski, あるいは Wyld による方法等がある。また, 式あるいはそれと類似の式に関して Tatarski, Kuwabara あるいは Suzuki & Tanaka 等による研究がある。文献その他について詳しくは [1] を参照されたい。

## §2.

前節の方法は乱流伝散の問題にも適用できる。たとえば, 速度場  $V$  の確率分布が定常で一様等方的な Gaussian のとき,  $V$  によって運ばれるある濃度場  $\psi(x, t)$  が

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi + (V \cdot \nabla) \psi = \kappa \Delta \psi + \delta \psi \quad (17)$$

$$\psi(x, t_0) = \delta(x - x_0) \quad (18)$$

を満足するとする。  $\psi$  の  $V$  の確率分布  $P$  についての平均  $\tilde{G}(x, x_0, t, t_0) = \langle \psi(x, t) \rangle$  に対する近似と前節と同様に構成される。

。 乱流 (前節の  $Q$  と  $G$ ) の場合と同様に vertex のくりこみも無視すると  $\tilde{G}$  に対する D.I.A. が得られる。 (この乱流と乱流拡散 ( $\tilde{G}$ ) とにおける D.I.A. (詳しくは Eulerian D.I.A.) の類似性、及びその難点については [II] を参照されたい。)

vertex のくりこみに対しては、  $\tilde{G}$  に対しては、乱流の場合に比べて、基本的な構造は同じであるが、

(1) vertex の種類が一つで良い、(2) テンソル形が簡単、という利点がある。 このことから、まず  $\tilde{G}$  に対して、

vertex のくりこみの効果と調べるのも意味があると見られる。

(F3) 図に相当して (F4, a) 図が得られるが、 $P$  についての一次の、たとえば、

(F4, b) 図の方がより簡単である。

図中 --- は  $V_\alpha(k, t)$ ,

==== は  $\langle V_\alpha(k, t) V_\beta(-R, t) \rangle$ , ——— は  $\tilde{G}$  を表わしている。

[II] における議論と同様に、

$$\text{Diagram (F4, a)} \quad (F4, a)$$

$$\text{Diagram (F4, b)} \quad (F4, b)$$

慣性小領域において  $\tilde{Q}(k, t, t') \equiv \sum_{\alpha} \langle V_{\alpha}(k, t) V_{\alpha}(-k, t') \rangle$  と  $\tilde{G}$  が

$$\left. \begin{aligned} \tilde{Q}(k, t, t') &= A k^m \exp[B k^n |t-t'|], \quad m = -11/3 \\ \tilde{G}(k, t, t') &= \exp[C k^n (t-t')] \theta(t-t') \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

( $A, B, C$  は適当な定数) で与えられるとすれば, 若干の仮定のもとに, (F.4, b) 図の近似によって, 慣性小領域における  $G(k)$  への大きな渦の影響が充分押えられ,  $n=2/3$  が得られることがわかる。このことから, 乱流の場合についても (F.4, b) 図に対応する近似に進むことによって D.I.A. の場合 (III 参照) と違って,  $k^{-5/3}$  則と矛盾のない近似が得られることが予想される。これは一つの望ましいことではある。しかし, 少なくとも次の二点 (A), (B) について (19) 式のようにおいた上でのある意味で簡単な解析的議論の妥当性も含めて), なお検討を要すると思われる。

(A) { (F.4, b) 図よりも多くの diagram をとりこんだ (F.4, a) 図の近似に進むと, 大きな渦の影響はある程度押えられるものの, その押え方は不十分で  $n=1$  が得られると思われる。 (これは乱流の場合の (F.4, a) 図に対応する近似は  $k^{5/3}$  則と矛盾することを予想させる。) }

(B) { 乱流の場合の (F.4, b) 図に対応する近似が  $k^{5/3}$  則と導くとしたら, それは (15)(16) 式の  $Q, G$  と (19) 式のように表



現したときの特性時間として  $\propto k^{-2/3}$  (慣性小領域で) を与えるであろう。ところで, この  $k^{-5/3}$  則はともかく,  $\propto k^{-2/3}$  についてはその妥当性は明らかではなく,  $\propto k^{-1}$  の方が妥当であるという考えもあり得ると思われる。(たとえば [III] p382~383 参照)}

なお, Shut'ko [IV] は Wyld の方法で作される, (F.3) 図に類似の, (Wyld 流のくりこまれた vertex)  $\Gamma$  についての次の近似によって  $k^{-5/3}$  則が得られるとしているが, これは (4) による予想と一致する。彼の  $k^{-5/3}$  則の導出には彼の記法における  $\Gamma(k_1, k_2, k_3)$  が  $k_2, k_3$  について非対称なところが本質的であると思われるが, その非対称である理由は筆者には不明である。なお, (B) に関する疑問は [IV] にも, (また [V] にも), 同様に当てはまると思われる。これらのことと含めて, vertex のくりこみについての今後の検討が望まれる。

#### 文献

- [I] Y. Kaneda: submitted to J. Phys. Soc. Japan.
- [II] D. C. Leslie: Developments in the Theory of Turbulence.  
(Clarendon Press, Oxford, 1973).
- [III] S. A. Orszag: J. Fluid Mech. 41(1970)363.
- [IV] A. V. Shut'ko: Soviet Physics-Doklady 9(1965)857.
- [V] Y. Kaneda: J. Phys. Soc. Japan 40(1976)919.