

## ZHONG による弱 PALAIS-SMALE 条件と COERCIVITY について

九州工業大学・工学部

鈴木 智成 (Tomonari SUZUKI)

### 1. 序

数学者の定義の一つに「コーヒーから定理をつくる人」というものがある。もちろん、これは冗談であるが、非常に的を射ている。ただ、この定義に従うと、筆者は数学者ではないことになるだろう。筆者は定理をつくることよりも、別証明や (反) 例をつくるのが好きだからだ。—— 前置きが長くなったが、本稿では、筆者の最近の論文 [11] に関する解説を書こうと考えている。この論文の中で、Zhong [13, 14] の定理に関する別証明と例を与えている。つまり、論文 [11] は最も筆者らしい論文の一つと言える。論文 [11] では具体的に以下のことをしている。

- Ekeland の定理を一度しか用いない簡潔な別証明を与えた
- $h$  の連続性が不要であることを示した
- Zhong の弱 Palais-Smale 条件がある意味「最弱」な Palais-Smale 条件であることを示した
- 完備性のないあるノルム空間における反例を与えた

なお、講究録の趣旨には合わせるため、通常の論文とは異なり、筆者の主観的なコメントも記述している。筆者の現時点での感覚なので、的外れな意見もあるかも知れない。この点について、ご容赦願いたいのと同時に、楽しんでいただければ幸いである。また、本質的な部分に焦点をあてる為に、本質的でない部分については、若干強い条件を仮定している所もある。

### 2. 準備

本稿を通して、 $N$  を自然数全体からなる集合とする。 $\mathbb{R}$  を実数全体からなる集合とする。

$f$  をバナッハ空間  $X$  で定義された実数値関数とする。 $f$  が  $x \in X$  でガトー微分 (Gâteaux differentiable) 可能であるとは、 $X$  上で定義された実数値

---

キーワード. Palais-Smale 条件, coercivity, Ekeland の変分原理,  $\tau$ -distance.  
住所. 〒 804-8550 北九州市戸畑区仙水町 1-1 九州工業大学工学部数学教室.  
電子メール. [suzuki-t@nns.kyutech.ac.jp](mailto:suzuki-t@nns.kyutech.ac.jp).

線形連続関数  $f'(x)$  が存在して、すべての  $y \in X$  について

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+ty) - f(x)}{t} = \langle f'(x), y \rangle$$

が成立することをいう。(この定義と異なるガトー微分の定義もあるので注意)  
 $f$  がコアシブ (coercive) であるとは、

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \inf_{\|x\| \geq r} f(x) = \infty$$

が成立することをいう。また、 $f$  が弱パレイスメイル条件 (weak Palais-Smale condition, weak-PS) [13] を満たすとは、以下を満たす  $[0, \infty)$  から  $[0, \infty)$  への非減少 (連続) 関数  $h$  が存在することをいう:

- $\int_0^\infty \frac{1}{1+h(t)} dt = \infty$
- $X$  の点列  $\{x_n\}$  について、 $\{f(x_n)\}$  が有界でかつ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f'(x_n)\| (1 + h(\|x_n\|)) = 0$  を満たすならば、 $\{x_n\}$  は収束する部分列を持つ

$h(t) = 0$  の場合、 $f$  はパレイスメイル条件 (Palais-Smale condition, PS) を満たすといい、 $h(t) = t$  の場合、 $f$  はセラミパレイスメイル条件 (Cerami-Palais-Smale condition, Cerami-PS) を満たすという。

$$\text{PS} \implies \text{Cerami-PS} \implies \text{weak-PS}$$

という関係が成立する。「Cerami-PS  $\implies$  weak-PS」は特別な場合であることから従う。「PS  $\implies$  Cerami-PS」は条件の結論の部分が同じで、仮定の部分については PS のが弱いことから従う。

**定義 1** ([5]).  $(X, d)$  を距離空間とし、 $p$  を  $X \times X$  から  $[0, \infty)$  への関数とする。このとき、 $p$  が  $X$  上の  $\tau$ -distance であるとは  $X \times [0, \infty)$  から  $[0, \infty)$  への関数  $\eta$  が存在して以下の 5 条件を満たすことをいう。

