

Inadmissible minimax invariant estimator

石井 吾郎 (大阪市大. 高)

§ 1 序

$\mathcal{X} = \{x\}$: 標本空間

$\Theta = \{\theta\}$: 母数空間

$\mathcal{P} = \{f(x, \theta), \theta \in \Theta\}$: $\mathcal{X}$ 上の確率分布族, f は密度関数

$A = \{a\}$: 行動空間

$\Delta = \{\delta\}$; $\delta: \mathcal{X} \rightarrow A$ の map, 決定関数

$L(\theta, a)$: 損失関数

$R(\theta, \delta) = E_{\theta}(L(\theta, \delta(x)))$: リスク

$G = \{g\}$: $\mathcal{X}$ 上の変換群

$\overset{\circ}{G} = \{\overset{\circ}{g}\}$: Θ 上の変換群

$\bar{G} = \{\bar{g}\}$: A 上の変換群

$G, \overset{\circ}{G}, \bar{G}$ 相互の関係は $g \leftrightarrow \overset{\circ}{g}$ 同型, $\overset{\circ}{g} \rightarrow \bar{g}$ 準同型とする

$L(\overset{\circ}{g}\theta, \bar{g}a) = L(\theta, a)$ のとき損失は G -不変であるという.

$\delta(gx) = \bar{g}\delta(x)$ のとき δ を G -不変な決定関数という.

$\Delta_G = \{\delta: \delta(gx) = \bar{g}\delta(x)\}$: G -不変な決定関数全体

損失関数がある変換群 G について不変であるときには Δ_G のなかからなるべくよい δ を求めると言う原則を立てて見る. そのとき ① δ が Δ_G の中でミニマックスであれば Δ の中でミニマックスであらうとか ② δ が Δ_G の中で許容的であれば Δ の中で許容的であらう といった様な期待がありうるわけであり. 実際そうになっている例は沢山あるし、又適当な

条件の下で①, ② が成立することを示す定理もあります。Kudo. Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Uni. 1955. Kiefer. Ann. Math. Stat. 1957. 適当な条件の下で肯定的な結論の出る場合の話はこゝの論文あるいは次の Stein の論文の引用文献を見て頂くことにしまして、ここで紹介しようとするのは

Stein [1] 3rd Berkeley Symposium

[2] 4th Berkeley Symposium

[3] Hotelling 記念論文集

にあります否定的な例であります。則ち Δ_0 の中から良いものを選んで見たらそれより良いものが Δ の中で見つかるであろうと云う例であります。

次節で Stein [1], [2] の結果を少し修正した形で述べます。

§2 最小2乗推定は許容的でない ($\lambda > 2$ のとき)

観測値 X は次の線形構造をもつていると仮定する。

$$(1) \quad X = A\mu + \varepsilon$$

$$\text{但し} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\lambda} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m\lambda} \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_\lambda \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{bmatrix}$$

$$m > \lambda > 2, \quad \text{rank } A = \lambda, \quad \varepsilon : N(0, I_m \sigma^2)$$

A の列ベクトルで張られる R^λ の部分空間を $L(A)$ で示す。 R^λ より $L(A)$ への射影作用素を e とする。

$$e = A(A'A)^{-1}A', \quad \text{rank } e = \lambda$$

μ の最小2乗推定を $\hat{\mu}(X)$ とすると、それは X より $L(A)$ への射影の足で

えられ

$$(2) \quad \hat{\mu}(x) = (A'A)^{-1} A'X$$

$$\hat{\mu} : N(\mu, \Sigma \sigma^2), \quad \Sigma = (A'A)^{-1}$$

である。

$$(3) \quad S(x) = X'(I_n - e)X$$

とあると、 S と $\hat{\mu}$ は独立で S/σ^2 は自由度 $n-1$ のカイ2乗分布に従う。

$$E(S) = (n-1)\sigma^2, \quad E(S^2) = (n-1)(n-1+2)\sigma^4$$

$\theta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = R^d \oplus R^+$ が母数 及び 母数空間で

