

水門から噴出する Wall Jet による 洗掘限界について

岩 垣 雄 一・土 屋 義 人

CRITERION FOR SCOUR FROM WALL JETS ISSUING FROM A SUBMERGED OUTLET

by Dr. Eng. Yuichi IWAGAKI and Yoshito TSUCHIYA

Synopsis

In order to establish the mechanics of scour downstream of a culvert and an outlet and to discuss the method for preventing from scour, it is necessary, first of all, to analyze the characters of flow close to a bed, especially the boundary layer developing there. The first part of this paper, therefore, presents an analysis of the boundary layer growth in a wall jet issuing from a submerged outlet, based on the momentum equation for a boundary layer connecting with two-dimensional free turbulent jets. Characters of diffusion of a wall jet, boundary layer growth and resistance laws are discussed on the basis of the experimental results of wall jets, and it is cleared that comparisons between the experimental results and the theoretical ones are satisfactory for practical purpose.

The main purpose of the paper is to obtain some fundamental data for estimating the length of apron of a submerged outlet under the condition that the sediment bed downstream of aprons is not scoured absolutely by action of flow. In the second part, the criterion for scour from the wall jet in the region having a constant maximum velocity is discussed by using the results obtained in the first part. The experimental results of the criterion are compared with the theoretical relationships, and an empirical formula for the criterion is proposed on the basis of the both results. In addition, some considerations on the design of the length of apron are briefly described.

1. 緒 言

最近道路の整備や建設にともなつて、数多くのカルバートその他の排水溝が設けられるが、その機能を十二分に発揮させるためには、その下流側に発生する局所洗掘を防止軽減し、その維持に万全を期さなければならない。この目的のためには、カルバートなどの下流部における洗掘の機構を水理学的に究明して、できる限り効果的に洗掘軽減をはかる必要があるが¹⁾、また一方局所洗掘を完全に防止するということも考えられる。この研究は後者の考えにもとづいて、カルバートなどの下流部に設けられる水たたきの長さを、その下流側の水路床が絶対に洗掘されないという条件できめるに必要な水理学上の基礎資料を得ようとするものである。その水理学的な取扱いにおいては、水門やカルバートの下流の流れを一つの噴流と考え、この噴流に

より水底に発達する境界層を運動量方程式によつて解析し、その結果を用いてこうした流れによる洗掘限界を論ずることにした。

水門から噴出する流れは wall jet の特性から三つの領域に分けて考えることができる。その第1は wall jet の最大流速が一定である領域であつて、通常自由噴流では zone of flow establishment とよばれるところであり、第2は最大流速が距離の平方根に反比例して減少するいわゆる zone of established flow とよばれる領域である。第3の領域は自由表面が存在するために自由噴流に関する結果が適用されないとこである。

Wall jet による洗掘限界を論ずる場合には、これらのすべての領域について考察すべきであるが、ここでは紙数の関係上、第1の領域における洗掘限界のみを論じ、他の二つの領域についての考察は別の機会に発表するつもりである。

2. 水門から噴出する wall jet における境界層の発達

水門やカルバートの下流部における洗掘限界とか洗掘機構を解明するためには、まずこの付近に発達する境界層を中心とした流れの解析が必要である。

最近 Glauert²⁾ は一つの壁に沿つて拡散する噴流を wall jet となづけて理論的研究を進め、また Bakke³⁾ はこのような wall jet について実験を行ない Glauert の理論結果と比較した。しかし、Glauert の解析において、基礎方程式への流れの抵抗法則の適用に若干疑問の点があるように思われる。ここでは、Glauert の研究とは違つた立場から二次元自由噴流と関係づけた境界層の運動量方程式をもとにして、水門から噴出する wall jet における境界層の発達を論ずる。

(1) Wall jet における境界層の発達に関する理論的考察

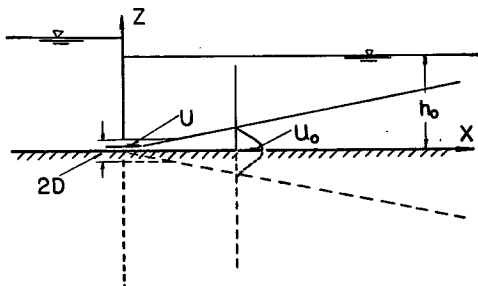


Fig. 1 Definition sketch of wall jet

Fig. 1 に示す wall jet において、壁面近くの $\partial u / \partial z = 0$ を満足する z の値を境界層の厚さ δ と定義し、 $z = \delta$ においてせん断応力が存在しないという条件⁴⁾で考えられる境界層とその外側の主流とについて、一次元解析法に従つて運動量の関係式をつくれれば次式が得られる。

主流に対して、

$$\frac{d}{dx} \int_{\delta}^{\infty} \left\{ \rho \bar{u}^2 + \rho \overline{u'^2} + p \right\} dz = 0, \quad \dots (1)$$

境界層に対して、

$$\frac{1}{u_0} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \bar{u} dz - \frac{1}{u_0^2} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \bar{u}^2 dz = \frac{1}{\rho u_0^2} \int_0^{\delta} \frac{\partial p}{\partial x} dz + \frac{1}{u_0^2} \int_0^{\delta} \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} dz + \frac{C_f}{2}, \quad \dots (2)$$

ここに、 $\bar{u}$: x 方向の時間的平均の流速成分、 $\overline{u'^2}$: $\bar{u}$ からの変動速度の2乗平均、 u_0 : $z = \delta$ における $\bar{u}$ の値、 p : 圧力、 ρ : 密度、 h : 水深、および C_f : 局所摩擦係数、である。

いま (1) 式において、 $\delta = 0$ および $h \rightarrow \infty$ の場合を考え、さらに速度変動にもとづく圧力勾配を省略すれば、二次元自由噴流の結果となるわけであつて、これについては従来 Tollmien⁵⁾、Görtler⁶⁾ らによつて研究されたが、1950年 Albertson ら⁷⁾ は詳細な実験とそれに対する理論的な考察を行なつた。その結果の一つとして、噴流の最大中心流速 u_0 が $x/2D$ の十分大きい値に対して、つぎの関係で減少することが明らかにされ、また流速成分も求められている。

$$\bar{u}_0 / U = \alpha \sqrt{2D/x}, \quad \dots (3)$$

ここに、 U : 噴流の流速、 D : 噴流の大きさ、 α : 実験定数であつて、Albertson らによれば 2.28 である。

自由表面をもつ wall jet に発達する境界層を (1) および (2) 式から直接解析することは困難であるので、一つの壁をもつ自由噴流の中における境界層の発達を取り扱い、その理論結果の適用限界を実験的に検討することにする。自由噴流の中においては $\partial p / \partial x \approx 0$ であることを考え、さらに (2) 式の右辺第 2 項を C_f の中に含めることにすれば、境界層の運動量方程式はつぎのようにあらわされる。

$$\frac{1}{u_0} \frac{d}{dx} \int_0^\delta \bar{u} dz - \frac{1}{u_0^2} \frac{d}{dx} \int_0^\delta \bar{u}^2 dz = \frac{C_f}{2}, \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 u_0 として近似的に $\bar{u}_0$ を用いることにし、適当な流速分布および抵抗法則を導入することによって、wall jet における境界層の発達を論ずることができる。

(i) 層流境界層：この場合は、流速分布として、通常用いられる

$$\frac{\bar{u}}{u_0} = 2 \left(\frac{z}{\delta} \right) - \left(\frac{z}{\delta} \right)^2 \dots\dots\dots (5)$$

および層流の抵抗法則を適用し、(4) 式における u_0 として Fig. 3 において実線で示される関係を採用することにすれば、 $x=0$ において $\delta=0$ という境界条件を満足する (4) 式の解は次式ようになる。

$\xi \leq 2\alpha^2$ に対して、

$$\zeta (UD/\nu)^{1/2} = \sqrt{30} \xi^{1/2}, \dots\dots\dots (6)$$

$\xi \geq 2\alpha^2$ に対して、

$$\zeta (UD/\nu)^{1/2} = (10\sqrt{2}/3\alpha)^{1/2} \xi^{-3/2} \{ \xi^{9/2} + 56\sqrt{2}\alpha^9 \}^{1/2}, \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $\xi = x/D$, $\zeta = \delta/D$ で ν は動粘性係数である。