- ( $\tau 1$ )  $p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z)$  がすべての  $x, y, z \in X$  について成り立つ
- ( $\tau 2$ )  $\eta(x, 0) = 0$  と  $\eta(x, t) \geq t$  がすべての  $(x, t) \in X \times [0, \infty)$  について成り立ち、 $\eta$  は第 2 変数について凹かつ連続である
- ( $\tau 3$ )  $\lim_n x_n = x$  かつ  $\lim_n \sup \{\eta(z_n, p(z_n, x_m)) : m \geq n\} = 0$  ならば  $p(w, x) \leq \liminf_n p(w, x_n)$  がすべての  $w \in X$  について成立する
- ( $\tau 4$ )  $\lim_n \sup \{p(x_n, y_m) : m \geq n\} = 0$  かつ  $\lim_n \eta(x_n, t_n) = 0$  ならば  $\lim_n \eta(y_n, t_n) = 0$  が成立する
- ( $\tau 5$ )  $\lim_n \eta(z_n, p(z_n, x_n)) = 0$  かつ  $\lim_n \eta(z_n, p(z_n, y_n)) = 0$  ならば  $\lim_n d(x_n, y_n) = 0$  が成立する

**注意.** 距離関数  $d$  は一つの  $\tau$ -distances である. また, 「 $p(x, y) = p(y, x)$ 」, 「 $p(x, x) = 0$ 」, 「 $p(x, y) = 0 \implies x = y$ 」等は一般には成立しない. [4-11] 等を参照のこと.

次の定理は Ekeland の変分原理と呼ばれる.

**定理 2** (Ekeland [2, 3]).  $(X, d)$  を完備距離空間とし,  $f$  を  $X$  で定義された下半連続で, 下から有界な実数値関数とする. このとき,  $u \in X$  と  $\lambda > 0$  に対して, 以下を満たす  $v \in X$  が存在する.

$$\begin{aligned} f(v) &\leq f(u) - \lambda d(u, v) \\ f(w) &> f(v) - \lambda d(v, w), \quad \forall w \in X \setminus \{v\} \end{aligned}$$

次の定理は  $\tau$ -distance 版の Ekeland の変分原理である.

**定理 3** ([5]).  $(X, d)$  と  $f$  は定理 2 と同じとする.  $p$  を  $X$  上の  $\tau$ -distance とする. このとき,  $p(u, u) = 0$  を満たす  $u \in X$  に対して, 以下を満たす  $v \in X$  が存在する.

$$\begin{aligned} (1) \quad & f(v) \leq f(u) - p(u, v) \\ (2) \quad & f(w) > f(v) - p(v, w), \quad \forall w \in X \setminus \{v\} \end{aligned}$$

**注意.**  $\lambda d(\cdot, \cdot)$  は一つの  $\tau$ -distance なので, 定理 2 は定理 3 の特別な場合と言える. この定理 3 は, 我々の主道具である.

### 3. ZHONG の定理の別証明

この節では, 本稿の目的の一つである, Zhong の定理に対する別証明を与える.

**定理 4** (Zhong [13]).  $f$  をバナッハ空間  $X$  で定義されたガトー微分可能な下半連続実数値関数とする.  $h$  を  $[0, \infty)$  から  $[0, \infty)$  への非減少関数で  $\int_0^\infty (1 + h(t))^{-1} dt = \infty$  を満たす関数とする. もし,  $\alpha := \lim_{r \rightarrow \infty} \inf_{\|x\| \geq r} f(x)$  が実数ならば,  $\lim_n \|x_n\| = \infty$ ,  $\lim_n f(x_n) = \alpha$  そして  $\lim_n \|f'(x_n)\| (1 + h(\|x_n\|)) = 0$  を満たす  $X$  の点列  $\{x_n\}$  が存在する.

この定理の対偶もどきを取ると以下になる.

