

Braid 群の Burau 表現の特殊化の "全射性" について

京大数理解 織田 孝幸 (Takayuki Oda)

§ 0. はじめに.

B_n を n -strings の Artin Braid 群とする. t を変数とする $\mathbb{Z}$ 係数の Laurent 多項式の環 $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ の元を成分とする次数 $n-1$ の一般線型群 $GL_{n-1}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ により B_n を表現する Burau 表現と呼ばれるものがある (cf. Birman [1], Chap. 3).

k を自然数として, $q = \exp(2\pi i/k)$ とおく. q は 1 の k 乗根である. 特殊化 $t \mapsto q$ によって, $B_n \rightarrow GL_{n-1}(\mathbb{Z}[q])$ という表現が得られる. $\mathbb{Z}[q]$ の ideal $\mathcal{O}$ をえらび, reduction modulo $\mathcal{O}$ を考えて, さらに表現 $B_n \rightarrow GL_{n-1}(\mathbb{Z}[q]/\mathcal{O})$ を得る.

$n, k, \mathcal{O}$ がある条件を満たすとき, この表現の像は有限環 $\mathbb{Z}[q]/\mathcal{O}$ 上のある unitary 群になると予想される. これを $n=3, n=4$ の場合に証明し, この種の予想を正当化するのが, この小論の目標である. ここでは論じないが, これはあるタイプの代数曲線の level 構造付きの moduli 空間の既約性を意味してい, 幾何学的解釈がある.

§1. The reduced Burau representation

B_n を n -葉の Artin 組み組群とし, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ をその標準的な生成元とする。 $\{\sigma_i\}_{1 \leq i \leq n-1}$ たちには, 周知の基本関係式

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-2)$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad (|i-j| \geq 2)$$

がある。

記号 $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ によって, 整数環 $\mathbb{Z}$ 上の t を変数とする多項式環 $\mathbb{Z}[t]$ の t^{-1} による局所化を表す。このとき B_n から $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ 上の一般線型群 $GL_{n-1}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ へ, 被約な Burau 表現と呼ばれる表現 π を定義できる。これは通例 Fox の free differential calculus によって定義されるが (cf. Birman [1], ch. 3), ここでは手短かにかたづけるために, 直接に生成元ごとに次のように定義する。

定義 1.1 表現 $\pi: B_n \rightarrow GL_{n-1}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ は

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\mapsto \begin{bmatrix} -t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \\ & & 1_{n-3} \end{bmatrix} & \sigma_r &\mapsto \begin{bmatrix} 1_{r-2} & & & \\ & 1 & 0 & 0 \\ & t & -t & 1 \\ & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 1_{n-r-2} \end{bmatrix} \\ \sigma_{n-1} &\mapsto \begin{bmatrix} 1_{n-3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ & t & -t \end{bmatrix} & & (\text{但し, } 2 \leq r \leq n-2) \end{aligned}$$

によって定める。ここで 1_s は s 次の単位行列である。明示されていない行列成分は全て 0。

環 $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ の各元 $P(t)$ に対して, $P(t)$ の共役元 $\bar{P}(t)$ を

$$\bar{P}(t) = P(t^{-1})$$

によって定める。 $P \mapsto \bar{P}$ は $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ に位数2の自己同型を定める。このとき $\bar{P}$ を P の t -共役という。 $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ に成分をもつ次数 m の行列 $h \in M_m(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ に対し, h の t -Hermitate 共役 h^* を

$$h^* = {}^t \bar{h}$$

によって定める。 $h = h^*$ のとき h を t -Hermitian であるという。さて Burau 表現は次の "ユニタリ性" をもつ。

補題 (1.1) $M_{n-1}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ の中に t -Hermitate 行列 h であって, Burau 表現 $\pi: B_n \rightarrow GL_{n-1}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ の像で不変なもの h scalar 倍を除いて一意的に存在する。

