

On local solvability of Partial Differential Equations with Multiple Characteristics

京大 理学部 松本和一郎

1. Introduction. 偏微分作用素 $L(x, \partial x)$ に対して、任意の $f(x) \in C^\infty$ を与えたとき、 $Lu=f$ を満たす解 $u(x)$ が必ず存在するか？という問題を考える。 $L(x, \partial x)$ が principal type の時は必要十分条件が Nirenberg-Treves [7], Beals-Figgarman [1] によって与えられた。Double characteristics を持つ場合については必要条件が Cardoso-Treves [3] によって与えられた。その中で彼等は、証明の経過から、subprincipal part が重要な役割をはたしていることを指摘している。

ここでは、characteristics の multiplicities は単に、locally constant として高い重複度も許す。そのかわり、 $L(x, \partial x)$ の主要部は実係数であると仮定して、subprincipal part にも仮定をかりて、一つの十分条件を与える。（[5] 参照，証明の基本評価は [4] を利用する。）

$$L(x, \partial x) = P(x, \partial x) + Q(x, \partial x) + R(x, \partial x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

とかく。 == 1. 1) $P(x, \partial x)$ は s 次で $L(x, \partial x)$ の主要部。実係数をもつものとする。 2) $Q(x, \partial x)$ は $s-1$ 次斉次部分。 3) $R(x, \partial x)$ は高々 $s-2$ 次である。なお $L(x, \partial x)$ の係数はすべて C^∞ -class としておく。主要部 $P(x, \partial x)$ に対する仮定をのべる。

仮定 I P の characteristics は locally constant multiplicities を持つ。

$$\text{すなわち, } J = \{(x, \zeta) \in V_x \times S_{\zeta}^{n-1} \mid P(x, \zeta) = 0\}$$

(V_x は $\mathbb{R}_x^n$ の原点の近傍, S_{ζ}^{n-1} は dual space $\mathbb{R}_{\zeta}^n$ の単位球。) とおくと、任意の $(x_0, \zeta_0) \in J$ に対してある (x_0, ζ_0) の $V_x \times S_{\zeta}^{n-1}$ での近傍 W とある自然数 m (depending on (x_0, ζ_0)) があって、次を満たす。

J は W において、 x を fix すると ζ について一定の重複度 m をもつ。

上の仮定 I は、実は J を connected components J_k の union にかくと、 J_k が x に無関係になるについて一定の重複度 m_k を持つことを意味している。更に J_k の各点の近傍において、適当に座標を回転することにより、 $\zeta' = (\zeta_2, \dots, \zeta_n)$ とかくと、

$$P(x, \zeta) = P_0(x, \zeta) \{ \zeta_1 - \psi(x, \zeta') \}^{m_k}$$

と、 x について C^∞ , z' について holomorphic の枠内で分解できる。すなわち $P_0(x, z) = a_0(x) \{ z_1^{s-m} - \sum_{j=0}^{s-m-1} a_j(x, z') z_1^j \}$ かつ、 $P_0(x, z)$ は考えている点の近傍でゼロにならない。又、 $P(x, z)$ が real-valued であることから、 $\psi(x, z')$ も real-valued となる。

2. 命題及び定理. 次は、subprincipal symbol

$\pi(x, z) = Q(x, z) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \bar{z}_j} P(x, z)$ に対しての仮定を述べる。 $J^{(2)} = \{(x, z) \in J \mid \text{grad}_z P(x, z) = 0\}$ とおき、 $J^{(2)} = \bigcup_k J_k^{(2)}$ と connected components に分ける。

仮定 II. $\pi(x, z)$ は各 $J_k^{(2)}$ 上で次の (A) 又は (B) のどちらかを満たす。

$$(A) \quad \text{Re } \pi(x, z) \neq 0 \quad \text{on } J_k^{(2)}.$$

$$(B) \quad \pi(x, z) \equiv 0 \quad \text{on } J_k^{(2)}. \quad \text{更に } m_k \geq 3 \text{ の時は} \\ \text{grad}_z \text{Re } \pi(x, z) \neq 0 \quad \text{on } J_k^{(2)}.$$

命題. 上の仮定の下に、任意の実数 ℓ に対してある原点の近傍 Ω とある正定数 C があって、

$$\|L^* u\|_{-\ell-s+2, \mathbb{R}^n} \geq C \|u\|_{-\ell, \mathbb{R}^n} \quad \text{for } \forall u \in \mathcal{D}(\Omega)$$

となる。特に $J^{(2)}$ 上で常に (A) が満たされている時は、

$$\|L^* u\|_{-\ell-s+1, \mathbb{R}^n} \geq C \|u\|_{-\ell, \mathbb{R}^n} \quad \text{for } \forall u \in \mathcal{D}(\Omega).$$