**定理 5** (Zhong [13]).  $X$  と  $f$  は定理 4 と同じとする.  $f$  は下から有界であると仮定する. このとき, もし  $f$  が weak-PS を満たせば,  $f$  はコアシブである.

Zhong の証明は Ekeland の変分原理を何度も使う少し複雑なものであった. 以下では, 定理 3 を一度しか使わない別証明を与える.

**定理 4 の証明** ([11]). 以下を示せば十分である. 「すべての  $\varepsilon > 0$  に対して,  $\|v\| \geq 1/\varepsilon$ ,  $|f(v) - \alpha| \leq \varepsilon$ ,  $\|f'(v)\| (1 + h(\|v\|)) \leq \varepsilon$  を満たす  $v \in X$  が存在する」 $\varepsilon > 0$  を固定し,  $\tau$ -distance  $p$  を

$$p(x, y) = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\|x\|}^{\|x\| + \|x-y\|} \frac{dt}{1 + h(t+1)} + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\|y\|}^{\|y\| + \|x-y\|} \frac{dt}{1 + h(t+1)}$$

で定義する. 実数値関数  $g$  を

$$g(x) = \max \{f(x), \alpha - 2\varepsilon\}$$

で定義する. 明らかに,  $g$  は下半連続でかつ下から有界である.  $r, r' \in \mathbb{R}$  を  $1/\varepsilon < r < r'$ ,  $1 < r$ ,  $\inf_{\|x\| \geq r} f(x) > \alpha - \varepsilon$ ,  $\int_r^{r'} \frac{dt}{1+h(t+1)} = 6$  を満たすようにとる.  $u \in X$  を  $\|u\| > r'$ ,  $f(u) < \alpha + \varepsilon$  を満たすようにとる.  $\|u\| > r$  なので,  $g(u) = f(u)$  である. 定理 3 により, (1), (2) を満たす  $v \in X$  が存在する. もし  $\|v\| < r$  を仮定すると, (1) より,

$$\begin{aligned} \alpha - 2\varepsilon \leq g(v) &\leq g(u) - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\|v\|}^{\|v\| + \|u-v\|} \frac{dt}{1 + h(t+1)} \\ &\leq g(u) - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\|v\|}^{\|u\|} \frac{dt}{1 + h(t+1)} \leq g(u) - \frac{\varepsilon}{2} \int_r^{r'} \frac{dt}{1 + h(t+1)} \\ &= f(u) - 3\varepsilon < \alpha - 2\varepsilon \end{aligned}$$

となり, 矛盾を得る. すなわち,  $\|v\| \geq r > 1/\varepsilon$  である. よって  $g(v) = f(v)$  を得て, これより

$$\alpha - \varepsilon < \inf_{\|x\| \geq r} f(x) \leq f(v) \leq f(u) < \alpha + \varepsilon$$

を得る. すなわち,  $|f(v) - \alpha| \leq \varepsilon$  である. また (2) より  $\|f'(v)\| (1 + h(\|v\|)) \leq \varepsilon$  を得る.  $\square$

**注意.** 証明すべき 3 つの条件  $\|v\| \geq 1/\varepsilon$ ,  $|f(v) - \alpha| \leq \varepsilon$ ,  $\|f'(v)\| (1 + h(\|v\|)) \leq \varepsilon$  のうち一番複雑なのが 3 番目の条件である. この 3 番目の条件が自動的に成立するように  $\tau$ -distance を定義するのが, この証明の最も重要なポイントである. 次に, 閉集合  $\{x \in X : \|x\| \geq 1/\varepsilon\}$  から  $v$  を探すのであるが, 微分情報を得るために, 実際には, 開集合  $\{x \in X : \|x\| > 1/\varepsilon\}$  から  $v$  を探さなければならない. Ekeland の定理は閉集合にしか適用できないので, これは問題である. Ekeland の定理を適用する際, 集合  $\{x \in X : \|x\| \leq 1/\varepsilon\}$  が無意味になるように,  $u, r, r'$  そして  $\tau$ -distance  $p$  を選ぶことで, この問題を解決した. すなわち, 問題の複雑で困難な部分を  $\tau$ -distance  $p$  に負わせることにより, 見通しのよい簡潔な別証明を得ることができたのである.