(証明) 易しいので省略する。直接計算で確かめられる。

$\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ の高体 $\mathbb{Q}(t)$ の中で書くと, h は scalar 倍を除いて 3-対角行列

$$h = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{t+1} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{t^{-1}+1} & 1 & -\frac{1}{t+1} & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{t^{-1}+1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

で与えられる。

注意. 補題 (1.1) のユニタリ性は, Ihara [2] と Tsuchiya-Kanie [3] の共形場の理論のユニタリ性とも関連がある。位相幾何学的

にも自然な説明があるべきであるが、知らない。代数幾何学的説明は別の機会に書く。

補題 (1.2) Burau 表現 π は既約である。

(証明) $\pi(\sigma_i)$ が全て quasi-reflection, つまり $\pi(\sigma_i) - \text{id}$ が rank 1 の行列であることより, すぐに示せる。

群 B_n の中心 $Z(B_n)$ は $z = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^n$ で生成される無限巡回群である。これは周知の事実である。

補題 (1.3) $Z(B_n)$ は π によって scalar 行列で表現され, z の像は $\epsilon^{n(n-1)} \cdot 1_{n-1}$ である。

§2. 第一段階の特殊化, および Burau 表現の twist.

k を自然数とする。 $\zeta = e^{2\pi i/k}$ とおく。 ζ は 1 の原始 k 乗根である。 $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ は円分体で, $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta]$ はその全整数環 $F = \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$ は極大な実部分体である。特殊化 $\zeta \mapsto \zeta$ によって, 新しく表現 $\pi_k: B_n \longrightarrow GL_{n-1}(\mathcal{O}_K)$ を得る。 k を $\zeta \mapsto \zeta$ によって特殊化したものも同じ記号で書くと π_k の像はエルミート行列 k に際する $n-1$ 次のユタリ-群 $U_{n-1}(k)$ に入る。表現 π_k もまた既約である。

B_n の標準生成元 σ_i に対し, n 次対称群 S_n の互換 $(i, i+1)$ と対応させることにより全射準同型 $B_n \rightarrow S_n$ を得る。これの核を純組み紐群 (pure braid group), あるいは色つき組み紐群 (coloured braid group) といひ, 記号 P_n で表す。 P_n の標準的生成元としては,

$$A_{ij} = \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \cdots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1}^{-1} \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

がある。

注意。 $\{A_{ij}\}$ の間の基本関係式を書いた標準的教科書 (複数) には何故かそろってミスプリントが多い。注意して取り扱うべし。

さて上の表現 $B_n \rightarrow S_n$ と対称群 S_n の符号表現 $\text{sgn}: S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ の合成を $\text{sgn}: B_n \rightarrow \{\pm 1\}$ と書く。 sgn の核は B_n の中の指数 2 の正規部分群である。これを B_n^{even} と書く。

<Twist of π_k >

以下あとの話しを述べやすくするため, π_k を指標でひねった表現 ρ_k を定義する。 k は $(n-1)$ と互いに素とする。このとき各生成元 σ_i に対して $\chi_k(\sigma_i) = -\zeta^l$ とおいて, 指標 $\chi_k: B_n \rightarrow GL_1(\mathcal{O}_k) = \mathcal{O}_k^*$ を定める。ここで l は $l \cdot (n-1) \equiv 1 \pmod{k}$ となる整数。各 σ_i に対して, $\det \pi_k(\sigma_i) = -\zeta$ となることに注意して次のようにする。

定義 2.1 新しく表現 $\rho_k: B_n \rightarrow GL_{n-1}(\mathcal{O}_K)$ を

$$\rho_k = \chi_k^{-1} \otimes \pi_k$$

で定める。このとき σ_i に対し, $\det \rho_k(\sigma_i) = (-1)^n$ となる。

さて ρ_k の像 $\rho_k(B_n)$ は

$$SU_{n-1}^{\pm}(\mathcal{O}_K; h) = \{g \in GL_{n-1}(\mathcal{O}_K) \mid {}^t \bar{g} h g = h, \det(g) = \pm 1\}$$