上の命題は、Calderón が Cauchy 問題の解の一意性の証明に用いた評価を修正して得られる。([2], [4] 参照)

命題を認めると、 $(u, v)_{\mathcal{H}} = (L^*u, L^*v)_{L^2, \mathbb{R}^n}$ の内積で $\mathcal{D}(\Omega)$ を完備化すると、Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ が得られる。このとき、 $\mathcal{H}$ は $H_{\Omega}^{-l}(\mathbb{R}^n)$ の稠密な部分空間となっている。

$(H_{\Omega}^{-l}(\mathbb{R}^n))' = H^l(\Omega)$ かつ $(H_{\Omega}^{-l}(\mathbb{R}^n))' \subset \mathcal{H}'$ だから、任意の $f(x) \in H^l(\Omega)$ に対して、Riesz の定理により唯一の $\mathcal{H}$ の元 $u(x)$ が対応して

$$\langle f, \varphi \rangle = (u, \varphi)_{\mathcal{H}} \quad \text{for } \forall \varphi(x) \in \mathcal{H}$$

を満たす。特に $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$ に制限すると、 $\sqrt{|\xi|^2 + 1}$ を symbol にもつ pseudo-differential operator を Λ とかけば、

$$(u, \varphi)_{\mathcal{H}} = (\Lambda^{-l-s+2} L^*u, \Lambda^{-l-s+2} L^*\varphi)_{L^2}.$$

$\Lambda^{-l-s+2} L^*u \in L^2$ となる。 $\Lambda^{2(-l-s+2)} L^*u = v$ とおくと

$v \in H^{2l+2s-2}(\mathbb{R}^n)$ であり、 $(Lv, \varphi)_{L^2} = \langle f, \varphi \rangle$, すなわち

distribution の意味で $Lv = f$ in Ω . なお、丁^④上

で常に (A) が満たされているときは、内積として、

$(L^*u, L^*v)_{L^2, \mathbb{R}^n}$ を採用して、全く同様の推論を行えば、

次の定理を得る。

定理. 仮定 I, II の下に、任意の実数 l に対してある原点の近傍 Ω があって、任意の $f(x) \in H^l(\Omega)$ に対して $Lv = f$ in Ω

の解 $v(x) \in H^{\ell+s-2}$ が存在する。特に $J^{(2)}$ 上で常に (A) が満たされている時は $v(x) \in H^{\ell+s-1}$ にとれる。

3. 命題の証明.

$-\ell-s+2$ のかわりにあらためて $-\ell$ とかき。又、 L が L^* と同じ条件を満たすことから、 L を用いて、

$$\|Lu\|_{-\ell} \geq C \|u\|_{-\ell+s-2} \quad \text{for } \forall u(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$$

を証明する。証明に $\mathbb{R}_z^n - \{0\}$ の単位の分割を用いるが、そのとり方は、以下のものである。すなわち、まず $\mathbb{R}_z^{n-1}$ の単位の分割 $\{\alpha_j(z)\}$ をとり、 $z \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ に対しては、

$\alpha_j(z) = \alpha_j(z/|z|)$ で定義する。 $\mathbb{R}_z^{n-1}$ 上での $\{\alpha_j(z)\}$ のとり方は、 $\mathbb{R}_z^{n-1}$ 上の各点 z_0 について、その近傍に support を持つ $\{\alpha_j\}$ ($\alpha_j(z) \geq 0$) をとる。そのうちから、 $\{\text{supp}[\alpha_j]\}$ が $\mathbb{R}_z^{n-1}$ の covering になるように、Heine-Borel の定理により有限個をとり出し、 $\tilde{\alpha}_j(z) = \frac{\alpha_j(z)}{\sum_j \alpha_j(z)}$ とおけばよい。各点 z_0 の近傍のとり方と、 $z=0$ での $\|\alpha \wedge^{-\ell} Lu\|$ の下からの評価は、次の五つの場合に分けて、検討する。 $J \cap \{x=0\} \times \mathbb{R}_z^{n-1}$ を $\dot{J}$ とかき、他もこれにならう。