$(\hat{\mu}, S)$ は 最小十分統計量 である。

$a \in R^+, b \in R^d$ に対し

$$g_{ab} : X \rightarrow aX + Ab$$

なる変換を定義すると

$$G = \{g_{ab}, a \in R^+, b \in R^d\}$$

は $g_{a,b} \cdot g_{a',b'} = g_{aa', ab'+b}$

なる乗法に従う R^n 上の変換群である。又

$$\dot{G} = \{\dot{g}_{a,b}\}, \quad \dot{g}_{a,b} : (\mu, \sigma^2) \rightarrow (a\mu+b, a^2\sigma^2)$$

$$\bar{G} = \{\bar{g}_{a,b}\}, \quad \bar{g}_{a,b} : \psi \rightarrow a\psi+b \quad \begin{array}{l} \text{但し } \mu \text{ の 推定問題を考える} \\ \text{とき } \psi \in R^d \end{array}$$

$$\phi \rightarrow a^2\phi \quad \begin{array}{l} \text{但し } \sigma^2 \text{ の 推定を考える} \\ \text{とき } \phi \in R^+ \end{array}$$

とすると

$$\hat{\mu}(g_{ab}X) = a\hat{\mu}(X) + b = \bar{g}_{ab}\hat{\mu}, \quad S(g_{ab}X) = a^2S(X)$$

が成り立つ。この式より最小2乗推定量 $\hat{\mu}(x)$ は G -不変である。

μ の推定値を γ とするとき損失関数 L を

$$(4) \quad L[(\mu, \sigma^2), \gamma] = \frac{1}{\sigma^2} (\gamma - \mu)' \Sigma^{-1} (\gamma - \mu)$$

とすると, L は G -不変である。

最小2乗解 $\hat{\mu}$ のリスクは (2) を用いて

$$\begin{aligned} \rho[(\mu, \sigma^2), \hat{\mu}] &= \frac{1}{\sigma^2} E[(\hat{\mu}(x) - \mu)' \Sigma^{-1} (\hat{\mu}(x) - \mu)] = \frac{1}{\sigma^2} E \varepsilon' e \varepsilon \\ &= 1 \quad \text{for all } (\mu, \sigma^2) \in R^s \oplus R^+ \end{aligned}$$

$\hat{\mu}(x)$ は ミニマックス G -不変推定量である。

$(\hat{\mu}, S)$ は最小十分統計量であるから、以下では μ の推定量として $\hat{\mu}$ と S の関数であるもののみを考える。(5) 及び (5') で与えられる μ の推定量を作り、それが $s > 2$ のときには $\hat{\mu}$ の改良になっていることを示す。

$$(5) \quad \varphi(\hat{\mu}, S) = \left(1 - \frac{aS}{\hat{\mu}' \Sigma^{-1} \hat{\mu}}\right) \hat{\mu}$$

と置く。 φ を μ の推定値としたときのリスクを最小ならしめる様に a を定め、且つそのときのリスクを計算しよう。

$$\begin{aligned} \rho &= \rho[(\mu, \sigma^2), \varphi] = \frac{1}{\sigma^2} E[\varphi(\hat{\mu}, S) - \mu]' \Sigma^{-1} [\varphi(\hat{\mu}, S) - \mu] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} E\left[(\hat{\mu} - \mu)' \Sigma^{-1} (\hat{\mu} - \mu) - 2aS \frac{\hat{\mu}' \Sigma^{-1} (\hat{\mu} - \mu)}{\hat{\mu}' \Sigma^{-1} \hat{\mu}} + a^2 S^2 \frac{1}{\hat{\mu}' \Sigma^{-1} \hat{\mu}}\right] \\ &= 1 - 2a(n-s) E \frac{\hat{\mu}' \Sigma^{-1} (\hat{\mu} - \mu)}{\hat{\mu}' \Sigma^{-1} \hat{\mu}} + a^2(n-s)(n-s+2) E \frac{\sigma^2}{\hat{\mu}' \Sigma^{-1} \hat{\mu}} \end{aligned}$$

$\Sigma = BB'$ 但し B は $s \times s$ 正角形行列 $b_{ij} = 0, i < j$ i 対角線は正のもの, B を用いて,

$$Y = B^{-1} \hat{\mu}$$

変換を行なうと

$$Y : N(\bar{\mu}, I_d \sigma^2) \quad \text{但し} \quad \bar{\mu} = B^{-1} \mu$$

この Y を用いて ρ を計算する。

$$\rho = d - 2a(n-d) E \frac{Y'(Y-\bar{\mu})}{Y'Y} + a^2(n-d)(n-d+2) E \frac{\sigma^2}{Y'Y}$$

