

頂点作用素代数入門

大阪大学大学院 理学研究科数学専攻 小川明彦 (Akihiko Ogawa)

Department of Mathematics, Graduate School of Science,

Osaka University, Toyonaka, Osaka 560-0043

この講演では、VOA に関する概念の定義と知られている結果について発表する。

1 Vertex operator algebra (VOA)

Definition 1 V が VOA とは、

(i) $V = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} V_n$ s.t. $\dim V_n < \infty$ ($\forall n \in \mathbf{Z}$), $V_n = 0$ ($n \ll 0$),

(ii)

$$\begin{aligned} V &\rightarrow (\text{End} V)[[z, z^{-1}]] : \mathbf{C}\text{-linear} \\ a &\mapsto Y(a, z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n z^{-n-1}, \end{aligned}$$

(iii) $1 \in V_0$: vacuum, $\omega \in V_2$: Virasoro element,

を持ち、 $(V, Y, 1, \omega)$ は、以下の 6 個の公理を満たす。

$\forall a, b \in V$ に対し、

(V1) $a_n b = 0$ ($n \gg 0$),

(V2)
$$\begin{aligned} z_0^{-1} \delta \left(\frac{z_1 - z_2}{z_0} \right) Y(a, z_1) Y(b, z_2) - z_0^{-1} \delta \left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0} \right) Y(b, z_2) Y(a, z_1) \\ = z_2^{-1} \delta \left(\frac{z_1 - z_0}{z_2} \right) Y(Y(a, z_0) b, z_2), \end{aligned}$$

但し、 $\delta(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} z^n$ を δ -function とする。

(V3) $Y(1, z) = \text{id}_V$, $Y(a, z)1 \in V[[z]]$, $\lim_{z \rightarrow 0} Y(a, z)1 = a$,

(V4) $Y(\omega, z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} L_n z^{-n-2}$ とおくと、

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{m^3 - m}{12} c_V \delta_{m+n, 0} \quad (m, n \in \mathbf{Z}),$$

但し、 $c_V \in \mathbf{C}$ とする。 c_V を central charge と呼ぶ。

(V5) $\forall a \in V_n$ に対し、 $L_0 a = na$,

特に、 $n = wt(a)$ と書く。

以下、 $a \in V_n$ を *homogeneous* と呼ぶ。

(V6) $\frac{d}{dz} Y(a, z) = Y(L_{-1}a, z)$.

VOA で良く使われる公式 (commutator formula, skew-symmetry) を紹介する。

Proposition 1

(1) *commutator formula*:

$$[a_m, b_n] = \sum_{i \geq 0} \binom{m}{i} (a_i b)_{m+n-i} \quad (\forall a, b \in V, m, n \in \mathbf{Z}),$$

(2) *skew-symmetry*:

$$Y(a, z)b = e^{zL_{-1}} Y(b, -z)a \quad (\forall a, b \in V),$$

(3) $\forall m, n \in \mathbf{Z}, a \in V$: *homogeneous* に対し、

$$a_m V_n \subseteq V_{n+wt(a)-m-1}.$$

Proof.

(1) $\text{Res}_{z_0=0, z_1=0, z_2=0} z_0^l z_1^m z_2^n$ (Yacobi identity) で成分表示すると、

$$\sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{l}{i} (a_{l+m-i} b_{n+i} - (-1)^l b_{l+n-i} a_{m+i}) = \sum_{i \geq 0} \binom{m}{i} (a_i b)_{m+n-i}$$

となり、 $l = 0$ とおくと得られる。

(2) Yacobi identity は $(a, b, z_0, z_1, z_2) \mapsto (b, a, -z_0, z_2, z_1)$ の変換で不変なので、次のように変形できる。

$$\begin{aligned} & z_2^{-1} \delta \left(\frac{z_1 - z_0}{z_2} \right) Y(Y(a, z_0)b, z_2) \\ = & z_1^{-1} \delta \left(\frac{z_2 + z_0}{z_1} \right) Y(Y(b, -z_0)a, z_1) \\ = & z_1^{-1} \delta \left(\frac{z_2 + z_0}{z_1} \right) Y(Y(b, -z_0)a, z_2 + z_0) \\ = & z_2^{-1} \delta \left(\frac{z_1 - z_0}{z_2} \right) Y(Y(b, -z_0)a, z_2 + z_0) \end{aligned}$$