Case 1. $z_0 \notin \dot{J}$

Case 2. $z_0 \in \dot{J} \setminus \dot{J}^{(2)}$

Case 3. $z_0 \in \dot{J}_k^{(2)}$ であつ、 $z=0$ で (A) が満たされている。

Case 4. $z_0 \in \overset{\circ}{J}_k^{(2)}$ で $m_k = 2$, (B) が満たされている。

Case 5. $z_0 \in \overset{\circ}{J}_k^{(2)}$ で $m_k \geq 3$, (B) が満たされている。

ここでは、Case 4 の場合は Case 2 の評価を 2 度用いることにより、又、Case 5 の場合は、Case 3 の評価と Case 2 の評価をくり返して適用することにより、容易に得られるから省略する。さしあたり、 $\Omega = B_h$ とする。 B_h は原点を中心とする半径 h の球である。一般に、

$$\begin{aligned} (1) \quad \alpha(D) \Lambda^{-l} L(\alpha, D) u &= P(\alpha, D) (\alpha \Lambda^{-l} u) - i Q(\alpha, D) (\alpha \Lambda^{-l} u) \\ &\quad - i \operatorname{grad}_z \Lambda^{-l} \cdot \operatorname{grad}_x P(\alpha, D) (\alpha u) \\ &\quad - i \operatorname{grad}_z \alpha(D) \cdot \operatorname{grad}_x P(\alpha, D) (\Lambda^{-l} u) + \tilde{R}(\alpha, D) u, \\ &\quad (\tilde{R}(\alpha, D) \text{ は高々 } s-2 \text{ 次}). \end{aligned}$$

4. Case 1. (elliptic estimate). $z_0 \notin \overset{\circ}{J}$ ゆえ、

z_0 の近傍 U_{z_0} と V_x を十分小さく取れば、 $\overline{V_x} \times \overline{U_{z_0}} \cap J = \emptyset$ とれる。(1) の右辺において、symbol $P(\alpha, z)$ は $\operatorname{supp} \alpha$ の外では z について自由に修正してよから、適当に修正すると、global に $|P(\alpha, z)| \geq \delta |z|^s$ ($\delta > 0$) とできる。したがって、

$$(4.1) \quad \|P(x, D)(\alpha \Lambda^{-l} u)\| \geq \delta \|\alpha \Lambda^{-l} u\|_s - C(k, h) \|u\|_{-k}.$$

ゆえに (1) の estimate は

$$(4.2) \quad \|\alpha \Lambda^{-l} L u\| \geq \frac{\delta}{2} \|\alpha u\|_{s-l} - \sum_{j=1}^n \|\alpha_{j_j} u\|_{s-l} \\ - C \|u\|_{s-l-2} - C(k, h) \|u\|_{-k}.$$

更に $\|\alpha_{j_j} u\|_{s-l}$ の処理のために $\|\alpha_{j_j} \Lambda^{-l} L u\|$ の評価

$$(4.3) \quad \|\alpha_{j_j} \Lambda^{-l} L u\| \geq \frac{\delta}{2} \|\alpha_{j_j} u\|_{s-l} - C \|u\|_{s-l-2} - C(k, h) \|u\|_{-k}$$

を用いると、適当な正定数 C_j ($1 \leq j \leq n$) により、

$$(4.4) \quad C \|L u\|_{-l} \geq \|\alpha \Lambda^{-l} L u\| + \sum_{j=1}^n C_j \|\alpha_{j_j} \Lambda^{-l} L u\| \\ \geq \frac{\delta}{2} \|\alpha u\|_{s-l} - C' \|u\|_{s-l-2} - C(k, h) \|u\|_{-k}.$$

5. Case 2. (hyperbolic estimate). まず $j \setminus j^{(2)}$ 上の各点の近傍に support をもつ $\{\alpha_j^{(1)}\}$ をとり、 $\{\text{supp}[\alpha_j^{(1)}]\}$ が $j \setminus j^{(2)}$ の covering になるように Heine-Borel の定理で有限個をとり出す。更に $\{\text{supp}[\alpha_j^{(2)}]\}$ が $\cap (\cup \text{supp}[\alpha_j^{(1)}])$ の covering になるように、有限個の $\alpha_j^{(2)}$ を追加する。このとき、 $\text{supp}[\alpha_j^{(2)}] \cap J = \emptyset$ となるようにとれる。このようにとると、 $\sum_j \alpha_j^{(1)} + \sum_j \alpha_j^{(2)} \geq C_0 > 0$ on $\text{supp}(\sum_j \alpha_j^{(1)})$ となる。適当な座標の回転により、

$$P(x, \xi) = (\xi_1 - \psi(x, \xi')) P_0(x, \xi) \quad \text{on } \text{supp}[\alpha_j^{(1)}]$$

かつ $P_0(x, \xi) \neq 0$ on $\text{supp}[\alpha_j^{(1)}]$ とできる。

簡単のために、 $\alpha_j^{(1)}$ を α とかくと、(1) より

$$(5.1) \quad \|\alpha \Lambda^{-\ell} L u\| \geq \|(D_1 - \psi(\alpha, D')) P_0(\alpha, D) \alpha \Lambda^{-\ell} u\| \\ - \|\alpha u\|_{s-\ell-1} - \sum_{j=1}^n \|\alpha_{\beta_j} u\|_{s-\ell} - c \|u\|_{s-\ell-2}.$$