ここで Stein [2] p364 と同様の計算により, K を平均 $\frac{1}{2\sigma^2} \bar{\mu}' \bar{\mu}$

$$= \frac{1}{2\sigma^2} \mu' \Sigma^{-1} \mu \quad \text{なすポアソン変数として}$$

$$\rho = d - 2a(n-d) E \frac{d-2}{d-2+2K} + a^2(n-d)(n-d+2) E \frac{1}{d-2+2K}$$

このリスクは

$$a = \frac{d-2}{n-d+2}$$

のとき最小となり, この値は

$$\rho = d - \frac{(n-d)(d-2)^2}{n-d+2} E \frac{1}{d-2+2K} < d = \rho[(\mu, \sigma^2), \hat{\mu}]$$

よって 最小2乗解は許容的でない。 ($d > 2$ のとき)。

上と同様の議論により

$$(5') \quad \varphi_k(\hat{\mu}, s) = \left(1 - \frac{a s}{(\hat{\mu} - k)' \Sigma^{-1} (\hat{\mu} - k)} \right) (\hat{\mu} - k) + k$$

$$\text{但し } k \in R^d, \quad a = \frac{d-2}{n-d+2}$$

この φ_k はすいて $\hat{\mu}$ の改良になっている。

$\hat{\mu}$ と φ_k とはミンナックス推定量である。

§3 Elliptically symmetric estimator

$$\Pi = \{g : g = BQ\bar{B}', \Sigma = BB', Q \in O_p (\text{real 直交行列})\}$$

μ の推定量 $\psi(\hat{\mu}, S)$ が $g \circ \psi \circ g' = \psi$ をみたすとき Elliptically symmetric estimator といふ。但し $g \circ \psi \circ g' = \psi$ は

$$\forall b \in R^p \quad g[\psi(g' b, S)] = \psi(b, S) \quad \text{の意味。}$$

§2 の $\varphi(\hat{\mu}, S)$ が この性質を持っていることは、次の様にしてわかる。

$$\begin{aligned} g[\varphi(g' \hat{\mu}, S)] &= BQ\bar{B}' \left(1 - \frac{aS}{\hat{\mu}' \bar{B}' Q' B' \Sigma^{-1} BQ\bar{B}' \hat{\mu}} \right) BQ' \bar{B}' \hat{\mu} \\ &= \left(1 - \frac{aS}{\hat{\mu}' \Sigma^{-1} \hat{\mu}} \right) \hat{\mu} = \varphi(\hat{\mu}, S) \end{aligned}$$

一般に

$$\psi(\hat{\mu}, S) = H(\hat{\mu}' \Sigma^{-1} \hat{\mu}, S) \hat{\mu} \quad \text{但し } H \text{ は実数値関数}$$

なる形の ψ は Elliptically symmetric である

逆にすべての $g \in \Pi$ につき $g \circ \psi \circ g' = \psi$ をみたす ψ はどのような関数であるか といふことを考えて見る。

$\Pi = \{g\}$ は $\hat{\mu}' \Sigma^{-1} \hat{\mu} = \text{constant}$ 上の点とその上の点に平す変換全体である。原点と $\hat{\mu}$ を結ぶ直線を $L(\hat{\mu})$ とするとき Π の中に $L(\hat{\mu})$ のみを不動にする g がある。その g については

$$g[\psi(g' \hat{\mu}, S)] = \psi(\hat{\mu}, S) \quad \text{は} \quad g[\psi(\hat{\mu}, S)] = \psi(\hat{\mu}, S) \quad \text{となる。故に } \psi(\hat{\mu}, S) \text{ は } L(\hat{\mu}) \text{ 上の点である。}$$

$$\therefore \exists H = H(\hat{\mu}, S) \text{ real valued function, } \psi(\hat{\mu}, S) = H(\hat{\mu}, S) \hat{\mu}$$

$$\psi(\hat{\mu}, S) = g H(g' \hat{\mu}, S) g' \hat{\mu} = H(g' \hat{\mu}, S) \hat{\mu} = H(\hat{\mu}, S) \hat{\mu}$$

$$\therefore H(\bar{g}^{-1}\hat{\mu}, s) = H(\hat{\mu}, s) \quad \forall g \in \Pi$$

故に H は $\hat{\mu}' \Sigma^{-1} \hat{\mu}$ と s の関数である。則ち

$$(6) \quad \psi(\hat{\mu}, s) = H(\hat{\mu}' \Sigma^{-1} \hat{\mu}, s) \hat{\mu}$$