に含まれる。特に n が偶数であるときは $\rho_k(B_n)$ 又, n が奇数

のときは $\rho_k(B_n^{\text{even}})$ 又

$$SU_{n-1}(\mathcal{O}_K; h) = \{g \in GL_{n-1}(\mathcal{O}_K) \mid {}^t \bar{g} h g = h, \det(g) = 1\}$$

に含まれる。特に $\rho_k(P_n)$ は $SU_{n-1}(\mathcal{O}_K; h)$ に含まれる。さ

らに, ρ_k は B_n の中心 $Z(B_n)$ 上で trivial になっているこ
とに注意しておく。

次の節にゆく前に, 基本的事実をひとつ確認しておく。

補題 (2.1) 特殊化された Burau 表現 $\pi_k: B_n \rightarrow GL_{n-1}(\mathcal{O}_K)$

の像が有限群とする。すると scalars を核として, P_n の標準
生成元の像 $\pi_k(A_{ij})$ たちの位数はせいぜい 5 である。

系 k が奇数で $k \geq 7$ のとき, あるいは k が偶数でも $k \geq 14$
ならば, π_k の像は無限群である。

§3. 予想と主結果.

$F = \mathbb{Q}(q+q^{-1})$, $\mathcal{O}_F$ を F の全整数環, $\sigma \in \mathcal{O}_F$ の ideal とする。表現 ρ_k を reduction mod σ して $\bar{\rho}$ に特殊化する。

定義 3.1 $\sigma_k = \sigma \cdot \mathcal{O}_k$ とする。 $GL_{n+1}(\mathcal{O}_k)$ の $\bar{\rho}$ を modulo σ_k で考えて, $GL_{n+1}(\mathcal{O}_k) \rightarrow GL_{n+1}(\mathcal{O}_k/\sigma_k)$ を考える。 $\bar{\rho}$ も mod σ_k で考えて, $SU_{n+1}(\mathcal{O}_k; h) \rightarrow SU_{n+1}(\mathcal{O}_k/\sigma_k; h)$ という標準準同型を考える。これと ρ_k との合成を $\rho_{k, \sigma}$ と書く。
 P_n に制限すると

$$P_n \rightarrow SU_{n+1}(\mathcal{O}_k; h) \rightarrow SU_{n+1}(\mathcal{O}_k/\sigma_k; h)$$

という表現が得られる。

予想. π_k は無限の像をもつと仮定する。 $\mathcal{O}_F$ の ideal σ が k と coprime であるとき,

$$\rho_{k, \sigma} = P_n \rightarrow SU_{n+1}(\mathcal{O}_k/\sigma_k; h)$$

は全射である。

次が得られている。

定理 (3.1) (i) $n=3$ のとき, 予想は正しい。

(ii) $n=4$ のとき, k が 6 と互いに素であって, $k=5$ あるいは, $k \geq 11$ のとき 予想は正しい。($k=7$ はわからない)。

定理には次のような応用がある。まず $\rho_{k,\alpha}$ という表現は center $Z(P_n) = Z(B_n)$ 上 trivial であることに注意する。すると $\rho_{k,\alpha}$ は $P_n/Z(P_n)$ の表現を引き起す。この商は次のようになる。

命題 (3.2) $n \geq 3$ とする。 $P^1(\mathbb{C})$ (1次元複素射影空間) の $n+2$ 個の点 $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ を固定する。 $P^1(\mathbb{C})$ の向き付けを保つ微分同相で $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ をそれぞれ自分自身に移すもの全体のなす群 (積は写像の合成) を $\text{Diff}^+(P^1(\mathbb{C}), \{x_0, \dots, x_{n+1}\})$ とする。これに compact-open topology を入れる。 π_0 を弧状連結成分をとる functor とする。 $n \geq 3$ とするとき

$$P_n/Z(P_n) \cong \pi_0 \text{Diff}^+(P^1(\mathbb{C}), \{x_0, \dots, x_{n+1}\}).$$

例 1. $n=3$ のとき, $P_3/Z(P_3) \cong \pi_1(P^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty, *\})$. $*$ は基点。

$n=4$ のとき, $P_4/Z(P_4) \cong \pi_1(P^2(\mathbb{C}) - \{\text{triangle}, *\})$.