また、壁に沿う摩擦速度 u^* はつぎのようにあらわされる。

$\xi \leq 2\alpha^2$ に対して、

$$(u^*/U)^2 (UD/\nu)^{1/2} = (2/\sqrt{30}) \xi^{-1/2}, \dots\dots\dots (8)$$

$\xi \geq 2\alpha^2$ に対して、

$$(u^*/U)^2 (UD/\nu)^{1/2} = 2\sqrt{2}\alpha (3\alpha/10\sqrt{2})^{1/2} \xi \{ \xi^{9/2} + 56\sqrt{2}\alpha^9 \}^{-1/2}, \dots\dots\dots (9)$$

(ii) 乱流境界層：この場合は流速分布の指数法則にもとづく境界層の発達を論ずることとする。その流速分布を一般的につぎのようにあらわす。

$$\bar{u}/u_0 = (z/\delta)^n, \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 $0 \leq n < 1$ である。また、局所的摩擦係数と境界層の厚さに関する Reynolds 数との関係は (10) 式を参照し、両者を指数関係であらわすことにすれば⁹⁾、つぎようになる。

$$C_f = 2\lambda (u_0 \delta / \nu)^{-2n/(n+1)}, \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 λ は無次元の実験定数である。

層流境界層の場合と同様に Fig. 3 に示した $\bar{u}_0$ の関係を (4), (10) および (11) 式における u_0 に適用し、さらに (10) および (11) 式における n および λ として、それぞれ $\xi \leq 2\alpha^2$ に対して n および λ , $\xi > 2\alpha^2$ に対して n_1 および λ_1 を用いれば、 $\xi=0$ において $\zeta=0$ という境界条件をもつ、 $\xi \leq 2\alpha^2$ に対する (4) 式の解は

$$\zeta (UD/\nu)^{2n/(3n+1)} = \{ \lambda (2n+1)(3n+1)/n \}^{(n+1)/(3n+1)} \xi^{(n+1)/(3n+1)}, \dots\dots\dots (12)$$

また、 $\xi = 2\alpha^2$ において ζ の値が (12) 式に一致するという条件を満足する $\xi > 2\alpha^2$ に対する解はつぎのようになる。

$$\zeta (UD/\nu)^{2n_1/(3n_1+1)} = (2)^{(n_1+1)/(3n_1+1)} (2\alpha^2)^{-n_1/(3n_1+1)} \{ \lambda_1 (2n_1+1)(3n_1+1)/(4n_1+1) \}^{(n_1+1)/(3n_1+1)}$$

$$\xi^{-1/2n_1} \{ \xi^{(4n_1+1)/2n_1} + C \}^{(n_1+1)/(3n_1+1)},$$

$$C = \{ (4n_1+1)/2\lambda_1(2n_1+1)(3n_1+1) \} \{ \lambda(2n+1)(3n+1)/n \}^{(n+1)(3n_1+1)/(n_1+1)(3n+1)}$$

$$(2\alpha^2)^{\{ (n+1)(3n_1+1)/(n_1+1)(3n+1) + (2n+1)/2n_1 \}} (UD/\nu)^{2(n-n_1)/(n+1)(n_1+1)} - (2\alpha^2)^{(4n_1+1)/2n_1}.$$

.....(13)

一方、摩擦速度はつぎのようにあらわされる。

$\xi \leq 2\alpha^2$ に対して、

$$(u^*/U)^2 (UD/\nu)^{2n/(3n+1)} = \lambda \{ \lambda(2n+1)(3n+1)/n \}^{-2n/(3n+1)} \xi^{-2n/(3n+1)}, \quad \text{.....(14)}$$

および $\xi > 2\alpha^2$ に対して、

$$(u^*/U)^2 (UD/\nu)^{2n_1/(3n_1+1)} = (2)\lambda^{-2n_1/(3n_1+1)} \lambda_1 \{ \lambda_1(2n_1+1)(3n_1+1)/(4n_1+1) \}^{-2n_1/(3n_1+1)}$$

$$(2\alpha^2)^{(2n_1+1)/(3n_1+1)} \{ \xi^{(4n_1+1)/2n_1} + C \}^{-2n_1/(3n_1+1)} \quad \text{.....(15)}$$

この場合、摩擦速度を (14) および (15) 式によつて求めると、 n および λ がそれぞれ n_1 および λ_1 に等しくない限り、 $\xi = 2\alpha^2$ において不連続となるが、実際は $\xi = 2\alpha^2$ の近くにおいて流れの性質が漸変することから、このような摩擦速度の不連続は生じないはずである。

以上述べた理論的考察から、十分大きい ξ に対して、境界層の厚さおよび摩擦速度がそれぞれ層流境界層の場合 $\xi^{3/4}$ および $\xi^{-5/8}$ に、また乱流境界層の場合 $\xi^{(2n_1+1)/(3n_1+1)}$ および $\xi^{-(4n_1+1)/2(3n_1+1)}$ に比例することが結論される。

(2) 水門から噴出する wall jet に関する実験

前節の理論的結果を検討するために、Fig. 2 に示す水槽を用い高さが 0.56 cm および 1.08 cm の水門

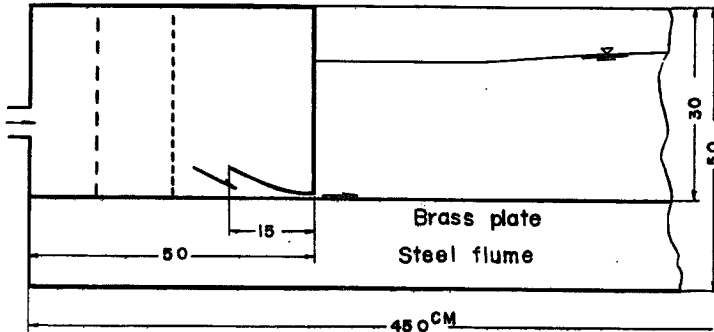
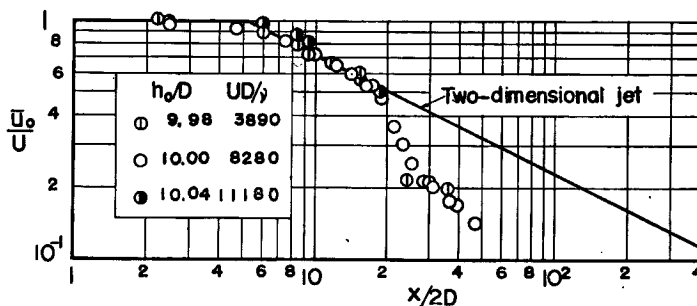
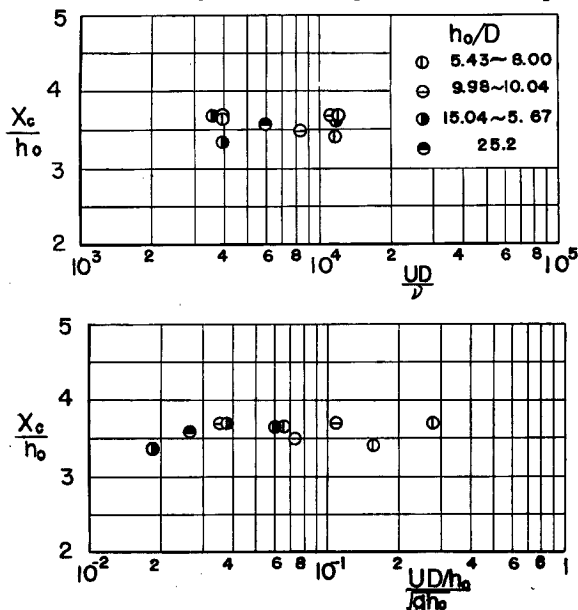
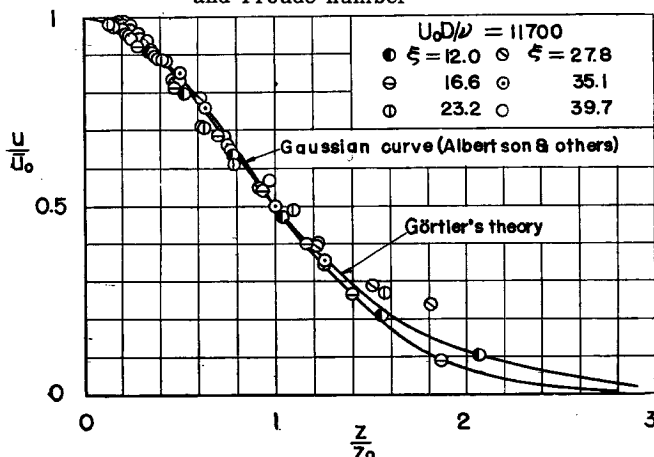