このとき次の事が成立する

$\Psi = \{\psi : \psi = H(\hat{\mu}' \Sigma^{-1} \hat{\mu}, s) \hat{\mu}\}$ の中で許容的な推定量は推定量全体 Δ の中で許容的である。 証明。 ψ を Ψ の中では許容的であるが Δ の中で許容的でないとし $\phi \in \Delta$ を ψ の改良であるとする。 則ち

$$P[(\mu, \sigma^2), \phi] \leq P[(\mu, \sigma^2), \psi]$$

$$\left[\forall (\mu, \sigma^2) \in R^d \oplus R^+ \right]$$

$$\exists (\mu_0, \sigma_0^2) \quad P[(\mu_0, \sigma_0^2), \phi] < P[(\mu_0, \sigma_0^2), \psi]$$

P は (μ, σ^2) につき連続であるから Ω なる open set において下の行の不等式が成立する。

Ω_0 はコンパクトであるから Ω_0 上の invariant measure の total measure を 1 に出来る。 その measure より 等分れた Π 上の measure を λ とする。

$$\phi_1(\hat{\mu}, s) = \int_{\Pi} g \phi(\bar{g}^{-1} \hat{\mu}, s) d\lambda(g)$$

により ϕ_1 を定義すると $\phi_1 \in \Psi$ である

$$\therefore g_1 \circ \phi_1 \circ g_1^{-1} = g_1 \int_{\Pi} g \phi(\bar{g}^{-1} g_1^{-1} \hat{\mu}, s) d\lambda(g) = \phi,$$

又 $\forall \phi \in \Delta$ につき

$$(7) \quad P[(\mu, \sigma^2), g \circ \phi \circ g^{-1}] = P[(\bar{g}^{-1} \mu, \sigma^2), \phi]$$

が成立する

$$\therefore P[(\mu, \sigma^2), g \circ \phi \circ g^{-1}] = E \left\{ g \phi(g^{-1} \hat{\mu}, s) - \mu \right\}' \Sigma^{-1} \left\{ g \phi(g^{-1} \hat{\mu}, s) - \mu \right\} / \sigma^2$$

$$= E \left\{ \phi(g^{-1} \hat{\mu}, s) - g^{-1} \mu \right\}' g' \Sigma^{-1} g \left\{ \phi(g^{-1} \hat{\mu}, s) - g^{-1} \mu \right\} / \sigma^2$$

$$= \because \tau' g' \Sigma^{-1} g = B^{-1} O' B' B^{-1} B^{-1} B Q B^{-1} = \Sigma^{-1} \quad \tau' \text{ であるから}$$

$$= P[(g^{-1} \mu, \sigma^2), \phi]$$

$$(8) \quad (g^{-1} \mu, \sigma^2) \in \Omega \rightarrow P[(\mu, \sigma^2), g \circ \phi \circ g^{-1}] < P[(g^{-1} \mu, \sigma^2), \psi]$$

凸関数 W により τ は $WE(x) \leq EW(x)$ であるから

$$(\phi_1(\hat{\mu}, s) - \mu)' \Sigma^{-1} (\phi_1(\hat{\mu}, s) - \mu)$$

$$\leq \int_{\Pi} \{g \phi(g^{-1} \hat{\mu}, s) - \mu\}' \Sigma^{-1} \{g \phi(g^{-1} \hat{\mu}, s) - \mu\} d\lambda(g)$$

両辺に $\hat{\mu}, s$ の同時分布の密度関数を掛け平均すると (積分順序の交換可能)

$$P[(\mu, \sigma^2), \phi_1] \leq \int_{\Pi} P[(\mu, \sigma^2), g \circ \phi \circ g^{-1}] d\lambda(g)$$

(7) より

$$= \int_{\Pi} P[(g^{-1} \mu, \sigma^2), \phi] d\lambda(g)$$

(8) より

$$< \int_{\Pi} P[(g^{-1} \mu, \sigma^2), \psi] d\lambda(g) = \int P[(\mu, \sigma^2), g \circ \psi \circ g^{-1}] d\lambda(g)$$

$$= \int P[(\mu, \sigma^2), \psi] d\lambda(g) = P[(\mu, \sigma^2), \psi]$$

故に ψ ではなく ϕ_1 である $\Rightarrow$ Elliptically symmetric $\Rightarrow \psi$ は χ^2 分布