この両辺に Res_{z_1} を作用させると、

$$\begin{aligned} & Y(Y(a, z_0)b, z_2) \\ &= Y(Y(b, -z_0)a, z_2 + z_0) \\ &= Y(e^{z_0 L_{-1}} Y(b, -z_0)a, z_2 + z_0) \end{aligned}$$

となり、injectivity を使うと得られる。

(3) commutator formula から、 $b \in V_n$ に対し、

$$L_0 a_m b = [L_0 a_m]b + a_m L_0 b = (wt(a) - m - 1 + n)a_m b$$

を得る。 $\square$

2 Modules of VOA

(1) weak module

(2) admissible module

(3) (ordinary) module

を定義する。以下、 V : VOA とする。

Definition 2 M が *weak V-module* とは、

(i) M : vector space/ $\mathbb{C}$,

(ii)

$$\begin{aligned} V &\rightarrow (\text{End} M)[[z, z^{-1}]] : \mathbb{C}\text{-linear} \\ a &\mapsto Y_M(a, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n^M z^{-n-1}, \end{aligned}$$

を持ち、 (M, Y_M) は、以下の 3 個の条件を満たす。

$\forall a, b \in V, u \in M$, に対し、

$$(M1) \quad a_n^M u = 0 \quad (n \gg 0),$$

$$(M2) \quad Y_M(1, z) = \text{id}_M,$$

$$\begin{aligned} (M3) \quad & z_0^{-1} \delta \left(\frac{z_1 - z_2}{z_0} \right) Y_M(a, z_1) Y_M(b, z_2) - z_0^{-1} \delta \left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0} \right) Y_M(b, z_2) Y_M(a, z_1) \\ &= z_2^{-1} \delta \left(\frac{z_1 - z_0}{z_2} \right) Y_M(Y(a, z_0)b, z_2). \end{aligned}$$

Remark 1 ([DLM1]) $Y_M(\omega, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ とおくと、*weak V-module* M は *Virasoro relation* を満たす。

Proof. $u \in V$ に対し、

$$\begin{aligned}
& Y_M(L(-1)u, z_2) \\
&= Y_M(u_{-2}\mathbf{1}, z_2) \\
&= \text{Res}_{z_0} z_0^{-2} Y_M(Y(u, z_0)\mathbf{1}, z_2) \\
&= \text{Res}_{z_0} \text{Res}_{z_1} z_0^{-2} \left(z_0^{-1} \delta \left(\frac{z_1 - z_2}{z_0} \right) Y_M(u, z_1) Y_M(\mathbf{1}, z_2) \right. \\
&\quad \left. - z_0^{-1} \delta \left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0} \right) Y_M(\mathbf{1}, z_2) Y_M(u, z_1) \right) \\
&= \text{Res}_{z_0} \text{Res}_{z_1} z_0^{-2} z_2^{-1} \delta \left(\frac{z_1 - z_0}{z_2} \right) Y_M(u, z_1) \\
&= \text{Res}_{z_0} \text{Res}_{z_1} z_0^{-2} z_1^{-1} \delta \left(\frac{z_2 + z_0}{z_1} \right) Y_M(u, z_2 + z_0) \\
&= \text{Res}_{z_0} z_0^{-2} Y_M(u, z_2 + z_0) \\
&= \text{Res}_{z_0} z_0^{-2} e^{z_0 \frac{d}{dz_2}} Y_M(u, z_2) \\
&= \frac{d}{dz_2} Y_M(u, z_2)
\end{aligned}$$

が成立するので、 $Y(\omega, z_0)\omega$ を計算すれば、Virasoro relation が得られる。 $\square$

Definition 3 M が *admissible V-module* とは、 M は *weak V-module* であり、

- (1) $M = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}} M_n$,
- (2) $\forall m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}, a \in V$: *homogeneous* に対し、

$$a_m^M M_n \subseteq M_{n+wt(a)-m-1}$$

をみたす。

Definition 4 M が *(ordinary) V-module* とは、 M は *weak V-module* であり、

- (1) $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathbf{C}} M(\lambda)$, $M(\lambda) = \{u \in M \mid L_0 u = \lambda u\}$,
- (2) $\dim M(\lambda) < \infty$ ($\forall \lambda \in \mathbf{C}$),
 $\lambda \in \mathbf{C} : \text{fix}, n \ll 0$ ($n \in \mathbf{Z}$) に対し、 $M(\lambda + n) = 0$

をみたす。

Proposition 2 M が *(ordinary) V-module* ならば、 M は *admissible V-module* である。

Proof.