§ 5.1. $\|(D_1 - \psi(\alpha, D')) P_0(\alpha, D) \alpha \Lambda^{-\ell} u\|$ について. $\beta(\alpha) \in \mathcal{B}(B_{2h})$

と, $\beta(\alpha) = 1$ on B_h とおけるようにとる。擬微分作用素の quasi-local property を考慮すると, $v = P_0(\alpha, D) \alpha \Lambda^{-\ell} u$ とおいて

$$\|(D_1 - \psi(\alpha, D')) v\| \geq \|(D_1 - \psi(\alpha, D')) \beta v\| - C(k, h) \|u\|_{-k}$$

を得る。右辺第一項に weight function $\varphi(x_1) = (x_1 + 3h)^{-1}$ を用いて Calderón 式評価を行うと。 ([2] 参照)

$$\begin{aligned} \|(D_1 - \psi(\alpha, D')) \beta v\| &\geq h \|\varphi(x_1) (D_1 - \psi(\alpha, D')) \beta v\| \\ &\geq h \|\varphi'(x_1) \beta v\| \\ &\geq 5^{-2} h^{-1} \|v\| - C(k, h) \|v\|_{-k}. \end{aligned}$$

更に $P_0(\alpha, D)$ が $\text{supp}[\alpha]$ 上で elliptic ゆえ, Case 1 と同様にして,

$$(5.2) \quad \|(D_1 - \psi(\alpha, D')) P_0 \alpha_j^{(1)} \Lambda^{-\ell} u\| \geq c h^{-1} \|\alpha_j^{(1)} u\|_{s-\ell-1} \\ - C(k, h) \|u\|_{-k}.$$

§ 5.2 $\|\alpha_{\beta_k}^{(1)} u\|_{s-\ell}$ について. 一方, $\|\alpha_{\beta_k}^{(1)} u\|_{s-\ell}$ については,

$$(5.3) \quad \|\alpha_{\beta_k}^{(1)} u\|_{s-\ell} \leq c_0^{-1} \|\alpha_{\beta_k}^{(1)} (\sum_i \alpha_i^{(1)} + \sum_i \alpha_i^{(2)}) u\|_{s-\ell} \\ \leq C \left(\sum_i \|\alpha_i^{(1)} u\|_{s-\ell-1} + \sum_i \|\alpha_i^{(2)} u\|_{s-\ell-1} \right)$$

§ 5.3 $\|\alpha_i^{(2)} \Lambda^{-\ell} L u\|$ について及び総和. $\|\alpha_i^{(2)} \Lambda^{-\ell} L u\|$

に ついては. Case 1. (4.4) の elliptic estimate が 成り立
つから. quasi-local property を考慮して.

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \|\alpha_i^{(2)} \Lambda^{-2} L u\| &\geq \frac{\delta}{2} \|\alpha_i^{(2)} u\|_{s-2} - C \|u\|_{s-2} - C(k, h) \|u\|_{-k} \\ &\geq \frac{\delta}{2h} \|\alpha_i^{(2)} u\|_{s-2-1} - C \|u\|_{s-2} - C(k, h) \|u\|_{-k}. \end{aligned}$$

したがって (5.2) ~ (5.4) より.

$$\begin{aligned} &\sum_j \|\alpha_j^{(1)} \Lambda^{-2} L u\| + \sum_j \|\alpha_j^{(2)} \Lambda^{-2} L u\| \\ &\geq C_1 h^{-1} \left(\sum_j \|\alpha_j^{(1)} u\|_{s-2-1} + \sum_j \|\alpha_j^{(2)} u\|_{s-2-1} \right) \\ &\quad - C_2 \left(\sum_j \|\alpha_j^{(1)} u\|_{s-2-1} + \sum_j \|\alpha_j^{(2)} u\|_{s-2-1} \right) \\ &\quad - C' \|u\|_{s-2} - C(k, h) \|u\|_{-k}. \end{aligned}$$

すなわち.

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \|L u\|_{-2} &\geq C_1 h^{-1} \left(\sum_j \|\alpha_j^{(1)} u\|_{s-2-1} + \sum_j \|\alpha_j^{(2)} u\|_{s-2-1} \right) \\ &\quad - C' \|u\|_{s-2} - C(k, h) \|u\|_{-k}, \\ &\quad (\text{for sufficiently small } h). \end{aligned}$$

6. Case 3. (subelliptic estimate).

§6.1. system 化. $\{\text{supp}[\alpha_j]\}$ が $\dot{J}_k^{(w)}$ の covering
になるように有限個の $\{\alpha_j\}$ をとる. 適当な座標の回転により.