許容であるから $\therefore$ これは矛盾である。

$$(6) \quad \psi = H((\hat{\mu} - k)' \Sigma^{-1} (\hat{\mu} - k)) (\hat{\mu} - k) + k \quad k \in R^2$$

なる推定量全体を Π_k とおき *Elliptically symmetric about*
 k と云ふことにすると上と同様の結果が導かれる。

§4. Bayes estimator

母数空間上の事前分布として $\sigma^2 = \text{const}$ 上の分布 $N(0, BDB'\sigma^2)$

をとる。但し $D = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & d_s \end{bmatrix}$ $d_i > 0$ 且 B は $\Sigma = BB'$

$$M = (I_s + D^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+d_1^{-1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{1+d_s^{-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_s \end{bmatrix}, 0 < m_i < 1$$

とおき μ の推定量として μ の Bayes 解を求めよ

$$(9) \quad \varphi_{\mu}(\hat{\mu}, s) = B M B' \hat{\mu}$$

又事前分布として $N(0, BQDQ'B'\sigma^2)$ をとると Bayes 解は

$$(9') \quad \varphi_{\mu, Q}(\hat{\mu}, s) = BQMQ'B'\hat{\mu} \quad \text{但し } Q \in O_s$$

又事前分布として $N(k, BQDQ'B'\sigma^2)$ をとると Bayes 解は

$$(9'') \quad \varphi = BQMQ'B'(\hat{\mu} - k) + k$$

逆に適当な $0 < m_i < 1 \quad i=1, \dots, s$ をとって (9'') を作ると

これは適当な事前分布に対する unique Bayes 解であるから
 許容的である。

(9) に対する ベイズ リスク を求めて見ると

$$\rho = \sum_{i=1}^d m_i^2 + \frac{1}{\sigma^2} \mu' B^{-1} \begin{bmatrix} (1-m_1)^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (1-m_d)^2 \end{bmatrix} B^{-1} \mu$$

事前分布で $d_i = 0$ のとき (singular 分布) を考えよと

$$0 \leq m_i < 1$$

$d_i \rightarrow \infty$ のときを考えよと $m_i \rightarrow 1$ になるが このときは $m_i = 1$ になる i が 2 個以上であれば §2 の結果より 許容がない。
 ことからかかっていて 結局

$0 \leq m_i \leq 1 \quad i=1, \dots, d$ かつ 但し $m_i = 1$ になる i は 2 個以下 であるとき (9') は 許容的 になる。

§5 多変量正規分布の平均ベクトルの推定

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} : N(\xi, \Sigma) \quad E(X) = \xi, \quad E(X - \xi)(X - \xi)' = \Sigma$$

$p > 2$

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & \dots & s_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{p1} & \dots & s_{pp} \end{bmatrix} : W(n, \Sigma) \quad \text{ウィシャート分布}$$

$s_{ij} = s_{ji} \quad E(S) = n \Sigma$

X と S は独立とし X と S を得て ξ の推定する。

$$\text{損失関数 } L[(\xi, \Sigma), \hat{\xi}] = (\hat{\xi} - \xi)' \Sigma^{-1} (\hat{\xi} - \xi)$$

ξ の推定量として X と S の ξ と Σ の関数としての リスク は

$$P[(\xi, \Sigma), X] = P$$

ξ の推定量として

$$(10) \quad \varphi(X, S) = \left(1 - \frac{C}{X' S^{-1} X}\right) X$$

ξ としたときのリスクは

$$(11) \quad C = \frac{p-2}{n-p+3} \quad \text{のとき最小になり そのとき}$$

$$P[(\xi, \Sigma), \varphi] = p - \frac{n-p+1}{n-p+3} (p-2)^2 E \frac{1}{p-2+2K}$$

K は ポアソン変数で平均 $\frac{1}{2} \xi' \Sigma^{-1} \xi$ であるもの.