Fig. 2 Experimental apparatus

の口から噴出する wall jet における境界層の発達の実験を行なった。流速分布は外径 0.070 cm および 0.200 cm のピトー管を用いて測定した。

(i) Wall jet の拡散：Fig. 3 は wall jet における $\bar{u}_0/U$ と $x/2D$ との関係の一例であつて、実線は自由噴流についての Albertson ら⁷⁾ の結果を示す。この場合、噴流の仮定の最大流速 $\bar{u}_0$ の推定はつぎのようである。

自由噴流の流速分布は Albertson らによれば Gauss 分布によつて近似されるから、 $\log \bar{u}$ と $(x/x)^2$ との関係は直線となる。従つて、その直線を $x/x=0$ までのばし、 $x/x=0$ における $\bar{u}$ の値を推定すれば、 $\bar{u}_0$ が求められる。さらに、Fig. 3 から自由噴流についての結果の適用限界が存在することがわかる。い

Fig. 3 An example of relationships between $\bar{u}_0/U$ and $x/2D$ Fig. 4 Variations in x_c/h_0 with Reynolds number and Froude numberFig. 5 An example of velocity profiles in main flow (z_0 : value of z corresponding to $u = \bar{u}_0/2$)

ま、この適用限界までの距離 x_c を下流水深 h_0 との比であらわし、水門における Reynolds 数および下流における Froude 数との関係で示したものが Fig. 4 である。この結果によれば、実験の範囲内においては、 x_c/h_0 はほとんど一定であることがわかる。

Fig. 5 は主流における流速分布を自由噴流に関する Görtler⁶⁾ の理論曲線および Gauss 分布と比較した一例である。さらに、噴流の拡散する巾について検討した結果によれば、 $\xi < \xi_c (=x_c/D)$ ではその巾は距離とともにほぼ直線的に変化するが、その勾配は自由噴流の場合に較べてかなり小さく、混合距離を $l = cx$ とあらわした場合、 $c = 0.00858$ 程度であることがわかった。

(ii) 境界層の発達: Fig. 6 は境界

層内における流速分布の数例である。図中の実線は (10) 式において $n=1/12$ の場合であるが、 $\xi \leq 2a^2$ に対する同様の結果によれば、 $n \approx 1/7$ すなわち Blasius の法則が成立するようである。一方、壁面のごく近傍においては、対数法則が成立することが明らかにされた。

Fig. 7 は境界層の厚さに関する Reynolds 数による局所的摩擦係数の変化を示したものである。図に示した大部分の実験結果は、測定された流速分布

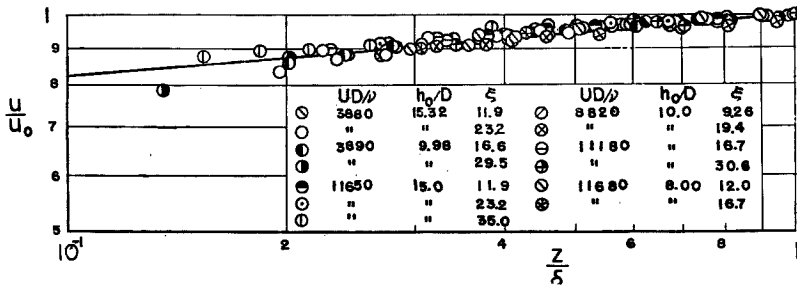


Fig. 6 Velocity profiles in boundary layer

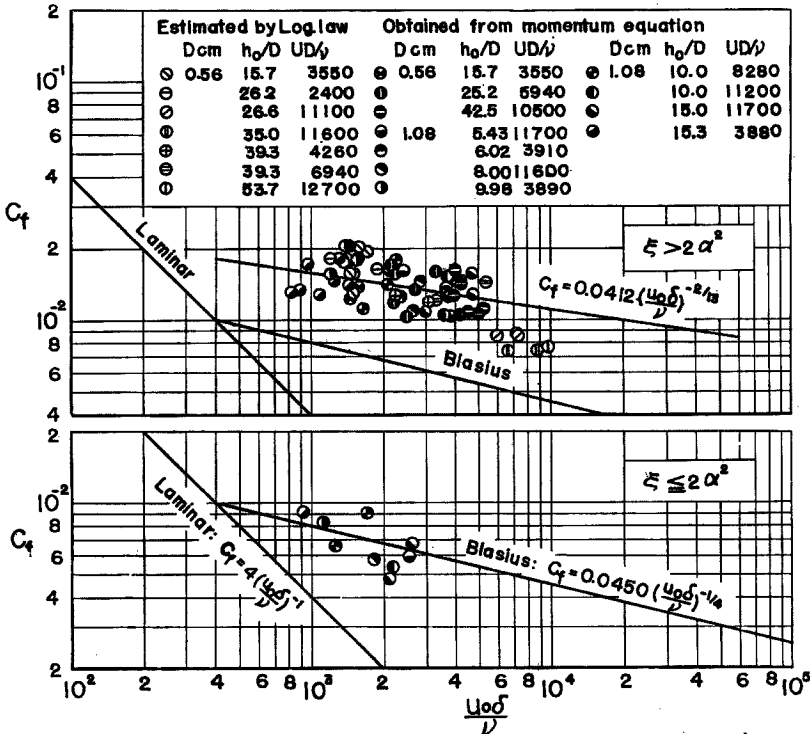


Fig. 7 Variations in local skin friction coefficients with Reynolds number

から (4) 式にもとづいてえられたものであり、また若干の結果は流速分布に関する対数法則を適用して推定したものである。後者の場合には境界層の厚さの $1/10$ 以下の流速分布を測定する必要があるので、外径 0.070 cm のピトー管を用いた。この結果によれば、 $\xi \leq 2\alpha^2$ に対しては Blasius の法則が適用されるようであるが、 $\xi > 2\alpha^2$ に対する摩擦係数は Blasius の法則よりもかなり大きいことがわかる。噴流の拡散の性質は $\xi \leq 2\alpha^2$ および $\xi > 2\alpha^2$ の領域においてそれぞれ本質的に相違することは明らかであるが、どうして $\xi > 2\alpha^2$ における結果が Blasius の法則からかなりはなれるかということは、(2) 式の右辺第 2 項によってあらわされる速度変動にもとづく効果がこの事実を説明するほど大きくないことから、説明することができない。また大きい Reynolds 数の領域において、運動量方程式にもとづいてえられた C_f の値と対数法則から推定されたそれとが、あまり一致しないこともまだ説明できない。従つて、これらの点についての本質的な解明のためには、壁面に沿う摩擦速度を直接測定する必要があるわけである。しかしながら、現在の

ところでは, Fig. 7 に示した結果を実用上の計算に用いるならば, wall jet における境界層の発達を説明することができよう。このことから, $n=1/12$ を用い, (11) 式にもとづいて C_f と $u_0\delta/\nu$ との関係を Fig. 7 に示したように, 直線によつてあらわすことにする。