$$P(\alpha, \mathcal{Z}) = P_0(\alpha, \mathcal{Z}) (\mathcal{Z}_1 - \Psi(\alpha, \mathcal{Z}'))^m \quad \text{on } \text{supp}[\alpha_j].$$

== に $P_0(\alpha, \mathcal{Z}) = a_0(\alpha) \left\{ \mathcal{Z}_1 - \sum_{j=0}^{s-m-1} a_j(\alpha, \mathcal{Z}') \mathcal{Z}_1^j \right\}$. $\text{proj}_{\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}'}(\text{supp}[\alpha_j])$
の外で $P(\alpha, \mathcal{Z})$ を $\mathcal{Z}'$ に関して適当に修正しておけば. C^∞ の
滑らかさの枠内で $\Psi(\alpha, \mathcal{Z}')$, $a_j(\alpha, \mathcal{Z}')$ は global に定義される.

$$\Pi_0(x, D) = P_0(x, D) (D_1 - \psi(x, D'))^m$$

$$i \Pi_1(x, D) = \Pi_0(x, D) - P(x, D) + i Q(x, D) \\ + i \operatorname{grad}_x \Lambda^{-L} \cdot \operatorname{grad}_x P(x, D) \Lambda^L$$

とおく。 (1) は

$$(6.1) \quad \alpha \Lambda^{-L} L u = \Pi_0(x, D) (\alpha \Lambda^{-L} u) - i \Pi_1(x, D) (\alpha \Lambda^{-L} u) \\ - i \operatorname{grad}_x \alpha(D) \cdot \operatorname{grad}_x P(x, D) (\Lambda^{-L} u) + \tilde{R}(x, D) u.$$

== 1. Π_1 の主要部を Π_1^0 とすると $\Pi_1^0(x, \xi) \equiv \Pi(x, \xi) \pmod{}$

$(\xi_1 - \psi(x, \xi'))^m$. さらに

$$\Pi_1^0(x, \xi) = \sum_{k=1}^{m+1} b_k(x, \xi') |\xi'|^{s-k} (\xi_1 - \psi(x, \xi'))^{k-1} \\ + \sum_{k=m+2}^s b_k(x, \xi') |\xi'|^{s-k} \xi_1^{k-m-1} (\xi_1 - \psi(x, \xi'))^m$$

($b_k(x, \xi')$ は ξ'_1 に関して齊次で order $s-k$)

とおく。 (6.1) を system 化する。 $|\xi'|$ を symbol とする擬微分作用素を Λ_0 とかく。 $\tilde{u} = \alpha \Lambda^{-L} u$ とおく。

$$u_j = \begin{cases} (\Lambda_0 + 1)^{s-j} (D_1 - \psi(x, D'))^{j-1} \tilde{u} & 1 \leq j \leq m+1 \\ (\Lambda_0 + 1)^{s-j} D_1^{j-m-1} (D_1 - \psi(x, D'))^m \tilde{u} & m+2 \leq j \leq s \end{cases}$$

とおき $U = (u_j)$ とかく。

$$(6.2) \quad \tilde{L}(x, D) U = D_1 U - H U - B U - G_1 U - G_2 U - \sum_{j=0}^n U_j.$$

== 1.

$$H(x, D') = \begin{pmatrix} \psi(x, D') & \Lambda_0 & & & \\ & \Lambda_0 & & & \\ & & \Lambda_0 & & \\ & & & 0 & \Lambda_0 \\ i b_1 & \dots & i b_m & a_0 + i b_{m+1} & \dots & a_{s-m-1} + i b_s \end{pmatrix},$$

$a_j(\alpha, D')$ は斉次で order 1, $b_j(\alpha, D')$ は斉次で order 0.

$$B(\alpha, D') = \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} c_1 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & c_m \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{ccc} & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{array} \end{array} \right), \quad C_j = [(\lambda_0 + 1)^{s-j}, \psi] (\lambda_0 + 1)^{-(s-j)}.$$

$$G_1(\alpha, D') = \begin{pmatrix} 0 \\ 0, \dots, 0, g_{m+1}^{(1)}, \dots, g_s^{(1)} \end{pmatrix}, \quad g_j^{(1)} = a_{j-m-1} \{ \lambda_0^{s-j} - (\lambda_0 + 1)^{s-j} \} \times (\lambda_0 + 1)^{-s+j}.$$

$$G_2(\alpha, D') = \begin{pmatrix} 0 \\ g_1^{(2)}, \dots, g_s^{(2)} \end{pmatrix}, \quad g_j^{(2)} = i b_j \{ \lambda_0^{s-j} - (\lambda_0 + 1)^{s-j} \} (\lambda_0 + 1)^{-s+j}.$$

$$U_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ u^{(j)} \end{pmatrix}, \quad u^{(j)} = i P'_{\alpha_j}(\alpha, D) \alpha_{\bar{j}} \Lambda^{-L} u = P_j(D, \psi)^{m-1} \alpha_{\bar{j}} \Lambda^{-L} u$$

($P_j(\alpha, D)$ は order $s-m+1$, $1 \leq j \leq n$),

$$\|u^{(0)}\| \leq \|u\|_{s-L-2}.$$

なお、明かに $\|\alpha \Lambda^{-L} L u\| = \|\tilde{L} U\|$.