(10) に対するリスクを計算する為には

$$\Sigma = BB' : B \text{ は } n \times p \text{ 階角形行列 } b_{ij} = 0, j > i, \quad b_{ii} > 0$$

$$Y = B^{-1}X : N(\bar{\xi}, I_p) \quad \bar{\xi} = B^{-1}\xi$$

$$\bar{S} = B^{-1} S B^{-1} : W(n, I_p)$$

と仮定して

$$P[(\xi, \Sigma), \varphi] = E_{\xi, \Sigma} \{ \varphi(X, S) - \xi \}' \Sigma^{-1} \{ \varphi(X, S) - \xi \}$$

$$= E_{\xi, \Sigma} \left\{ \left(1 - \frac{C}{X' S^{-1} X}\right) X - \xi \right\}' \Sigma^{-1} \left\{ \left(1 - \frac{C}{X' S^{-1} X}\right) X - \xi \right\}$$

$$= E_{\bar{\xi}, I_p} \left\{ \left(1 - \frac{C}{Y' \bar{S}^{-1} Y}\right) Y - \bar{\xi} \right\}' \left\{ \left(1 - \frac{C}{Y' \bar{S}^{-1} Y}\right) Y - \bar{\xi} \right\}$$

$$Q \in O_p \quad \text{と } \frac{1}{\sqrt{\bar{\xi}' \bar{\xi}}} \bar{\xi}' \quad \text{であるものとする}$$

$$Z = QY \quad \text{とすると} \quad E(Z) = [\sqrt{\bar{\xi}' \bar{\xi}}, 0, \dots, 0]' = \xi^* \quad \text{と書く}$$

$$\bar{\bar{S}} = Q' \bar{S} Q \quad \text{と書く}$$

$$Z : N(\xi^*, I_p), \quad \bar{\bar{S}} : W(n, I_p)$$

$$P = E_{\xi^*} I_p \left\{ \left(1 - \frac{C}{Z' \bar{S}^{-1} Z} \right) Z - \xi^* \right\}' \left\{ \left(1 - \frac{C}{Z' \bar{S}^{-1} Z} \right) Z - \xi^* \right\}$$

$\frac{1}{\sqrt{Z'Z}} Z'$ は 1 行 1 列 O_p の element を R とする

$$V = RZ \quad \text{と} \quad V = [\sqrt{Z'Z}, 0, \dots, 0]'$$

$$\bar{S} = R \bar{S} R' : W(n, I_p) \quad \bar{S} \text{ の Bartlett decomposition}$$

と $\bar{S} = C C'$ とする。

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} c_{11} & & c_{1p} \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ c_{1p} & & c_{pp} \end{bmatrix}$$

$c_{11} : \text{d.f.} = n-p+1 \text{ のカイ分布}$
 $\vdots$
 $c_{pp} : \text{d.f.} = m \text{ のカイ分布}$
 $c_{ij} : N(0, \dots)$

$$Z' \bar{S}^{-1} Z = V' R' \bar{S}^{-1} R V = V' \bar{S}^{-1} V$$

$$= [\sqrt{Z'Z}, 0, \dots, 0] \begin{bmatrix} c_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{pp}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{pp}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{Z'Z} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{Z'Z}{c_{11}^2} = \frac{Z'Z}{S^*}$$

$S^* = c_{11}^2$ は d.f. = $n-p+1$ のカイ2乗分布であり Z と indep.

$$P = E_{\xi^*}^Z E_{n-p+1}^{Z^2} \left\{ \left(1 - \frac{C S^*}{Z'Z} \right) Z - \xi^* \right\}' \left\{ \left(1 - \frac{C S^*}{Z'Z} \right) Z - \xi^* \right\}$$

これは §2 の (5) で $S = S^*$, $\hat{\mu} = Z$, $\Sigma = I_p$ としたリスト7
を計算するとこの通り (11) の結果となる。

(11) より $p > 2$ のとき ξ の推定量として X は許容的ではない

(X は 不変推定量)
 $\xi = \text{ベクトル}$

§ 6. 多変量正規分布の共分散行列の推定

$X_i: i=1, 2, \dots, n > p$ を $N(0, \Sigma)$ よりの n 個の独立標本とし、それより Σ を推定する. (X_i は p 次元 Σ は $p \times p$ 正定)

$$(12) \quad S = \sum_{i=1}^n X_i X_i' : W(n, \Sigma)$$

は十分統計量であるから Σ の推定量としては S の関数のみを考える.