Fig. 8 は境界層の発達に関する実験結果と理論計算とを比較した二, 三の例を示したものである。著者

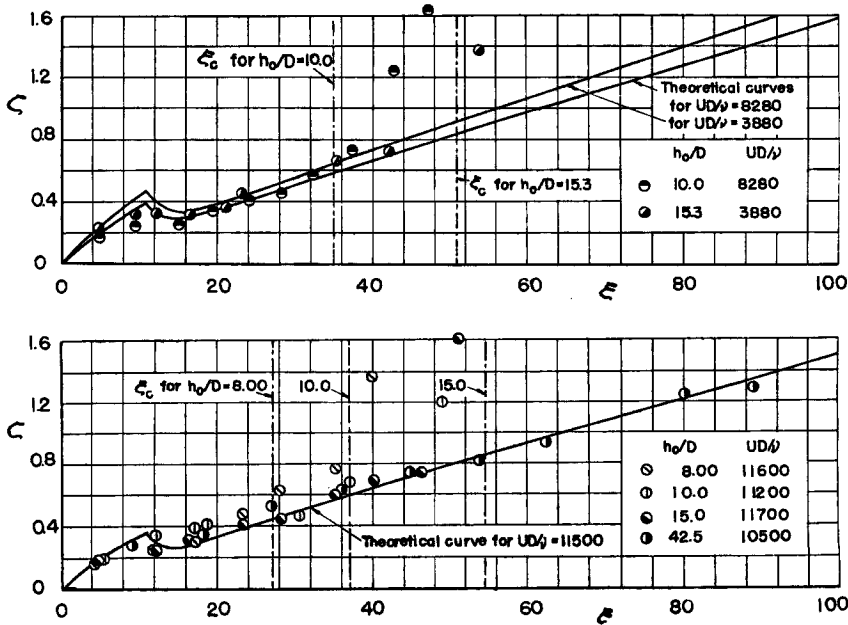


Fig. 8 Some examples of boundary layer growth

らの実験結果はすべて乱流境界層であることを考えて, その抵抗法則として, $\xi \leq 2\alpha^2$ に対しては Blasius の法則を, また $\xi > 2\alpha^2$ に対しては Fig. 7 に直線で示した関係を, 境界層の発達についての計算に適用することにした。図に示されている $\xi_0 = x_0/D$ の値は, Fig. 4 から h_0/D に対応して求めたものであるが, 実験結果はこの点の近くで, 理論曲線からはなれていくことがわかる。このことから, この x_0 が理論結果

の適用限界と考えることができよう。

さらに, Fig. 9 は $\xi < \xi_0$ に対してえられた摩擦速度の分布に対する実験結果と理論計算との比較の二, 三の例であるが, 両者は $\xi = 2\alpha^2$ 付近を除いてかなりよく一致していることがわかる。また $\xi = 2\alpha^2$ の付近においては, 抵抗法則が Blasius の法則から漸次他の抵抗法則に変化していくことがわかるであろう。これらの結果から, 摩擦速度

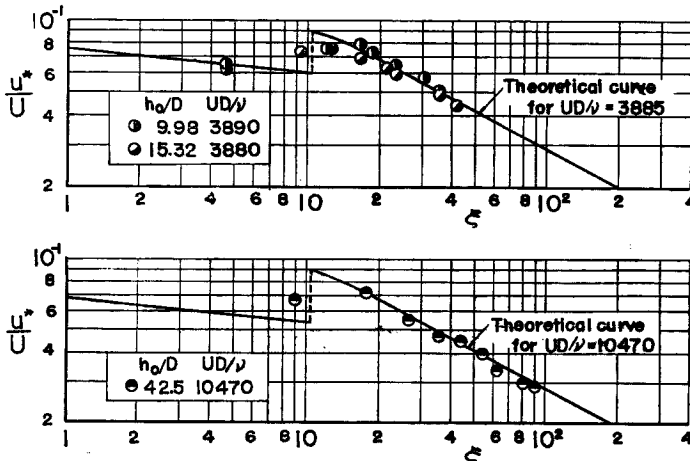


Fig. 9 Some examples of shear velocity distributions

が水門からの距離とともに、とくに $\xi > 2a^2$ の領域において、すみやかに減少していくことが結論される。また、Fig. 3 の結果を参照すれば、摩擦速度は $\xi > \xi_0$ においては、さらに急速に減少するであろうことが考えられる。

3. 水門から噴出する wall jet による洗掘限界の理論的考察

前章において、水門から噴出する wall jet における境界層の発達を実験結果にもとづいて理論的に解析したが、この成果を wall jet による洗掘限界の考察に応用し、その機構を水理学的に究明してみよう。本論文では、水門の水たたきの下流部において砂礫が移動限界にあるときを洗掘限界と定義し、後述する考察においては、水たたきの面を滑面と考えてその限界を論ずる。

砂礫の移動限界の問題はもつぱら限界掃流力として、古くから取り扱われてきたが、その水理学的な機構の解析は Shields¹⁰⁾ および White¹¹⁾ らにはじまり、栗原¹²⁾ の研究をへて、著者ら^{13), 14), 15)} の研究に及んでいる。また最近 Yalin¹⁶⁾ は流砂の研究に関連して若干の考察を進めたが、著者らの研究に較べると、次元解析の域を脱していないといえよう。このような理由から、本章においては限界掃流力に関する岩垣の研究¹³⁾ と同じ方法で、上記の限界を考察する。

水門から噴出する噴流は Fig. 3 に示したように、その最大流速は $\xi \leq 2a^2$ までは一定となり、いわゆる potential flow の領域がのこるものと考えられている。ここでは、このような領域における砂礫の移動限界をいままでに明らかにされた結果にもとづいて考察してみよう。

(1) 平衡条件

Fig. 10 に示すように、水門の下流部に長さ L の水たたきを設けた場合、その下流側が洗掘限界にあるための条件、すなわち水たたきの先端にある砂礫の移動限界を取り扱う。その力学的模型として、Fig. 11 に示すような粗面上にのっている 1 粒の球状の砂礫（斜線のもの）を考え、それが動きはじめるための条件を考察する。砂礫に作用する力と

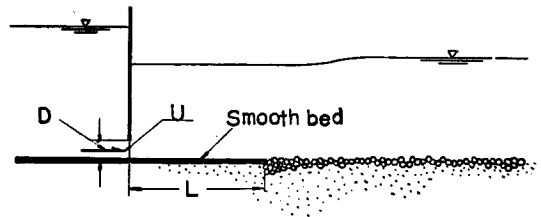


Fig. 10 Definition sketch of apron and flow downstream of submerged outlet

しては、鉛直方向の圧力勾配および流体抵抗による揚力 R_L 、流れの方向の流体抵抗と圧力勾配による抵抗の和 R_T 、および砂礫に働く重力 W のみを考慮した。Fig. 11 に示した力関係を Fig. 12 のように模型

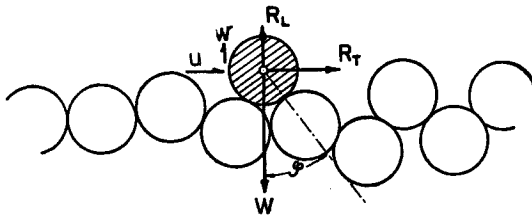


Fig. 11 Forces acting on a spherical sand gravel

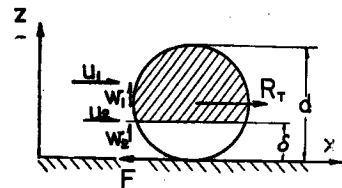


Fig. 12 Schematic diagram of force relation

化してあらわせば、砂礫の移動限界の条件式はつぎのようになる。

$$R_T = F, \dots\dots\dots (16)$$

ただし、摩擦力 F は

$$F = \{(\sigma - \rho)g(\pi/6)d^3 - R_L\} \tan \varphi \dots\dots\dots (17)$$

とあらわされる。ここに、 σ および ρ ：砂礫および水の密度、 d ：砂礫の大きさ、 g ：重力の加速度、 φ ：砂礫の静止摩擦角、である。

いま Fig. 12 のように厚さ δ の境界層を考え、 R_T を主流の部分に働らく抵抗 R_{Tm} と境界層の部分に働らく抵抗 R_{Tb} とに分けて、

$$R_T = R_{Tm} + R_{Tb} \dots\dots\dots (18)$$

とあらわす。Fig. 12 において、主流の部分(斜線の部分)の砂礫の断面積を $\beta_s(\pi/4)d^2$ 、境界層の部分の断面積を $(1-\beta_s)(\pi/4)d^2$ とし、(18)式右辺の各項をそれぞれつぎのようにあらわす。

$$R_{Tm} = \frac{\rho}{2} C_{D1} u_1^2 \beta_s \frac{\pi}{4} d^2 - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_a d \beta_s \frac{\pi}{4} d^2, \dots\dots\dots (19)$$

$$R_{Tb} = \frac{\rho}{2} C_{D2} u_2^2 (1-\beta_s) \frac{\pi}{4} d^2 - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_\delta d (1-\beta_s) \frac{\pi}{4} d^2, \dots\dots\dots (20)$$