§ 6.2. H の ψ に対応する固有値と固有vector. ψ に対応

する m 個の固有値は次の様に Puiseux 展開される。

Lemma 1. $\mu_j(\alpha, \bar{z}') = \psi(\alpha, \bar{z}') + \sum_{k=1}^{\infty} \nu_{j,k}(\alpha, \bar{z}') |\bar{z}'|^{1-\frac{k}{m}}$

特に $\nu_{j,1} = \omega^{(j-1)} \left\{ \frac{i b_j}{P_0} \right\}_{\bar{z}' = \psi}^{\frac{1}{m}}$ は non-real ($1 \leq j \leq m$).

== ω は 1 の原始 m 乗根である。

(証明は [6], [4] 参照)

μ_j に属する $H/|Z|$ の固有 vector $V_j = (V_{j,k})$ の主要部は.

Lemma 2. $V_{j,k} \sim (\mu_j - \psi)^{m-k} P_0(\alpha, \beta) |_{\beta_1 = \psi} \quad (1 \leq k \leq m)$
 $V_{j,s} = 1$

又, $V_{j,k} \ (m+1 \leq k \leq s-1)$ の主要部の order は高々ゼロ。

§ 6.3. H_1 の ψ 以外の固有値と root vectors.

$$H_1(\alpha, \beta') = \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc} \psi(\alpha, \beta') & |Z'| & \\ & \ddots & |Z'| \\ & & \psi(\alpha, \beta') \end{array} & \begin{array}{c} |Z'| \\ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \end{array} & \begin{array}{ccc} |Z'| & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} \alpha_0(0, \beta'_0) \frac{|Z'|}{|Z'_0|}, \dots, \alpha_{s-m-1}(0, \beta'_0) \frac{|Z'|}{|Z'_0|} \end{array} \end{pmatrix}$$

とかくと, $\det(\lambda I - H_1) = (\lambda - \psi)^m P_0(0; \lambda, \beta'_0 \cdot \frac{|Z'|}{|Z'_0|})$ となるから.

$\det(\lambda I - H_1) = 0$ の ψ 以外の根を $\lambda_k(|Z'|)$ とすると.

$\lambda_k(|Z'|) = \lambda_k |Z'|$ (λ_k は定数) となる. λ_k の重複度を r_k ($1 \leq k \leq g$) とする.

以下, $H_0 = H_1/|Z'|$, $\lambda_k = \lambda$, $r_k = r$ とかくと, $\lambda I - H_0$ の rank が $s-1$ かつ, root space の構造は自然に決まる.

root vector v は $v(\lambda I - H_0)^r = 0$ の non-trivial solution である. $(\lambda I - H_0)^r$ の $m+1$ 列から $m+r$ 列までを除いた行列 H_4 の上から $s-r$ 行までをとった行列 H_5 が maximal

rank $s-r$ を与えたとくに注目する。 $V_1 = (w_1, \dots, w_{s-r}, 1, 0, \dots, 0)$, $w_k = -\Delta^{-1} \cdot \Delta_{s-r+1, k}$ ($\Delta = \det H_5$, $\Delta_{s-r+1, k}$ は H_5 の k 行と H_4 の $s-r+1$ 行でおきかえた行列の行列式) とおく。

Lemma 3. $V_j^{(k)} = V_1^{(k)} (H_0 - \lambda_k I)^{j-1} \quad (1 \leq j \leq r_k) \quad \text{or}$
 H_0 の λ_k に属する root vectors のすべてを与える。なお、
 $V_j^{(k)}$ において、はじめの m 個の成分はゼロであり、第 s 成分
 は定数である。

§ 6.4 matrix $N(x, \beta')$ と $H(x, \beta')$ の Jordan 標準形.

$$N_1 = {}^t(v_1, \dots, v_m, \vec{0}, \dots, \vec{0}), N_2 = {}^t(\vec{0}, \dots, \vec{0}, v_1^{(u)}, \dots, v_r^{(u)}, v_1^{(w)}, \dots, v_r^{(w)}) \quad \text{et} \quad N = N_1 + N_2, \quad \mathcal{R}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 0, \dots, 0, a_0(x, \mathcal{I}) - a_0(0, \frac{\mathcal{I}'}{\|\mathcal{I}\|}), \dots, a_{s-m-1}(x, \mathcal{I}) - a_{s-m-1}(0, \frac{\mathcal{I}'}{\|\mathcal{I}\|}) \end{pmatrix},$$

$$H_3 = \left(ib_1(\alpha, \beta), \dots, ib_s(\alpha, \beta) \right),$$

とおく。明かに $H = H_1 + H_2 + H_3$ である。 N_1, N_2 のとり

方から $NH = N_1 H + N_2 (H_1 + H_2 + H_3) = \partial N_1 + \partial N_2 + N_2 H_2 + N_2 H_3$ となる。

§ 6.5. $M = N^{-1}$ について.

