

逆問題的視点からみた Fourier 解析

東京理科大学大学院理工学研究科情報科学専攻 水谷友哉 (Tomoya Mizutani)

Department of Information Sciences, Faculty of Science and Technology,
Tokyo University of Science

東京理科大学理工学部情報科学科 児玉賢史 (Satoshi Kodama)

Department of Information Sciences, Faculty of Science and Technology,
Tokyo University of Science

東京理科大学理工学部情報科学科 明石重男 (Shigeo Akashi)

Department of Information Sciences, Faculty of Science and Technology,
Tokyo University of Science

1 逆問題の定義と適切性および不適切性

入力から出力を求める問題を順問題というのに対して、出力から入力を推定する問題を逆問題と呼ぶ。この逆問題は、第2次世界大戦時の弾道計算問題などに関係して、工学的要請から急速に発展した理論である。逆問題を考える際、出力結果から入力結果を算出するために必要となる幾つかの条件を適切性 (well-posedness) 条件とよび、この条件が満たされている場合、その逆問題が well-posed であると呼ばれ、満たされていない場合は ill-posed であると呼ばれる。逆問題が適切であるためには、少なくとも以下の最初の3条件、可能ならば4条件：

1. 解の存在性; 解が存在する事。
2. 解の一意性; 解がただ一つである事。
3. 解の安定性; 入力に微小な変動を与えたときに、出力の変動も微小である事。
4. 解の導出可能性: 出力に微小変動を与えても、入力結果に大きな変動が生じない事。

を満たすことが必要とされる。通常、私たちが適切な逆問題と考えている場合でも、実は不適切な逆問題である例が多い。例えば、1次元連立方程式の解法も、逆問題的観点から眺めると、不適切な問題として扱う必要がある。例えば、次の2変数1次連立方程式：

$$\begin{cases} 0.4x + 1.2y = 5.2 \\ 3.5 + 10.501y = 45.504 \end{cases} \quad (1)$$

の解は $(x, y) = (1, 4)$ となる。ここで出力結果に微小な変動を加えた以下のような連立方程式：

$$\begin{cases} 0.4x + 1.2y = 5.2 \\ 3.5 + 10.501y = 45.501 \end{cases} \quad (2)$$

を考えた場合、この解は $(x, y) = (10, 1)$ となるため、出力結果の微小変動が、入力結果の変動に大きな影響を及ぼしてしまう。これが連立方程式を ill-posed な逆問題として取り扱わなければならない理由である。ちなみに、連立方程式の数値解法に関しては、その連立方程式の係数から構成される行列式の値を用いて、well-posed な問題として取り扱うことが可能であるか、ill-posed な問題として取り扱わなくてはならないかを判定することができるが、一般的にそのような判別量をみつけることは容易なことではない。

2 Fourier 変換と逆問題整合性条件

先程も述べたように、ある順問題に対応する逆問題が、well-posed であるか ill-posed であるかを判断することは必ずしも容易ではなく、かつ私達の常識に沿わない点もある。そこで本節では、通信技術で多用される Fourier 変換を逆問題的視点から眺めてみる。

2.1 Fourier 変換の可逆性について

ここでは、Fourier 変換とその逆変換に関して、必ずしも可逆性が成立しないこと、具体的には、任意の $f(\cdot) \in L^1(-\infty, \infty)$ に対して、 $\hat{f}(\cdot) = f(\cdot)$ が成立しないことを示す。そのためには、入力空間と出力空間を明示しておかなくてはならないが、ここで入力空間を $(L^1(-\infty, \infty), \|\cdot\|_1)$ とすると、出力空間として $(C_0(-\infty, \infty), \|\cdot\|_\infty)$ を設定してよいことが、Riemann-Lebesgue の定理により保証されている。今 $(-\infty, \infty)$ 上の関数 $f(\cdot)$ が、以下のような定義式：

$$f(t) \equiv \begin{cases} e^{-t} & 0 \leq t \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3)$$

で与えられているものとする。この関数は、Fourier 変換を施した後、Fourier 逆変換を施しても元に戻ることはない。そのような意味で、Fourier 変換は必ずしも出力解から入力解を推定できないことを示している。 $\hat{f} \notin L^1(-\infty, \infty)$ を示せば十分である。

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(1+i\omega)t} dt \\ &= \left[\frac{-1}{1+i\omega} e^{-(1+i\omega)t} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{1+i\omega} \left(1 - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-i\omega t}}{e^t} \right) \\ &= -\frac{1}{1+i\omega} \end{aligned}$$

ここで、 $|\hat{f}| \notin L^1(-\infty, \infty)$ を示せば良いから、

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\omega)| &= \left| \frac{1}{1+i\omega} \right| \\ &= \left| \frac{1}{1+\omega^2} - i \frac{\omega}{1+\omega^2} \right| \\ &= \sqrt{\frac{1}{1+\omega^2}} \end{aligned}$$

ここで置換積分を用いると、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{1+\omega^2}} d\omega &= 2 \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{1}{1+\omega^2}} d\omega \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 \theta}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta \end{aligned}$$

が得られる。次に部分分数展開と置換積分を用いると、

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} d\theta \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{1-t^2} dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= \left[-\log |1-t| + \log |1+t| \right]_0^1 \\ &= \left[\log \left| \frac{1-t}{1+t} \right| \right]_0^1 \\ &= \infty \end{aligned}$$