4.  $h$  の連続性

Zhong [13] は定理 4 において「 $h$  の連続性」を仮定しているので、厳密に言えば、定理 4 は新しい定理であり、従って、上の証明は別証明ではない。しかしながら、「 $h$  の連続性」は仮定しなくても同値であることが分かった。この節ではそれを証明する。

**命題 6** ([11]).  $h$  を  $[0, \infty)$  から  $[0, \infty)$  への非減少で  $\int_0^\infty \frac{1}{1+h(t)} dt = \infty$  を満たす関数とする。このとき、非減少連続関数  $\theta$  で  $\int_0^\infty \frac{1}{1+\theta(t)} dt = \infty$  と  $h(t) \leq \theta(t)$  を満たす関数が存在する。

**証明.**  $[t]$  を  $t$  を越えない最大の整数とする。関数  $\theta$  を

$$\theta(t) = (1 - t + [t]) h([t] + 1) + (t - [t]) h([t] + 2)$$

で定義する。この関数は、 $h$  のグラフを 1 左に平行移動し、間隔 1 で点を取り、それらの点を線分で結んだ折れ線をグラフとする関数である。従って、 $h(t) \leq \theta(t) \leq h(t+2)$  が成立する。よって

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1+\theta(t)} \geq \int_0^\infty \frac{dt}{1+h(t+2)} = \int_2^\infty \frac{dt}{1+h(t)} = \infty$$

も成立する。 □

同様に以下も成立する。

**命題 7** ([11]).  $h$  を  $[0, \infty)$  から  $[0, \infty)$  への非減少で  $\int_0^\infty \frac{1}{1+h(t)} dt < \infty$  を満たす関数とする。このとき、非減少連続関数  $\theta$  で  $\int_0^\infty \frac{1}{1+\theta(t)} dt < \infty$  と  $\theta(t) \leq h(t)$  を満たす関数が存在する。

従って、我々の議論においては、「 $h$  の連続性」を気にする必要はない。

## 5. 最弱な PALAIS-SMALE 条件

論文 [11] を別なジャーナルに投稿したときに、リジェクトされたのであるが、そのときにエディタに次のように言われた。「定理 4 のインパクトがあまりない」なぜなら「無限遠くで値が有限にとどまるならば、傾きがゼロになる点列があるというのは、直感的にも理論的にも明らかである」と。この貴重な意見を動機付けとして、筆者は定理 4 のインパクトを上げるための例を 2 つつくった。

**例 8** ([11]).  $X := \mathbb{R}$  とし、 $h$  を  $[0, \infty)$  から  $[0, \infty)$  への非減少で  $\int_0^\infty \frac{1}{1+h(t)} dt < \infty$  を満たす連続関数とする。 $X$  上の微分可能で下から有界な実数値関数  $f$  を

$$f(x) = \int_0^x \frac{-1}{1+h(\max\{t, 0\})} dt$$

で定義する. このとき

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \inf_{|x| \geq r} f(x) \in \mathbb{R} \quad \text{かつ} \quad |f'(x)| (1 + h(|x|)) \geq 1, \quad \forall x \in X$$

が成立する.

weak-PS の定義から条件  $\int_0^\infty \frac{1}{1+h(t)} dt = \infty$  を外す (それを「weak-PS もどき」と仮に名づける). すると, weak-PS もどきだけれども, コアシブでない例が必ず作れることを, この例は主張している. すなわち, weak-PS は「弱い PS」というだけではなく「最弱な PS」であるということを主張している.

定理 4 を, 使用者の立場から眺めれば, インパクトは弱いかも知れない — 少なくとも, 現時点では. しかしながら, 必要十分条件であることを鑑みれば, 定理 4 は理論的に十分な価値があると筆者は考えている.

## 6. 完備性の役割に関する考察

この節では, 定理 4 のインパクトを上げるための第 2 の例について述べる. 先ほどの「無限遠くで値が有限にとどまるならば, 傾きがゼロになる点列がある」というのは, 直感的にも理論的にも明らかである」について, 命題が正しいのだから, 「明らか」と言われてしまえば議論の余地はない. そこで, ある完備でないノルム空間上で, 反例をつくってみた.