ここに、 u_1 および u_2 はそれぞれ主流および境界層における流体抵抗を求めるときの代表流速であり、 C_{D1} および C_{D2} はそれぞれ u_1 および u_2 に対応した抵抗係数である。また(19)および(20)式の右辺第2項は圧力勾配 $\partial p/\partial x$ による抵抗をあらわす。

鉛直方向の流体抵抗と圧力勾配による揚力 R_L も同様に、

$$R_L = R_{Lm} + R_{Lb} \dots\dots\dots (21)$$

とし、この右辺の各項がそれぞれつぎのようにあらわされるものとする。

$$R_{Lm} = \frac{\rho}{2} C_{Dw1} w_1^2 A_1 \frac{\pi}{4} d^2 - \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_a d A_1 \frac{\pi}{4} d^2, \dots\dots\dots (22)$$

$$R_{Lb} = \frac{\rho}{2} C_{Dw2} w_2^2 A_2 \frac{\pi}{4} d^2 - \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_\delta d A_2 \frac{\pi}{4} d^2, \dots\dots\dots (23)$$

ここに、 $\delta \leq d/2$:

$$A_1 = \left(1 - \frac{\delta}{d}\right), \quad A_2 = 4 \left(\frac{\delta}{d}\right)^2 \left(1 - \frac{\delta}{d}\right), \dots\dots\dots (24)$$

$\delta \geq d/2$:

$$A_1 = 4 \left(\frac{\delta}{d}\right) \left(1 - \frac{\delta}{d}\right), \quad A_2 = \frac{\delta}{d}. \dots\dots\dots (25)$$

これらの諸式によつて流体抵抗を求めるためには、層流および乱流のすべての境界層の解析および両者における乱れの状態を知る必要があるわけであるが、境界層の層流から乱流への遷移 Reynolds 数が明確でないことと、その付近における流速分布や抵抗法則が明らかでないことから、完全に発達した層流境界層および指数法則にもとづく乱流境界層を仮定し、乱れの大きさを適当に評価して、それぞれの場合について理論的考察を進め、実験結果の整理および説明に役立てたい。

$\xi \leq 2\alpha^2$ における噴流の拡散は前述したように potential flow の領域がのこり、それが $\xi = 2\alpha^2$ 付近まで直線的に減少することが明らかにされているが、このような領域における流速分布は明確ではないようである⁸⁾。このことから本節における取扱いにおいては、主流における流速分布は一様であると仮定し、その中における乱れの大きさは、二、三の実験結果にもとづいて評価することにする。この仮定のもとでは、(19)式右辺第2項および(22)式は省略されることになるが、乱れの影響を若干考慮するという意味から、時間的平均流速による流体抵抗を見積るときに変動速度を付加して考えることにする。

(2) 層流境界層を仮定した場合

境界層内では速度変動はないものと考え、流速分布として(5)式を用い、さらに境界層の発達および摩擦速度の分布として、それぞれ(6)および(8)式を適用する。

(i) $\delta \geq d$ の場合：砂礫が完全に境界層の中に入ってしまう場合であつて、 $R_{Tm} = 0$ 、 $\partial p/\partial x = 0$ および $\beta_s = 0$ となる。従つて、 R_T はその代表流速として $z = d$ における(5)式の値を用いるとつぎのようになる。

$$R_T = \frac{\rho}{8} \pi d^2 u^{*2} C_{D2} \left(\frac{U}{u^*} \right)^2 \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \left\{ 2 - \left(\frac{d}{\delta} \right) \right\}^2, \quad (26)$$

ここに、 d/δ は (6) および (8) 式より

$$\frac{d}{\delta} = \frac{1}{2} \left(\frac{u^*}{U} \right) \left(\frac{u^* d}{\nu} \right), \quad (27)$$

であり、また C_{D2} としては球の抵抗係数に関する実験値を用いると、Reynolds 数の関数となる。さらに Reynolds 数 $u^* d/\nu$ はつぎのようにあらわされる。

$$R_{e2} = \frac{1}{2} \left(\frac{u^* d}{\nu} \right)^2 \left\{ 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{u^*}{U} \right) \left(\frac{u^* d}{\nu} \right) \right\}, \quad (28)$$

また鉛直方向の流速成分 w は連続の方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (29)$$

を $z=0$ で $w=0$ という条件のもとに、(5) 式を代入して積分することによって容易にえられる。その結果から $z=d$ における値 w_2 を求め、境界層内では $\partial p/\partial z=0$ であり、この領域において $\partial p/\partial x=0$ であることを考慮すれば、(23) 式に代入して次式がえられる。

$$R_L = \frac{\rho}{8} \pi d^2 u^{*2} C_{Dw2} \left(\frac{15}{2} \right)^2 \left(\frac{u^*}{U} \right)^6 \left(\frac{u^* d}{\nu} \right)^4 \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{u^*}{U} \right) \left(\frac{u^* d}{\nu} \right) \right\}^2, \quad (30)$$

ここに、 C_{Dw2} は Reynolds 数

$$R_{ew2} = \frac{15}{8} \left(\frac{u^*}{U} \right)^3 \left(\frac{u^* d}{\nu} \right)^3 \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{u^*}{U} \right) \left(\frac{u^* d}{\nu} \right) \right\}, \quad (31)$$

の関数である。

これらの諸式を平衡条件 (16) 式に代入して変形すれば、つぎの関係がえられる。

$$\frac{u_c^{*2}}{(\sigma/\rho - 1) g d \tan \varphi} = \frac{4}{3\phi_1}, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに,} \quad \phi_1 = & \frac{1}{4} C_{D2} \left(\frac{u_c^* d}{\nu} \right)^2 \left\{ 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{u_c^*}{U} \right) \left(\frac{u_c^* d}{\nu} \right) \right\}^2 \\ & + \left(\frac{15}{8} \right)^2 C_{Dw2} \left(\frac{u_c^*}{U} \right)^6 \left(\frac{u_c^* d}{\nu} \right)^4 \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{u_c^*}{U} \right) \left(\frac{u_c^* d}{\nu} \right) \right\}^2 \tan \varphi \end{aligned} \quad (33)$$

であり、その適用限界は $d/\delta \leq 1$ であることはいうまでもない。

(ii) $\delta \leq d$ の場合：この場合には砂礫は一部境界層外へ露出する。代表流速 u_1 および u_2 はいずれも主流の速度 U をとることとなるが、主流における速度変動を考慮するために、Fig. 13 に示す Henry⁷⁾ の実験結果を参照して、変動速度の 2 乗平均が時間的平均流速に比例すると考え $\sqrt{u'^2} = mU$ とし、代表流速が $u_1 = (1+m)U$ であらわされるものとすれば、 R_T はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} R_T = & \frac{\rho}{8} \pi d^2 u^{*2} C_{D1} \left\{ (1+m)^2 \beta_s \left(\frac{U}{u^*} \right)^2 \right. \\ & \left. + (1-\beta_s) \left(\frac{U}{u^*} \right)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (34)$$