Lemma 4. $\det N$ は true order $-\frac{m-1}{2}$ である。

Lemma 4 より. $M = N^{-1}$ は第 i 行が $\max\{1 - \frac{i}{m}, 0\}$ の order を持ち. $N = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ の形より M も $M = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ の形である。従って. $M \circ N - MN$ は order が高々 $-\frac{1}{m}$ で. 特に m 行から s 行までは高々 -1 の order である。さらに $M \circ N - MN$ は $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ の形である。以上のことから. $NU = V$ とおき.

quasi-local property を考慮すると. 次の lemma を得る。

一般に $W = (w_k)$ とし $W = W^{(1)} + W^{(2)} + W^{(3)}$. $W^{(1)} = {}^t(w_1, \dots, w_m, 0, \dots, 0)$, $W^{(2)} = {}^t(0, \dots, 0, w_{m+1}, \dots, w_s)$, $W^{(3)} = {}^t(0, \dots, 0, w_m, w_{m+1}, \dots, w_s)$ とかく。

Lemma 5. 任意の実数 k に対して.

$$\|(\Lambda_0 + 1)^{-\frac{1}{m}} V\|_k \geq C \|U\|_k - C' \|\alpha U\|_{s-l-2+k}$$

$$\|V^{(2)}\|_k \geq C \|U^{(2)}\|_k - C' \|\alpha U\|_{s-l-2+k}$$

$$\|V\|_k \geq C \|U^{(3)}\|_k - C' \|\alpha U\|_{s-l-2+k}$$

以下. $N \tilde{U}$ の評価を行うのであるが. k_j ($1 \leq j \leq s$) を正定数として. $K = \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_s \end{pmatrix}$ とおき. $KN \tilde{U}$ の評価をする。

$$(\|KW\| = \sum_{j=1}^s k_j \|w_j\|).$$

$$(6.3) \quad KN\tilde{L}U = K(D_1 - \Theta)V + iKN'_1U - K(NH - N \cdot H)U \\ - K(\Theta \circ N - \Theta N)U - KN_2H_2U - KN_2H_3U - KNB U \\ - KNG_1U - KNG_2U - \sum_{j=0}^n KN U_j.$$

§. 6. 6. type N と KN_2H_2 及び KN_2H_3 について. $A = (a_{ij}(D))$ が "type N " であるとは A が 次の 1)~3) を満たすことである。 1) $a_{ij} \in S_{i,0}^0$, 2) $\text{ord.}(a_{ij}) \leq \min \{-1 + \frac{j}{m}, 0\}$, 3) $1 \leq i \leq m$, $m+1 \leq j \leq S$ のとき $a_{ij} \equiv 0$.

Lemma 6. A が type N のとき $V = NU$ とすると

$$\|AU\|_R \leq C\|V\|_R + C(i)\|(\lambda_0 + 1)^{-i}U\|_R.$$

Lemma 7. KN'_1 , $K(NH - N \cdot H)$, $K(\Theta \circ N - \Theta N)$, KNB , KNG_1 , KNG_2 はすべて type N である。

一方 N_2 の形と H_2 の $\Theta|_{L^2}$ から L^2 への operator norm が $\text{supp}[\alpha]$ を十分小さくしぼってあげれば十分小さい ε であらえらるることから, $k' = \max_{m+1 \leq j \leq S} \{k_j\}$ とおくと

$$\text{Lemma 8.} \quad \|KN_2H_2U\| \leq \varepsilon \|(\lambda_0 + 1)U^{(2)}\|, \\ \|KN_2H_3U\| \leq k' \cdot C \|U\|.$$

§ 6. 7. $K(D_1 - \Theta)V$ の言平価. $1 \leq j \leq m$ のとき $K(D_1 - \Theta)V$ の第 j 行は $k_j \|(D_1 - \mu_j)v_j\|$ である。 $\|I_m \mu_j(x, D)v_j\| \sim \|(\lambda_0 + 1)^{-\frac{1}{2}}v_j\|$ であるから、 $\|(D_1 - \mu_j)v_j\| \geq \|v\|_{1-\frac{1}{m}} - C(i)\|u\|_{-i}$ を得る。
一方 $m+1$ 行から $S-1$ 行までは $k_j \|(D_1 - \lambda_j)v_j - \lambda_0 v_{j+1}\| \geq$