定理によ, て, $n=4$ のとき例 1 は $P^2(\mathbb{C})$ の covering で, $\{\text{triangle}\}$ のみで分歧し, $SU_{n-1}(\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}_K; h)$ を Galois 群に持つ Galois covering が存在することがいえる。 $n=3$ のとき, $P_3/Z(P_3)$ は rank 2 の自由群と同型で, $B_3/Z(B_3) \cong \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ という同一視によ, て, level 2 の主合同部分群 $\Gamma(2)$ と同一視される。このとき $\rho_{k,\alpha}: \Gamma(2) \rightarrow SU_2(\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}_K; h)$ の kernel は有

限個の例外を除いて, 非合同部分群 である。

§4. 証明の概略.

主定理の証明は 3つの steps で行なう。

Step 1. σ が $\mathcal{O}_F$ の素ideal であるとき。

Step 2. σ が $\mathcal{O}_F$ の素ideal のべきであるとき。

Step 3. 一般の場合。

Step 2 と Step 3 は代数群の結果を用いた $n=3, 4$ に限らず一般に適用する議論で解決される。Step 1 が予想の完全解決のためには、もっとも重大な障害である。

Step 1 をあとまわしにして、Step 2, 3 を先に説明する。

Step 2 は次の Lemma で O.K.

補題 (4.1) $\sigma = \varphi^n$ ($n \geq 2$) とする。但し φ は $\mathcal{O}_F$ のある素ideal。 φ は $\det(h)$ を割り切らないと仮定する。このとき、 X を $SU_m(\mathcal{O}_K/\sigma_K; h)$ の部分群であって、自然な reduction mod φ による全射 $SU_m(\mathcal{O}_K/\sigma_K; h) \rightarrow SU_m(\mathcal{O}_K/\varphi\mathcal{O}_K; h)$ による、 σ 全体 $SU_m(\mathcal{O}_K/\varphi\mathcal{O}_K; h)$ を覆うものとするとき、 X は $SU_m(\mathcal{O}_K/\sigma_K; h)$ 自身と一致する。

(証明) Mattheus - Vaserstein - Weissfeiler [4] にある。

Step 3 はある種の近似定理である。 $\mathfrak{o}$ を素 ideal の積に分解し, $\mathfrak{o} = \prod_i \mathfrak{p}_i^{e_i}$ とする。Artin 環 $A = \mathcal{O}_F/\mathfrak{o}$ の Jacobson radical を $\mathfrak{r}$ と書く。

定理 (4.2) Γ を $SU_m(\mathcal{O}_K/\mathfrak{o}_K; h)$ の部分群で次の 2 条件を満たすものとする。

(i) 各 i に対し, reduction mod $\mathfrak{p}_i$ による Γ の $SU_m(\mathcal{O}_K/\mathfrak{o}_K; h)$ の中での像は全体 $SU_m(\mathcal{O}_K/\mathfrak{o}_K; h)$ と一致する。

(ii) $\gamma \in \Gamma$ の adjoint 表現による trace を mod $\mathfrak{r}^2$ で考える。これら $A/\mathfrak{r}^2$ の中で生成する部分環を考える。このとき

$$\mathbb{Z}[\text{trace}\{\text{Ad}(\gamma \bmod \mathfrak{r}^2)\} \mid \gamma \in \Gamma] = A/\mathfrak{r}^2$$