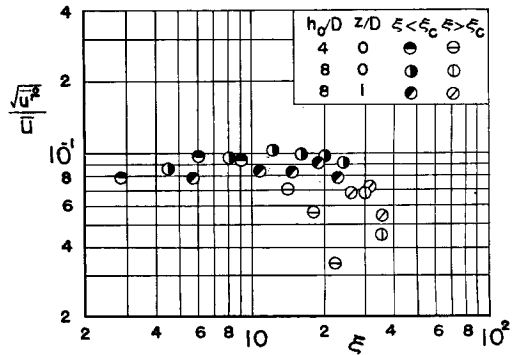


Fig. 13 Variations in turbulence intensity in wall jet issuing from submerged outlets with distance (after Henry, replotted by authors)

ここに, C_{D1} は Reynolds 数

$$Re_1 = \left(\frac{U}{u^*} \right) \left(\frac{u^* d}{\nu} \right) \dots \dots \dots (35)$$

の関数である。また $z=d$ における w は前述した仮定にもとづき主流から求めれば存在しないが、境界層の方からは一応存在する(大きさは非常に小さい)ので、それを考慮することにすれば、 R_L はつぎのようにあらわされる。

$$R_L = \frac{\rho}{8} \pi d^2 u^{*2} C_{Dw2} \left(\frac{u^*}{U} \right)^2 \left(\frac{5}{2} \right)^2 A_2, \dots \dots \dots (36)$$

ここに, C_{Dw2} は Reynolds 数

$$Re_{w2} = \frac{5}{2} \left(\frac{u^*}{U} \right) \left(\frac{u^* d}{\nu} \right) \dots \dots \dots (37)$$

の関数である。

これらの結果を(16)式に代入して, $d/\delta \geq 1$ の場合のつぎの関係がえられる。

$$\frac{u_e^{*2}}{(\sigma/\rho - 1)gd \tan \varphi} = \frac{4}{3\phi_2}, \dots \dots \dots (38)$$

$$\text{ここに, } \phi_2 = C_{D1} \left(\frac{U}{u_e^*} \right)^2 \{ (1+m)^2 \beta_s + (1-\beta_s) \} + \left(\frac{5}{2} \right)^2 C_{Dw2} A_2 \left(\frac{u_e^*}{U} \right)^2 \tan \varphi. \dots \dots \dots (39)$$

(3) 乱流境界層を仮定した場合

境界層内では Blasius の 1/7 乗法則が成立するので, 流速分布は(10)式において $n=1/7$ とおけばよいが, 以下の計算では一般の場合について考察する。乱流境界層内においては乱れを考慮する必要があるので^{17),18),19)}, 乱れの取扱いは岩垣の研究にもとづいて, これに境界層の乱れの特性を加味して計算を進める。

(i) $\delta \geq d$ の場合: この場合は前述したように砂礫は境界層内に完全に入つてしまい $\beta_s=0$ となる。いま(20)式の右辺第2項の $\partial p/\partial x$ について考えよう。 $\partial p/\partial x$ は時間的平均流速による圧力勾配と変動速度にもとづく圧力勾配との和であるが, 本節の領域では $U=\text{const}$ であることから, 層流境界層の場合と同様に前者は存在しなくなるけれども, 乱流境界層の場合は後者を考慮する必要がある。

変動速度にもとづく圧力勾配 $\partial p/\partial x$ を見積るにあたり, 粘性を省略し, Euler の運動方程式にもとづいて $-\partial p/\partial x$ を $\rho Du/Dt$ によつてあらわし, $u=\bar{u}+u'$ および $w=\bar{w}+w'$ において, Taylor と同様に統計的平均をとれば, つぎの関係がえられる。

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \sqrt{\bar{u}^2} \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \sqrt{\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2}} \right\} + \bar{u} \sqrt{\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2}} + \sqrt{\bar{w}^2} \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \sqrt{\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial z} \right)^2}} \right\} + \bar{w} \sqrt{\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial z} \right)^2}} \dots \dots \dots (40)$$

(40)式によつてあらわされる圧力勾配を, 最小渦の直径 λ_{xx} , λ_{zz} および λ_{xz} を導入して変形すれば,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \sqrt{\bar{u}^2} \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \sqrt{2} \frac{\sqrt{\bar{u}^2}}{\lambda_{xx}} \right\} + \sqrt{2} \bar{u} \frac{\sqrt{\bar{u}^2}}{\lambda_{xx}} + \sqrt{\bar{w}^2} \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \sqrt{2} \frac{\sqrt{\bar{u}^2}}{\lambda_{xz}} + \frac{1}{4\bar{u}^2} \left(\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial z} \right)^2 \right\} + \bar{w} \sqrt{2 \frac{\bar{u}^2}{\lambda_{xz}^2} + \frac{1}{4\bar{u}^2} \left(\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial z} \right)^2} \dots \dots \dots (41)$$

となる。この式をさらに計算するには, $\bar{u}$, $\bar{w}$, $\bar{u}^2$, $\bar{w}^2$, λ_{xx} , λ_{zz} および λ_{xz} などが境界層内でいかなる垂直分布をしているかを知らなければならない。まず $\bar{u}$ として(10)式によつてあらわされる値を用い, 層流境界層の場合と同様に(29)式から $\bar{w}$ を求めるとつぎのようになる。

$$\bar{w} = U \left(\frac{z}{\delta} \right)^{n d \delta} \frac{d\delta}{dx} \dots \dots \dots (42)$$

代表流速として, $\bar{u}$ および $\bar{w}$ のいずれに対しても $z=d$ の値を用いることにすれば, u_2 は(10)式において $z=d$ とした値になり, また w_2 は(42)式に(12)式の結果を代入し, (14)式を用いて変形すればつぎのようになる。

$$\frac{w_2}{U} = \frac{(n+1)(2n+1)}{n} (\lambda)^{-(n+1)/2} \left(\frac{u^* d}{U} \right)^n \left(\frac{u^* d}{\nu} \right)^n \dots (43)$$

つぎに変動速度 $\sqrt{u'^2}$ および $\sqrt{w'^2}$ については、Reichardt の実験結果に Spengos¹⁹⁾ の結果を加味して、

$$\sqrt{u'^2} \approx 2u^*, \quad \sqrt{w'^2} \approx u^* \dots (44)$$

を仮定する。また最小渦の直径の境界層内における分布が明らかでないので、 λ_{xx} , λ_{zz} および λ_{zx} の間に等方性乱流の理論が適用されるものとし、それらが混合距離 l に比例するものとすれば、次式のようになる。

$$\lambda_{xx} = \sqrt{2} al, \quad \lambda_{zz} = \lambda_{zx} = al, \dots (45)$$

ここに a は比例定数であつて、その大きさは確かでないが、岩垣の研究を参考にして定めれば、 $a=12.5$ 程度であろう。境界層内における混合距離 l の分布は、圧力勾配のない平板の境界層の場合に対して測定された Fig. 14 の結果¹⁹⁾ を適用することにする。

以上の結果を (41) 式に用いて $(\partial p / \partial x)_a$ を計算し、さらに $u_2 = \bar{u} + \sqrt{u'^2}$ とし流体力抵抗を計算すれば、 R_T はつぎのようにあらわされる。