$k_j \|(D_i - \lambda_j) v_j\| = k_j \|\Lambda_0 v_{j+1}\|$, s 行は $k_s \|(D_i - \lambda_s) v_s\|$ である. $\text{supp } [\alpha]$ の上で $\lambda_j - \lambda_{j'} (j' \neq j)$ はゼロにならないから dual space の quasi-local property を考慮して. $\text{supp } [\alpha]$ の外で λ_j を変更すると. $\|(D_i - \lambda_j) v_j\| \geq C \|v_j\|_1 - C(i) \|u\|_{-i}$ を得る. したがって適当に k_j ($m+1 \leq j \leq s$) を fix し. $k_1 = \dots = k_m = k_0$ とすると.

$$(6.4) \quad \|K(D_i - \Theta) V\| \geq C_0 k_0 \|V^{(1)}\|_{1-\frac{1}{m}} + C_1 \|V^{(2)}\|_1 - C(i, h) \|u\|_{-i}.$$

(6.4) 及び Lemma 5, 6, 7, 8 により. k_0 を十分大きく.

h を十分小さくすれば 次の評価を得る.

$$(6.5) \quad \|K \Lambda^{-l} U\| \geq C_0' (\|U\| + \|U^{(3)}\|_{1-\frac{1}{m}}) - \sum_{j=1}^n \|U_j\| \\ - C \|u\|_{s-l-2} - C(k_j, h, i) \|u\|_{-i}.$$

一方. α のかわりに $\alpha_{j_j} \Lambda^{\frac{1}{m}}$, $\alpha_{j_j j_k} \Lambda^{\frac{2}{m}}$ を用いてつくられる U にあたるものを $U_{(j)}$, $U_{(j,k)}$ とかくと. $\|U_j\| \leq C \|U_{(j)}^{(3)}\|_1$, $\|U_{j,k}\| \leq C \|U_{(j,k)}^{(3)}\|_1$ であるから. 適当に $C_j, C_{j,k}$ ($1 \leq j, k \leq n$) をとれば.

$$(6.6) \quad \|\alpha \Lambda^{-l} U\| + \sum_{j=1}^n C_j \|\alpha_{j_j} \Lambda^{\frac{1}{m}-l} U\| + \sum_{j,k=1}^n C_{j,k} \|\alpha_{j_j j_k} \Lambda^{\frac{2}{m}-l} U\| \\ \geq C \|\alpha u\|_{s-l-1} - C(k_j, h, i) \|u\|_{-i} - C' \|u\|_{s-l-2}.$$

(6.4), (6.5), (6.6) を寄せ集めると.

$$(6.7) \quad \|L u\|_{-l} \geq C \sum_{j=1}^n \|\alpha_j u\|_{s-l-1} - C \|u\|_{s-l-2} - C(h, i) \|u\|_{-i} \\ \geq C \|u\|_{s-l-1} - C(h, i) \|u\|_{-i}.$$

ここで $i = s-l-3$ にとり. $u(x)$ を $\mathcal{O}(B_d)$ ($d < h$) の元に制限

すると、十分小さい d については (6.7) は下の不等式を含んでいる。(L. Nirenberg - F. Trèves [7], Part II 参照)

$$(6.8) \quad \|Lu\|_{-l} \geq C_0 \|u\|_{s-l-1}.$$

Q. E. D.

References

- [1] R. Beals and C. Fefferman : On local solvability of
l. p. d. e. Ann. Math. 97, 482-498 (1973)
- [2] A. P. Calderón : Uniqueness in the Cauchy problem
for p. d. e. Amer. J. 80, 16-36 (1958)
- [3] F. Cardoso and F. Trèves : A necessary condition of
local solvability for pseudo-d. e. with double
characteristics. Ann. Inst. Fourier, 24 (no. 1),
225-292 (1974)
- [4] W. Matsumoto : Uniqueness in the Cauchy problem
for p. d. e. with multiple characteristic roots.
J. Math. Kyoto Univ. (to appear).
- [5] ——— : Local solvability of a class of p. d. e.
with multiple characteristics. Proc. Japan. Acad.
(to appear)
- [6] S. Mizohata and Y. Ohya : Sur la condition
d'hyperbolicité pour les équations à caractéristiques

multiples II. Japan J. Math. 40, 63-104

(1971)

- [7] L. Nirenberg and F. Trèves : On local solvability
of l. p. d. e. Part I Necessary condition,
Part II Sufficient condition. Comm. Pure
Appl. Math., 23, 1-38, 459-509 (1970).