

C. J. Everett の仕事の紹介

茨城大・理 竹内 護

これは, C. J. Everett, 'Fermat's conjecture, Roth's theorem, Pythagorean triangles, and Pell's equation', Duke Math. (1974) の紹介である. この中で, 彼は, Fermat's equation に Roth's theorem を応用している. Everett の結果は次の通り:

定理(Everett). 奇素数 $p \geq 3$ と, 整数 $v \geq 1$ を fix する.
そのとき, 直線 $y = x + v$ 上には, $x^p + y^p$ が整数の p べきであるような互いに素な整数の組 (x, y) はせいぜい有限個しか存在しない.

次に証明の概略を述べる. 今 (x, y) を定理の条件を満たす一組の解とする. z は $x^p + y^p = z^p$ を満たす整数とする. $b = \frac{v}{2}$, $a = x + b$ とおく. その時, 次の (1), (2) は容易に出る:

(1) $z^p = (a-b)^p + (a+b)^p = 2a(a^{p-1} + C_2^p a^{p-3} b^2 + \dots + C_{p-3}^p a^2 b^{p-3} + C_{p-1}^p b^{p-1})$,

$$(2) \quad 0 < (z - z^{1/p} a) p (z^{1/p} a)^{p-1} < z^p - z a^p = z a (C_2^p a^{p-2} z^2 + \dots + C_{p-1}^p a^{p-1}) < a^{p-2} K,$$

$$0 < \frac{z}{a} - z^{1/p} < \frac{K'}{a^2},$$

ここで, K, K' は v と p にのみ依存する定数である.

Everett は, まず v が奇数, 偶数の場合に分け, 更に, $p \nmid z$, $p \mid z$ の場合に分けて証明している. すべて同じ論法なので, ここでは, v が奇数, $p \nmid z$ の場合だけを述べる.

$u = za$ とおく. $zx = u - v$, $zy = u + v$ がすぐわかる. これより, u と v は両方とも奇数で, $(u, v) = 1$ である. (1) から,

$$(3) \quad z^p z^p = zu(u^{p-1} + C_{p-2}^p u^{p-3} v^2 + \dots + C_{p-2}^p u^2 v^{p-3} + C_{p-1}^p v^{p-1}) \equiv zuq'$$

がわかる. これより, $z^{p-1} \mid q'$ で, $z^p = uq''$, $q' \equiv z^{p-1} q''$ を得る.

(3) から, $p \mid u \Rightarrow p \mid z$ が出る. 上の仮定から, $p \nmid u$ で, $(u, q') = (u, q'') = 1$ が出る. これより, $za = u = z_1^p$, $z = z_1 z_2$, $(z_1, z_2) = 1$ が出る. これを (2) に代入すると,

$$0 < \frac{z z_2}{z_1^{p-1}} - z^{1/p} < \frac{K'}{z_1^{p-1}} = \frac{K'}{(z_1^{p-1})^{1+\varepsilon}}, \quad \varepsilon = \frac{2}{p-1}$$

を得る. $z_1^p = u = za = zx + v$ であるから, 異なる x に, 異なる z_1 が対応する. これから, Roth's theorem より, 定理の条件を満たす (x, y) はせいぜい有限個しか存在しない.

附記. M 氏に何が, たところによれば, この結果の effective な証明 (Baker 流の) がすでにあるそうです.