**例 9 ([11]).** 集合  $X$  を

$$X = \{x : x \text{ は実数列で途中から } 0 \text{ の並びになる}\}$$

とし,  $X$  に  $\ell_1$  ノルム  $\|x\| = \sum_{n=1}^\infty |x(n)|$  を入れる.  $\mathbb{R}$  から  $(0, \infty)$  への関数  $f$  を

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \exp(2^n x(n))$$

で定義する. すると,  $f$  は下半連続, 非連続, 凸, ガトー微分可能,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \inf_{\|x\| \geq r} f(x) = 0 \in \mathbb{R} \quad \text{かつ} \quad \|f'(x)\| \geq 1, \quad \forall x \in X$$

を満たす.

$f$  は PS を満たしているが, コアシブでないという反例である. 定理 4 が「直感的にも理論的にも明らか」とは, 今の筆者には見えない. 完備性に対するそこまでの感覚を筆者は身に付けていない.

$X$  を完備化したものは  $\ell_1$  である. 逆に言えば,  $X$  は  $\ell_1$  を完備化する前のものである. 完備性があると, 凸関数の下半連続性と連続性が同値になるのだが, この例はその性質に対する反例にもなっている.

コンパクトと完備は、存在性と強い関係のある、非常によく似た条件であるが、前者が強くて派手なのに対して、後者は弱くて地味である。筆者はこの弱くて地味な完備性という性質に — 何故か — 非常に魅力を感じ、研究を重ねてきた。そして、例 9 を思いついたときに、この「弱くて地味」という印象が少し変わった。「地味」というのは同じであるが、「弱い」というネガティブな印象から「縁の下の力持ち」というポジティブな印象に変わったのだ。また、完備性のある空間とない空間の下でのガトー微分の意味は、本質的に異なるのではないか、という妄想を現在筆者は抱いている。

## 7. 最後に

最後に、本稿の主目的は別証明であるので、「Zhong [13] による証明と本稿の証明を比較して頂きたい」と書かねばならないだろう。しかし、言うまでもないが、筆者は Zhong の結果を知った後で別証明を与えている。何もない所から証明するのとは比較にならない程、これは楽なことである。

## 参考文献

- [1] G. Cerami, *Un criterio de esistenza per i punti critici su varietà ilimitate*, Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A, **112** (1978), 332–336.
- [2] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl., **47** (1974), 324–353.
- [3] ———, *Nonconvex minimization problems*, Bull. Amer. Math. Soc., **1** (1979), 443–474.
- [4] O. Kada, T. Suzuki and W. Takahashi, *Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric spaces*, Math. Japon., **44** (1996), 381–391.
- [5] T. Suzuki, *Generalized distance and existence theorems in complete metric spaces*, J. Math. Anal. Appl., **253** (2001), 440–458.
- [6] ———, *On Downing-Kirk's theorem*, J. Math. Anal. Appl., **286** (2003), 453–458.
- [7] ———, *Several fixed point theorems concerning  $\tau$ -distance*, Fixed Point Theory Appl., **2004** (2004), 195–209.
- [8] ———, *Generalized Caristi's fixed point theorems by Bae and others*, J. Math. Anal. Appl., **302** (2005), 502–508.
- [9] ———, *Contractive mappings are Kannan mappings, and Kannan mappings are contractive mappings in some sense*, Comment. Math. Prace Mat., **45** (2005), 45–58.
- [10] ———, *The strong Ekeland variational principle*, J. Math. Anal. Appl., **320** (2006), 787–794.
- [11] ———, *On the relation between the weak Palais-Smale condition and coercivity by Zhong*, to appear in Nonlinear Anal.
- [12] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.
- [13] C.-K. Zhong, *A generalization of Ekeland's variational principle and application to the study of the relation between the weak P.S. condition and coercivity*, Nonlinear Anal., **29** (1997), 1421–1431.
- [14] ———, *On Ekeland's variational principle and a minimax theorem*, J. Math. Anal. Appl., **205** (1997), 239–250.