

Translation invariant operators in L^p

東北大理 猪狩 惺

1. G を局所コンパクト可換群とす。

$$\tau_y f(x) = f(x-y) \quad x, y \in G$$

とかく。 $1 \leq p \leq q \leq \infty$ とすとき、線型作用素

$$T: L^p(G) \rightarrow L^q(G)$$

が translation invariant であるとは、

$$T \tau_y = \tau_y T \quad (y \in G)$$

をみたすことである。上の性質をもつ有界作用素の全体を $L^q_p(G)$ とかく。以下 $p = q$ の場合に限って考へる。

$$1) \quad L^p_p(G) = L^{p'}_{p'}(G) \quad (1/p + 1/p' = 1) \quad \text{等距離的.}$$

$$2) \quad L^p_p(G) \subset L^q_q(G) \quad (1 \leq p \leq q \leq 2) \quad \text{これは非増加.}$$

$$3) \quad L^1_1(G) = M(G), \text{ すなわち, } G \text{ 上の有界正則ボレル測度の全体.}$$

$$4) \quad T \in L^2_2(G) \text{ ならば } \varphi \in L^\infty(\hat{G}) \text{ が存在して}$$

$$(Tf)^\wedge = \varphi \cdot \hat{f} \quad \text{on } \hat{G}, \quad f \in L^2(G). \quad (1)$$

ここに $\hat{f}$ は f のフーリエ変換, $\hat{G}$ は G の双対群である.

逆に, $\varphi \in L^\infty(\hat{G})$ に対して T を上の式で定義するとき,
 $T \in L^2(G)$ として

$$L^2(G) \simeq L^\infty(\hat{G}) \quad \text{等距離的.}$$

1) ~ 4) によつて, $T \in L^p_p(G)$ ならば $\varphi \in L^\infty(\hat{G})$ が存在して (1) が成り立つ. このとき $T = T_\varphi$ とかく.

$$M_p(\hat{G}) = \{ \varphi : T_\varphi \in L^p_p(G) \}$$

とかき $M_p(\hat{G})$ の元を L^p -multiplier といい. $\varphi \in M_p(\hat{G})$ に対して $\|\varphi\|$ を

$$\|\varphi\|_{M_p(\hat{G})} = \|T_\varphi\|_{L^p(G) \rightarrow L^p(G)}$$

で定義するとき $M_p(\hat{G})$ は可換, 単位元をもつバナッハ代数となる.

空間 $M_p(\hat{G})$ の元の特徴づけやバナッハ代数としての性質は $p=2$ の場合を除いて複雑である. $1 < p, \neq 2 < \infty$ の場合の系統的な研究は L. Hörmander [1] に, $p=1$ の場合の代数的系統的な研究は J. L. Taylor [6] や W. Rudin [5] 等にある. ここで $1 < p \neq 2, < \infty$ の場合の M_p の元の性質を $p=1$ の場合の次のような性質に着目して述べる.

$M_1(\hat{G}) = B(\hat{G})$ であるが, $M(G)$ のフーリエ・スタエルト変換の全体である.

5) (Wiener-Pitt) G は離散的でないとき, $\varphi \in M_1(\hat{G})$ で

$$\varphi \geq 1 \text{ on } \hat{G}, \quad 1/\varphi \in M_1(\hat{G})$$

ある φ が存在する。

6) (Wiener). $\varphi \in M_1(\hat{G})$, C は $\hat{G}$ のコンパクト部分集合ならば, $f \in L^1(G)$ が存在して $\varphi = \hat{f}$ on C . 従って, $\varphi \geq 1$ on C ならば, $\psi \in M_1(\hat{G})$ が存在して $1/\varphi = \psi$ on C . 従って, $M_1(\hat{G})$ の元が局所的に可逆である必要十分条件は 0 とならずることである。

一般に, $M_1(\hat{G})$ の可逆元の特徴づけは, J. L. Taylor [6] によって一つの完全な解答を与えられた。

2. 代数 $M_p(\hat{G})$. 以下簡単のため, $G = \mathbb{R}^d$, $\mathbb{T}^d$ または $\mathbb{Z}^d$ とする. $1 < p < 2$ とする.