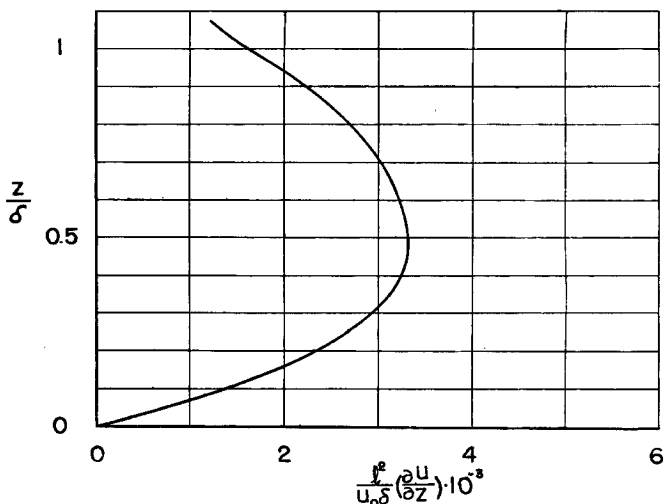


Fig. 14 Distribution of mixing length in boundary layer with zero pressure gradient (after Spengos)

$$\begin{aligned} R_T = & \frac{\rho}{8} \pi d^2 u^{*2} C_{D2} \left\{ (\lambda)^{-(n+1)/2} \left(\frac{u^* d}{\nu} \right)^n + 2 \right\}^2 + \frac{\rho}{4} \pi d^2 u^{*2} \left\{ \frac{d}{al_a} \left\{ 2(2 + \sqrt{2}) \right. \right. \right. \\ & + (\lambda)^{-(n+1)/2} \left(\frac{u^* d}{\nu} \right)^n \left(2 + n \frac{al_a}{d} \right) \left. \right\} - 2(n+1)(2n+1)(\lambda)^{-(n+1)/2} \left(\frac{u^*}{U} \right)^{2n+1} \left(\frac{u^* d}{\nu} \right)^{n+1} \\ & + 2\sqrt{2} \frac{(n+1)(2n+1)}{n} (\lambda)^{-(n+1)/2} \left(\frac{d}{al_a} \right) \left(\frac{u^*}{U} \right)^2 \left(\frac{u^* d}{\nu} \right)^n \left. \right\} \dots (46) \end{aligned}$$

ここに、 l_a は $z=d$ における l の値、 C_{D2} は Reynolds 数

$$Re_2 = (\lambda)^{-(n+1)/2} \left(\frac{u^* d}{\nu} \right)^{n+1} \dots (47)$$

の関数である。

つぎに (23) 式の右辺第 2 項における $\partial p / \partial z$ について考えよう。上述の場合と同様に統計的平均をとれば、

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \sqrt{u'^2} \left\{ \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \sqrt{\left(\frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2} \right\} + \bar{u} \sqrt{\left(\frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2} + \sqrt{w'^2} \left\{ \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \sqrt{\left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2} \right\} + \bar{w} \sqrt{\left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2} \dots (48)$$

となるが、また (41) 式と同様に変形すればつぎのようにあらわされる。

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \sqrt{u'^2} \left\{ \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \sqrt{2} \frac{\sqrt{w'^2}}{\lambda_{zx}} \right\} + \sqrt{2} \bar{u} \frac{\sqrt{w'^2}}{\lambda_{zx}} + \sqrt{w'^2} \left\{ \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \sqrt{2} \frac{\sqrt{w'^2}}{\lambda_{zz}} \right\} + \sqrt{2} \bar{w} \frac{\sqrt{w'^2}}{\lambda_{zz}} \dots (49)$$

上式中の λ_{ss} についても等方性乱流の理論を適用し, R_T の場合と同様に $(\partial p / \partial x)_s$ を求め, また $w_2 = \bar{w} + \sqrt{w'^2}$ として流体抵抗を見積ることにすれば, R_L はつぎのようにあらわされる.

$$\begin{aligned} R_L = & \frac{\rho}{8} \pi d^2 u^{*2} C_{Dw2} \left\{ \frac{(n+1)(2n+1)}{n} (\lambda)^{-(n+1)/2} \left(\frac{u^*}{U} \right)^2 \left(\frac{u^* d}{\nu} \right)^n + 1 \right\}^2 \\ & + \frac{\rho}{4} \pi d^2 u^{*2} \left[\frac{d}{al_d} \left\{ (1+2\sqrt{2}) + (\lambda)^{-(n+1)/2} \left(\frac{u^* d}{\nu} \right)^n \left\{ \sqrt{2} + \frac{(n+1)(2n+1)}{n} \left(\frac{u^*}{U} \right)^2 \right\} \right\} \right. \\ & + (n+1)(2n+1)(\lambda)^{-(n+1)/2} \left(\frac{u^*}{U} \right)^2 \left(\frac{u^* d}{\nu} \right)^n \left\{ 1 - \frac{(n+1)(2n+1)}{n} (\lambda)^{-(n+1)/2n} \left(\frac{u^*}{U} \right)^{(3n+1)/n} \left(\frac{u^* d}{\nu} \right) \right. \\ & \left. \left. - \frac{4(2n+1)}{n} (\lambda)^{-(n+1)/2n} \left(\frac{u^*}{U} \right)^{(3n+1)/n} \left(\frac{u^* d}{\nu} \right) \right\} \right], \dots \dots \dots (50) \end{aligned}$$

ここに, C_{Dw2} は Reynolds 数

$$R_{ew2} = \frac{(n+1)(2n+1)}{n} (\lambda)^{-(n+1)/2} \left(\frac{u^*}{U} \right)^2 \left(\frac{u^* d}{\nu} \right)^{n+1} \dots \dots \dots (51)$$

の関数である.

これら R_T および R_L を (16) および (17) 式に代入して変形すれば, つぎの関係がえられる.

$$\frac{u_e^{*2}}{(\sigma/\rho-1)gd \tan \varphi} = \frac{4}{3\phi_s}, \dots \dots \dots (52)$$

ここに,

$$\begin{aligned} \phi_s = & C_{D2} \left\{ (\lambda)^{-(n+1)/2} \left(\frac{u_e^* d}{\nu} \right)^n + 2 \right\}^2 + 2 \left[\frac{d}{al_d} \left\{ 2(2+\sqrt{2}) + (\lambda)^{-(n+1)/2} \left(\frac{u_e^* d}{\nu} \right)^n \left(2 + n \frac{al_d}{d} \right) \right\} \right. \\ & - 2(n+1)(2n+1)(\lambda)^{-(n+1)/2} \left(\frac{u_e^*}{U} \right)^2 \left(\frac{u_e^* d}{\nu} \right)^{n+1} + 2\sqrt{2} \frac{(n+1)(2n+1)}{n} \\ & \cdot (\lambda)^{-(n+1)/2} \left(\frac{d}{al_d} \right) \left(\frac{u_e^*}{U} \right)^2 \left(\frac{u_e^* d}{\nu} \right)^n \left. + C_{Dw2} \left\{ \frac{(n+1)(2n+1)}{n} (\lambda)^{-(n+1)/2} \left(\frac{u_e^*}{U} \right)^2 \left(\frac{u_e^* d}{\nu} \right)^n + 1 \right\}^2 \tan \varphi \right. \\ & + 2 \left[\frac{d}{al_d} \left\{ (1+2\sqrt{2}) + (\lambda)^{-(n+1)/2} \left(\frac{u_e^* d}{\nu} \right)^n \left\{ \sqrt{2} + \frac{(n+1)(2n+1)}{n} \left(\frac{u_e^*}{U} \right)^2 \right\} \right\} \right. \\ & + (n+1)(2n+1)(\lambda)^{-(n+1)/2} \left(\frac{u_e^*}{U} \right)^2 \left(\frac{u_e^* d}{\nu} \right)^n \left\{ 1 - \frac{(n+1)(2n+1)}{n} (\lambda)^{-(n+1)/2n} \left(\frac{u_e^*}{U} \right)^{(3n+1)/n} \left(\frac{u_e^* d}{\nu} \right) \right. \\ & \left. \left. - \frac{4(2n+1)}{n} (\lambda)^{-(n+1)/2n} \left(\frac{u_e^*}{U} \right)^{(3n+1)/n} \left(\frac{u_e^* d}{\nu} \right) \right\} \right] \tan \varphi \dots \dots \dots (53) \end{aligned}$$

であり, その適用範囲は $(\lambda)^{-(n+1)/2n} (u_e^*/U)^{1/n} (u_e^* d/\nu) \leq 1$ である.