という結果が得られ、以上より $\hat{f} \notin L^1$ となる事が示せた。実は Fourier 変換は、 $L^1(-\infty, \infty)$ を定義域とした場合、値域を $L^1(-\infty, \infty)$ として選ぶことはできない。この事実は、定義関数 $1_{[-1,1]}(\cdot)$ の Fourier 変換が標本化関数と呼ばれる「広義 Riemann 積分可能であるが Lebesgue 積分不可能」な関数となることから容易に推察される。したがって無限遠点で 0 に収束する連続関数の集合に一様ノルムを付加して構成される関数空間 $C_0(-\infty, \infty)$ を値域として取り扱っている。なお工学的実用性の観点から、その定義域を $L^1(-\infty, \infty) \cup L^2(-\infty, \infty)$ にまで拡張してとり扱う場合が多いが、これは Fourier 変換の定義域を $L^1(-\infty, \infty) \cup L^2(-\infty, \infty)$ と制限した場合、値域が $L^2(-\infty, \infty)$ に制限されるという事実により保証される。

2.2 フーリエ変換の全射性について

続いて、Fourier 変換の定義域を $L^1(-\infty, \infty)$ と定め、かつ値域を $C_0(-\infty, \infty)$ と定めた場合に、全射とならないことを示す。具体的には、任意の $g \in C_0(-\infty, \infty)$ に対して、 $f \in L^1; g = \hat{f}$

を満たす $f \in L^1(-\infty, \infty)$ が存在するとは限らないことを示す。 $g(\cdot)$ を

$$g(\omega) \equiv \begin{cases} \frac{1}{\log \omega} & e < \omega \\ \frac{\omega}{e} & 0 < \omega < e \\ -g(-\omega) & \omega < 0 \end{cases}$$

として定義される関数としたとき、 $g = \hat{f}$ を満たす $f \notin L^1(-\infty, \infty)$ を選ぶことができない事を示す。最初に、 $y = g(x)/x$ が $L^1(-\infty, \infty)$ の要素でない事を次のようにして示しておく。

$$\begin{aligned} \int_e^N \frac{g(x)}{x} dx &= \int_e^N \frac{1}{x \log x} dx \\ &= \left[\log(\log x) \right]_e^N \rightarrow \infty (N \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (4)$$

背理法を用いて証明する。今ある $f \in L^1(-\infty, \infty)$ に対して、 $g(\cdot) = \hat{f}(\cdot)$ が成り立つと仮定した場合、

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(t) dt = \hat{f}(x) \quad (5)$$

今、 g が奇関数である事、つまり $g(x) = -g(-x)$ が成り立つことに注意すると、

$$\begin{aligned} g(x) &= -\hat{f}(-x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f(t) dt \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、(5) 式と (6) 式をくわえることにより、

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin xtdt \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} f(t) \sin xtdt + \int_{-\infty}^0 f(t) \sin xtdt \right) \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} f(t) \sin xtdt - \int_0^{\infty} f(s) \sin xsds \right) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{i\{f(-t) - f(t)\}}{\sqrt{2\pi}} \sin xtdt \end{aligned}$$

が得られる。そこで、 $F(\cdot)$ を次のような式：

$$F(t) \equiv \frac{i\{f(-t) - f(t)\}}{\sqrt{2\pi}}$$

で定義される関数とすると、明らかに $F \in L^1(-\infty, \infty)$ が成り立つことは明らかである。従って Fubini の定理および $x = y/t$ という変数変換による置換積分を用いると、

$$\begin{aligned} \int_e^N \frac{g(x)}{x} dx &= \int_e^N \left\{ \int_0^{\infty} F(t) \frac{\sin xt}{x} dt \right\} dx \\ &= \int_0^{\infty} F(t) \left\{ \int_{et}^{Nt} \frac{\sin y}{y} dy \right\} dt \end{aligned}$$

を得る。ここで上式に存在する 2ヶ所の等式のうち、上から 2 番目の等式の成立にふれておく。任意の自然数 N に対して、関数 $G(\cdot, \cdot)$ を以下の定義式：

$$G(x, t) = F(t) \frac{\sin xt}{x}, \quad (x, t) \in [e, N) \times [0, \infty)$$

で与えられている関数とすると、

$$|G(x, t)| \leq \frac{|F(t)|}{x}, \quad (x, t) \in [e, N) \times [0, \infty)$$

が成立する。この式は、 $G(\cdot, \cdot)$ が直積空間 $[e, N) \times [0, \infty)$ 上の可積分関数である事、すなわち $G(\cdot, \cdot) \in L^1([e, N) \times [0, \infty))$ が成立する事を示している。従って Fubini の定理が適用可能となり、その成立が導かれる。今、任意の非負の実数 y に対して、 $\sin y/y$ が、(Lebesgue 積分可能ではないが、) $[0, \infty)$ 上で定義された広義 Riemann 積分可能関数である事より、ある $M > 0$ が存在して、任意の正の実数 $0 < a < b$ に対して、

$$\left| \int_a^b \frac{\sin y}{y} dy \right| < M$$

が成立することが知られているため、2 重積分で与えられた上式の被積分関数に関して、

$$\left| F(t) \int_{et}^{Nt} \frac{\sin y}{y} dy \right| \leq M |F(t)|, \quad 0 < t < \infty$$

が成り立つ。これより、 $F(t) \{ \int_{et}^{Nt} \frac{\sin y}{y} dy \}$ を t の関数として見た場合、 $(0, \infty)$ 上の可積分関数と見なすことができる。一方、左辺については、この定理の最初で述べた計算結果を用いると、

$$\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \int_e^N \frac{g(x)}{x} dx \right| \leq M \|F\|_1$$

となるため、これは (4) 式に矛盾することになる。

参考文献

- [1]. R. Goldberg, Fourier Transforms, Cambridge Tract in Mathematics, vol.52, Cambridge University Press, 1961
- [2]. T. W. Körner, Fourier Analysis, vol.1, Cambridge University Press, 1988.
- [3]. T. W. Körner, Fourier Analysis, vol.2, Cambridge University Press, 1988.