定理 1 (猪狩 [2]). G は離散的であるとする. Φ は区間 $[-1, 1]$ 上の函数で

$$\varphi \in M_1(\hat{G}), \text{ range } \varphi \subset [-1, 1] \Rightarrow \Phi(\varphi) \in M_p(\hat{G}) \quad (2)$$

とする. そのとき Φ は整函数に延長される.

特に, $\Phi(z) = (1+z^2)^{-1}$ を考えることによつて, $\varphi \in M_1$ が存在して, φ は実数値であるが, $\text{spectrum}(\varphi) \ni i$ であることがわかる. ゆえに, 代数 $M_p(\hat{G})$ は対称でも正則でもない. また上の φ に対して $\psi = 1 + \varphi^2 \in M_1$ とおけば, II 5) の Wiener-Pi# の現象が $M_p(\hat{G})$ に対しても起きること

かわる。すなわち、

系 1. G は離散的でないとする。 $\varphi \in M_p(\hat{G})$ が存在して

$$\varphi \geq 1 \text{ の } \hat{G}, \quad 1/\varphi \notin M_p(\hat{G}).$$

M. Zafran [7], [8] は、定理 1 の (2) の仮定を

$$\varphi \in M_p(\hat{G}), \text{ range } \varphi \subset [-1, 1], \varphi \text{ は連続}, \varphi(\infty) = 0$$

として定理 1 の結論は成り立つことを示した。

定理 1 は $\hat{G} = T^d$ のときは、Wiener-Levy の定理によって成り立たない。しかし、

定理 2 (猪狩 [3]). $G = \mathbb{Z}^d$ とする。定理 1 の (2) の条件を

$$\varphi \in M_p(\hat{G}), \text{ range } \varphi \subset [-1, 1]$$

とすると成り立つ。

M. Zafran は要約 [9] の中で更に $\varphi \in M_p(\hat{G})$ は連続としていふことを主張している。

上と同様の論法によって、系 1 は $G = \mathbb{Z}^d$ のときも成り立つことが定理 2 からわかる。

補題 (M. Jodeit, Jr. [4]). $1 < p < \infty$ とする。 $T^d \in \mathbb{R}^d$ の 0 を含む区間とみなすとき、 $\varphi \in M_p(\mathbb{R}^d)$ ならば φ の T^d への制限は $M_p(T^d)$ に属する。また、 $\varphi \in M_p(T^d)$ ならば φ を $\mathbb{R}^d$ 上へ周期函数として延長したとき $M_p(\mathbb{R}^d)$ に属する。

上の補題と、系 1 の $\hat{G} = T^d$ の場合を組合せると、scale

を要することによ，この系が得られる。

系2. $A \in \mathbb{R}^d$ の空でない閉集合とする。 $\varphi \in M_p(\mathbb{R}^d)$ が存在して， $\varphi \geq 1$ しかし $1/\varphi|_A \notin M_p(\mathbb{R}^d)|_A$ ， ならば $\dots|_A$ は A への制限を要する。

従， φ ， $\mathbb{R}^d$ は $M_p(\mathbb{R}^d)$ に対しては成り立たない。これは $M_p(\mathbb{R}^d)$ の極大イデアルの空間が $M_1(\mathbb{R}^d)$ のそれよりより複雑であることに由来していると思われる。

引 用 文 献

- [1] L.Hörmander, Estimates for translation invariant operators in L^p spaces, Acta Math., 104(1960), 93-140.
- [2] S.Igari, Functions of L^p -multipliers, Tohoku M.J., 21(1969), 304-320.
- [3] ———— II, ibidem, 26(1974), 555-561.
- [4] M.Jodeit, Jr., Restrictions and extensions of Fourier multipliers, Studia Math., 34(1970), 215-226.
- [5] W.Rudin, Fourier Analysis on Groups, Intersci. Publ., 1962.
- [6] J.L.Taylor, Inverses, logarithms and idempotents in $M(G)$, Rocky M^t J.M., 2(1972), 183-206-
- [7] M.Zafran, Spectra of convolution operators on L_p spaces, Proc.Nat. Acad.Sci.U.S.A., 72(1974), 3285-3286.

- [8] M.Zafran, The spectra of multiplier transformations on the L_p spaces,
Ann.of Math., to appear.
- [9] M.Zafran, The functions operating on certain algebras of multipliers,
to appear.