Σ の推定量を $\hat{\Sigma}$ とするときどのような損失関数が適当であるかとい

うことについては議論もあるかと思われるが、ここでは

$$(13) \quad L(\Sigma, \hat{\Sigma}) = \text{tr} \Sigma^{-1} \hat{\Sigma} - \log \det \Sigma^{-1} \hat{\Sigma} - p$$

を採用する.

$$G = \{g : g \text{ は } p \times p \text{ nonsingular 行列}\}$$

とし

$$g : \begin{aligned} X &\rightarrow gX \\ S &\rightarrow gSg' \end{aligned}$$

なる変換も考え、問題の G -不変であり、 Σ の推定量 $\varphi(S)$ が

G -不変であるとし

$$(14) \quad \varphi(gSg') = g\varphi(S)g'$$

をみたすことであり S の常数倍であるときの普通の推定量は不変

な推定量である. 以下で普通の推定量は Σ = マックスではなれないこ

を示す.

$$A = \{a : a \text{ は } p \times p \text{ 三角行列 } a_{ij} = 0 \text{ for } j > i\}$$

A -invariant なものの中で Σ = マックス 存在のをおいて見る

$$(14) \quad \text{if } S = I \text{ とおき}$$

$$\varphi(aa') = a \varphi(I) a' \quad a \in A$$

ここに a は A の元で、対角形で対角要素が ± 1 のものを選ぶと

$$\varphi(I) = a \varphi(I) a'$$

$\varphi(I)$ は $p \times p$ 行列であるが、1ヶ所づつ対角要素以外のものは 0 である。
要素が a であることは成り立たないから

$$\varphi(I) = D = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_p \end{bmatrix}$$

$$S = K K' \quad (K \text{ は } p \times p \text{ 行列で対角線は正})$$

と分けて

$$(15) \quad \varphi(S) = \varphi(K K') = K \varphi(I) K' = K D K'$$

この φ に対するリスクを計算しそれが最小になるように D を決める。

5.

$$\rho(\Sigma, \varphi) = E[\text{tr} \Sigma^{-1} \varphi(S) - \log \det \Sigma^{-1} \varphi(S) - p]$$

$$= E[\text{tr} \varphi(B^{-1} S B'^{-1}) - \log \det \varphi(B^{-1} S B'^{-1}) - p]$$

但し $\Sigma = B B'$ B は $p \times p$ 行列

$$B^{-1} S B'^{-1} : W(n, I_p)$$

$B^{-1} S B'^{-1}$ を決めて S を決める

$$\rho = \rho(I, \varphi) = E[\text{tr} \varphi(S) - \log \det \varphi(S) - p]$$

$$= E[\text{tr} K D K' - \log \det K D K' - p]$$

$$= E[\text{tr} K D K' - \log \det \Delta - E \log \det S - p]$$

$$E \operatorname{tr} K D K' = \sum_{i=1}^p d_i E K_{ii}^2 = \sum d_i E \chi_{m-i+1+p-i}^2 \\ = \sum d_i (m+p-2i+1)$$

$$\therefore S : W(m, I_p) \quad \text{で} \quad S = K K' \quad \text{であるから}$$

K は S の Bartlett の decomposition に なっている。

$$E \log \det S = \sum_{i=1}^p E \log \chi_{m-i+1}^2$$

$$P = \sum_{i=1}^p [(m+p-2i+1) d_i - \log d_i] - \sum_{i=1}^p E \log \chi_{m-i+1}^2 - P$$

これは

$$(16) \quad d_i = \frac{1}{m+p-2i+1}$$

と置き換えて 最小にする ための値は

$$(17) \quad P(\Sigma, \varphi^*) = \sum_{i=1}^p \left[1 - \log \frac{1}{m+p-2i+1} - E \log \chi_{m-i+1}^2 \right] - P$$

$$= \sum_{i=1}^p \left[\log(m+p-2i+1) - E \log \chi_{m-i+1}^2 \right] \quad (m > p)$$

となる。

(15), (16) で 与えられた $\varphi(S)$ が $\Xi = \text{マックス推定量}$ である。

それが A なる変換群に属していることは即ち $(1, 2, \dots, p)$ の

適当な permutation を作りその order に従って作った Ξ 角行列

全体を A_Ξ とせば リスクの値 (17) は同じであるから推定量

としては異なる $\varphi(S)$ を与える。

§ 2, 3 で $A = I_m$ とおくと Stein [1] の § 2, § 3 及び Stein [2] の § 2 の一部

§ 5, 6 は Stein [2] の § 2, § 5 と全く同じ。

§ 4 で $A = I_m$ とおくと Cohen Ann. Math Stat. 1966