が成立すると仮定する。

この条件の下で, $\Gamma = SU_m(\mathcal{O}_K/\mathfrak{o}_K; h)$ 。

(証明) この結果は Weisfeiler [] の Theorem (7.2) である。

さて Step 1 を考えよう。 $\mathfrak{o} = \mathfrak{p}$ とする。 $\mathfrak{p}$ は素 ideal。このとき $\mathfrak{p} \cdot \mathcal{O}_K$ について 2 つの場合がある。 $\mathfrak{o}$ と $\mathfrak{p}$ とは互いに素であるので, $\mathfrak{o}$ は K/F では不分岐。

(i) $\mathfrak{p} \cdot \mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_K \cdot \overline{\mathfrak{p}_K}$, 完全分解する。

(ii) $\mathfrak{p} \cdot \mathcal{O}_K$ は inert する, つまり remain prime。

(i) の場合, $SU_m(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p} \mathcal{O}_K; h) \hookrightarrow GL_m(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p} \mathcal{O}_K) \times GL_m(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p} \mathcal{O}_K)$ で第一因子に射影することにより, $SU_m(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p} \mathcal{O}_K; h)$ は $SL_m(\mathcal{O}_F/\mathfrak{p})$ と同型になる。

(ii) の場合 $\mathcal{O}_F/\mathfrak{p} = \mathbb{F}_r$ とすると, $SU_m(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p} \mathcal{O}_K; h)$ は $\mathbb{F}_r$ 上の m 次有限 unitary 群 $SU_m(\mathbb{F}_r)$ と同型になる。

以下で証明のためにポイントとなる諸点をまとめる。

事実 (4.3) (a) 生成元 A_{ij} の像の位数について。

$$n=3 \text{ のとき, } \begin{cases} k \text{ が奇数のとき, } \text{ord} \{ \rho_{k, \alpha}(A_{ij}) \} = k. \\ k \text{ が偶数のとき, } \text{ord} \{ \rho_{k, \alpha}(A_{ij}) \} = k/2. \end{cases}$$

$n=4$ のとき, k が 6 と互いに素であるとき,

$$\text{ord} \{ \rho_{k, \alpha}(A_{ij}) \bmod \{\text{scalars}\} \} = k.$$

(b) 表現 $\rho_{k, \alpha}$ は既約である。

(c) 生成元の像の trace の性質。とりわけ $n=4$ のとき

trace は $g \mapsto g^{-1}$ という自己同型で 不変でない。

上の事実と, 次に示す $SL_2(\mathbb{F}_r) \cong SU_2(\mathbb{F}_r)$, あるいは $SL_3(\mathbb{F}_r)$, $SU_3(\mathbb{F}_r)$ の部分群の分類表を用いて, $\rho_{k, \alpha}$ の像は小さくなりえず, 全体と一致することを示す。

< $SL_2(\mathbb{F}_r) \cong SU_2(\mathbb{F}_r)$ の部分群 >

$r = p^f$ とする。 r' は r の約数を一般に表わす。 $SL_2(\mathbb{F}_r)$ の既約な部分群 G は次のいずれかになる。

(A) 標数 0 に持ち上がらないとき。このときは次の定理で G は P_2 される。

定理 (Dickson) G を $SL_2(\mathbb{F}_r)$ の既約部分群で標数 0 に持ち上がらないものとする。このときある $\mathbb{F}_{r'} \subset \mathbb{F}_r$ があって $G = SL_2(\mathbb{F}_{r'})$ 。

(B) 標数 0 に持ち上がる時。これは $SL_2(\mathbb{C})$ or $SU_2(\mathbb{C})$ の有限部分群を数え尽すことに帰着する。4つの場合がある。

(0) *Imprimitive irreducible subgroups*. つまり G が単値表現によって $SL_2(\mathbb{F}_r)$ の中で実現される時は、 $A \triangleleft G$ という abel 部分群があって、 $G/A \cong S_2$ (2次対称群)。