$$I = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid M(\lambda) \neq 0, M(\lambda + n) = 0 \text{ for } n \in \mathbf{Z}_{<0}\},$$

$$M_n = \bigoplus_{\lambda \in I} M(\lambda + n) \text{ とおくと、 } M = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}} M_n \text{ になる。 } \square$$

3 Zhu 代数

以下、VOA V に付属する結合代数である Zhu 代数 $A(V)$ を用いて、VOA の表現の性質に関する定理を述べる。

$a \in V$: homogeneous, $b \in V$ に対し、

$$\begin{aligned} a * b &= \text{Res}_z \frac{(1+z)^{wt(a)}}{z} Y(a, z)b, \\ a \circ b &= \text{Res}_z \frac{(1+z)^{wt(a)}}{z^2} Y(a, z)b. \end{aligned}$$

とする。([Z])

operations $*$, $\circ$ を V 上 linear に拡張する。

$O(V) = \text{Span}_{\mathbb{C}}\{a \circ b \mid a, b \in V\}$, $A(V) = V/O(V)$ とおく。([Z])

vector space $O(V)$, $A(V)$ に対して、次の命題が成り立つ。

Proposition 3 ([Z])

- (1) $O(V) : *$ に関して両側 *ideal*,
- (2) $A(V) : *$ に関して *associative algebra*.

Proof. [Z] の Theorem 2.1.1 を参照して下さい。 $\square$

operation $*$ に関する結合代数 $A(V)$ を Zhu 代数と呼ぶ。

M : weak V -module に対して、

$$\Omega(M) = \{u \in M \mid a_{wt(a)+n}^M u = 0 \text{ for } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, a \in V: \text{ homogeneous}\},$$

$o(a) = a_{wt(a)-1}^M$ ($a \in V$: homogeneous) とする。

$\circ : V \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}} M$ へ linear に拡張する。

linear map o と $\Omega(M)$ に対して、以下の命題が成り立つ。

Proposition 4 ([Z], [DLM2])

- (1) $o(a)\Omega(M) \subset \Omega(M)$ ($\forall a \in V$),
- (2)

$$\begin{aligned} V &\rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}} \Omega(M) \\ a &\mapsto o(a)|_{\Omega(M)} \end{aligned}$$

は、 $\Omega(M)$ 上に $A(V)$ -module の構造を誘導する。

- (3) M : irreducible admissible V -module に対し、以下が成り立つ。
 (i) $\Omega(M) \cong M_0$ as $A(V)$ -module,
 (ii) $\Omega(M)$: irreducible $A(V)$ -module.

Proof. [DLM2] Theorem 5.3, Proposition 5.4 を参照して下さい。 $\square$

Theorem 1 ([Z], [DLM2])

functor $\Omega : M \mapsto \Omega(M)$ は、irreducible admissible V -module の同値類と irreducible $A(V)$ -module の同値類の間に 1 対 1 対応を与える。

Proof. [Z] Theorem 2.2.2 を参照して下さい。 $\square$

4 Rational VOA

以下、VOA の中で最も重要な Rational VOA の簡単な性質について述べる。

Definition 5 ([DLM1])

V が rational VOA とは、任意の admissible V -module は完全可約であると定義する。

Theorem 2 ([DLM2])

V が rational VOA ならば、次が成り立つ。

- (1) irreducible admissible V -module は有限個に限る。
- (2) 全ての irreducible admissible V -module は ordinary V -module である。

Proof. [DLM2] の Theorem 8.1 を参照して下さい。 $\square$

Theorem 3 ([Z])

V が rational VOA ならば、Zhu 代数 $A(V)$ は有限次元 semisimple associative algebra になる。

Proof. V -module M の top level M_0 が $A(V)$ であるような M が存在する。
 V は rational だから、 M は有限個の irreducible admissible V -module の直和で書ける。
 従って、 M_0 は有限個の $A(V)$ -module の直和で書ける。
 ゆえに、 $A(V)$ は有限次元で、semisimple になる。 $\square$

参考文献

- [DLM1] C. Dong, H. Li and G. Mason: *Regularity of rational vertex operator algebras*, Advances. in Math. **132** (1997), 148-166.
- [DLM2] Dong, Chongying; Li, Haisheng; Mason, Geoffrey *Twisted representations of vertex operator algebras and associative algebras*, Internat. Math. Res. Notices, no. 8 (1998), 389-397.
- [Z] Y. Zhu, *Modular invariance of characters of vertex operator algebras*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 237-302.