Primitive cases は次の3とおり。

定理 (昔の人) $SL_2(\mathbb{C})$ の primitive irreducible subgroup は

$\widetilde{\mathcal{P}}_4$, $SL_2(\mathbb{F}_3)$ or $SL_2(\mathbb{F}_5)$. ここで $\widetilde{\mathcal{P}}_4$ は S_4 の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を中心とする自明でない中心拡大。 $SL_2(\mathbb{F}_3)$ と $SL_2(\mathbb{F}_5)$ も同様に、 A_4 と A_5 の中心拡大である。

$\langle SL_3(\mathbb{F}_r) \text{ の部分群} \rangle$ ($n=4$ のためのため) $r=p^f \equiv 1 \pmod{3}$.

(A) The case of non-liftable groups

Theorem (Mitchell, Hartley, Bloom)

Let G be an irreducible subgroup of $SL_3(\mathbb{F}_r)$ which cannot be lifted. Then G is isomorphic to one of the following:

- (i) $SL_3(\mathbb{F}_{r'})$ for some $\mathbb{F}_{r'} \subset \mathbb{F}_r$.
- (ii) In case, $3 \mid [\mathbb{F}_r : \mathbb{F}_{r'}]$ and $3 \mid (\#\mathbb{F}_{r'} - 1)$, an extension of $SL_3(\mathbb{F}_{r'})$ by a group of order 3.
- (iii) $U_3(\mathbb{F}_{r'})$ for some $\mathbb{F}_{r'}$ with $2 \mid [\mathbb{F}_r : \mathbb{F}_{r'}]$.
- (iv) In case, $6 \mid [\mathbb{F}_r : \mathbb{F}_{r'}]$ and $3 \mid (r'+1)$, an extension of $U_3(\mathbb{F}_{r'})$ by a group of order 3.
- (v) If $p \neq 2$, $\mathbb{F}_{r'} \subset \mathbb{F}_r$ and $r' > 3$, either $PSL_2(\mathbb{F}_{r'})$ or $PGL_2(\mathbb{F}_{r'})$ ("直交群")
- (vi) If $p=5$ and f is even, a covering group of A_7 , (i.e. $G/\{\text{scalars}\} \cong A_7$).

(B) The case of liftable groups. $G \subset SU_3(\mathbb{C})$.

- (0) G is imprimitive irreducible $\Rightarrow \exists A \triangleleft G$, abelian such that $G/A \cong S_3$, or $G/A \cong A_3$.

Theorem (classical) The list of primitive irreducible subgroups of $SU_3(\mathbb{C})$.

- (i) A split extension of a non-abelian group P of order 3^3 and exponent 3 by $SL_2(\mathbb{F}_3)$. (位数 $\leq 27 \times 24$)
- (ii) A_5 (位数, 60)
- (iii) $\tilde{A}_6$ ($1 \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \tilde{A}_6 \rightarrow A_6 \rightarrow 1$) (位数, 360×3)
- (iv) $PSL_2(\mathbb{F}_7)$ (位数, 168) □

References

- [1] Birman, J., Braids, links and mapping class groups.
Annals of Math. Studies.
- [2] Ihara, Y., Infinite braid groups, Galois representations, and complex multiplication. Ann. of Math. vol. 123 (1986), 43-106
- [3] Tsuchiya, A., and Y. Kaneko, Vertex operators in two dimensional conformal field theory on $\mathbb{P}^1$ and monodromy representation of braid groups. Adv. Studies in pure Math. vol. 16 (1988) 297-372
- [4] Matthews, G.R., Vaserstein, L.N., and Weissfeiler, B.
Congruence properties of Zariski-dense subgroup I
Proc. London Math. Soc. vol (3), 48 (1984), 514-532
- [5] Weissfeiler, Boris, Strong approximation for Zariski-dense subgroups of semisimple algebraic groups.
Ann. of Math. vol 120 (1984), 271-315