(ii) $\delta \leq d$ の場合: 砂礫が一部境界層外へ露出する場合であるから, 代表流速および主流における速度変動の考慮は層流境界層の場合と同く同様にするものとし, さらに境界層内でうける圧力勾配による抵抗は, (46) 式第2項に相当した $z=\delta$ の値を用いることにすれば, R_T はつぎのようにあらわされる.

$$\begin{aligned} R_T = & \frac{\rho}{8} \pi d^2 u^{*2} C_{D1} \left\{ (1+m)^2 \beta_s \left(\frac{U}{u^*} \right)^2 + (1-\beta_s) \left(\frac{U}{u^*} \right)^2 \right\} \\ & + \frac{\rho}{4} \pi d^2 u^{*2} (1-\beta_s) \left[\frac{d}{al_\delta} \left\{ 2(2+\sqrt{2}) + \left(\frac{U}{u^*} \right) \left(2 + n \frac{al_\delta}{\delta} \right) + 2\sqrt{2} \frac{(n+1)(2n+1)}{n} \left(\frac{u^*}{U} \right) \right\} \right. \\ & \left. - 2(n+1)(2n+1) \left(\frac{u^*}{U} \right) \right], \dots \dots \dots (54) \end{aligned}$$

ここに, C_{D1} は (35) 式であらわされる Reynolds 数の関係であり, l_δ は $z=\delta$ における l の値を示す.

同様に鉛直方向の揚力 R_L はつぎのようにあらわされる.

$$R_L = \frac{\rho}{8} \pi d^2 u^{*2} A_2 C_{Dw2} \left\{ \frac{(n+1)(2n+1)}{n} \left(\frac{u^*}{U} \right) + 1 \right\}^2 + \frac{\rho}{4} \pi d^2 u^{*2} A_2 \left[\frac{d}{al_\delta} \left\{ 1 + \sqrt{2} \left(2 + \frac{U}{u^*} \right) \right\} \right.$$

$$+ \frac{(n+1)(2n+1)}{n} \left(\frac{u^*}{U} \right)^2 \} - \frac{2(n+1)(n+3)}{n} \frac{(2n+1)^2}{U} \left(\frac{u^*}{U} \right)^3 + (n+1)(2n+1) \left(\frac{u^*}{U} \right) \}, \dots\dots\dots(55)$$

ここに、 C_{Dw2} は Reynolds 数

$$Re_{w2} = \frac{(n+1)(2n+1)}{n} \left(\frac{u^*}{U} \right) \left(\frac{u^* d}{\nu} \right) \dots\dots\dots(56)$$

の関数である。

これらの関係を砂礫の平衡条件式に代入して、すでに述べた場合と同様に次式がえられる。

$$\frac{u_c^{*2}}{(\sigma/\rho-1)gd \tan \varphi} = \frac{4}{3\phi_i}, \dots\dots\dots(57)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \phi_i = & C_{Di} \left(\frac{U}{u_c^*} \right)^2 \{ (1+m)^2 \beta_s + (1-\beta_s) \} + 2(1-\beta) \left\{ \frac{d}{al\delta} \{ 2(2+\sqrt{2}) + \left(\frac{U}{u_c^*} \right) (2+n\frac{al\delta}{\delta}) \} \right. \\ & + 2\sqrt{2} \frac{(n+1)(2n+1)}{n} \left(\frac{u_c^*}{U} \right) \} - 2(n+1)(2n+1) \left(\frac{u_c^*}{U} \right) \} + A_2 \{ C_{Dw2} \{ \frac{(n+1)(2n+1)}{n} \left(\frac{u_c^*}{U} \right) + 1 \}^2 \\ & + 2 \left(\frac{d}{al\delta} \right) \{ 1 + \sqrt{2} \} 2 + \frac{U}{u_c^*} \} + \frac{(n+1)(2n+1)}{n} \left(\frac{u_c^*}{U} \right)^2 \} \\ & - \frac{2(n+1)(n+3)(2n+1)^2}{n} \left(\frac{u_c^*}{U} \right)^3 + (n+1)(2n+1) \left(\frac{u_c^*}{U} \right) \} \tan \varphi \dots\dots\dots(58) \end{aligned}$$

である。

以上要するに、 $\xi \leq 2\alpha^2$ における洗掘限界は、層流境界層を仮定した場合および乱流境界層を仮定した場合のいずれにおいても、つぎの関係であらわされることがわかる。

$$\frac{u_c^{*2}}{(\sigma/\rho-1)gd \tan \varphi} = \frac{4}{3\phi_i}, \quad (i=1, 2, 3, 4) \dots\dots\dots(59)$$

ここに、

$$\phi_i = \phi_i \{ u_c^* d / \nu, u_c^* / U \} \dots\dots\dots(60)$$

である。これらの諸式を計算するにあたり、 $C_f = 2(u^*/U)^2$ であることを考慮すれば、 u_c^*/U はあまり変化しないことが Fig. 7 から明らかなので、 u_c^*/U をパラメーターとして $u_c^{*2}/(\sigma/\rho-1)gd \tan \varphi$ を $u_c^* d / \nu$ の関数としてあらわすことにする。Fig. 7 の結果を改めて C_f と UL/ν との関係で示したものが Fig. 15 である。この結果から、いま $UL/\nu = 10^3 \sim 10^6$ を対象として洗掘限界を論ずることにすれば、

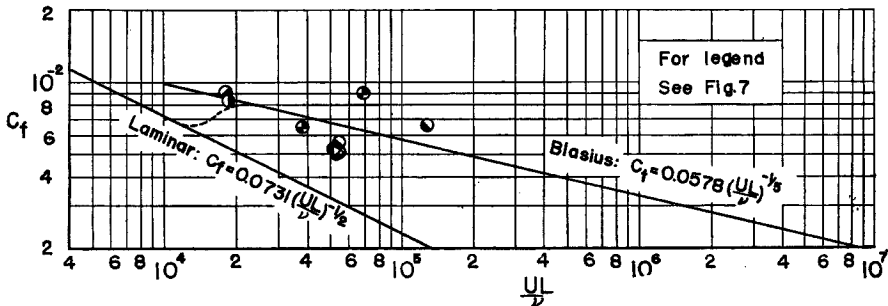


Fig. 15 Relation between C_f and UL/ν in region of $\xi \leq 2\alpha^2$

u_c^*/U は層流境界層の場合 0.1~0.06, 乱流境界層の場合 0.06~0.04 の範囲について、(59)および(60)式を計算すればよいことになる。

Fig. 16 はこのような範囲について、Fig. 13 に示した結果を参考にし、 $m=0.1$ とおいた場合の計算結果を示したものである。図中記号 l および t はそれぞれ層流および乱流境界層を仮定した場合の理論曲

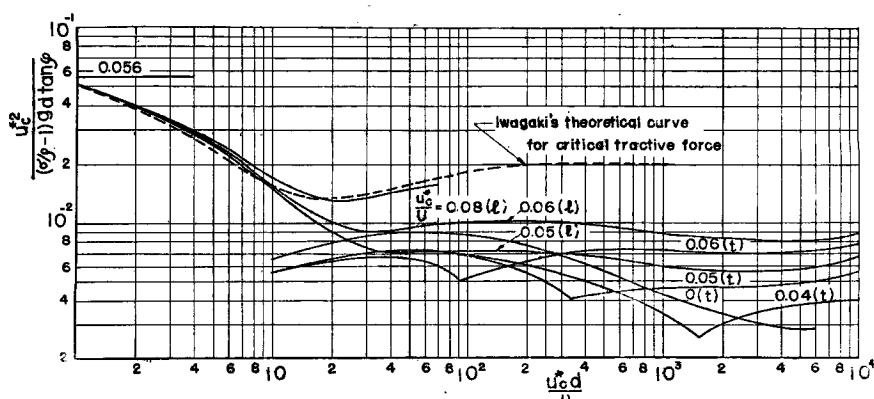


Fig. 16 Dimensionless expression of criterion for scour obtained by the theory ($\xi \leq 2a^2$)

線をあらわし、また比較のために限界掃流力に関する岩垣の理論曲線を示した。

なお、層流境界層を仮定した場合 u_c^*d/ν の値が1より小さくなると、 u_c^*/U の値にかかわらず、 $u_c^{*2}/(\sigma/\rho - 1)gd \tan \phi$ の値が0.056に近づき、 C_D に対して Stokes の法則が適用されるようになると一定値0.056となる。

4. 洗掘限界に関する実験

前章において述べた洗掘限界に関する理論的考察をもとにして、実際の現象を考察するために、つぎに述べるような実験を行なった。

(1) 実験装置および実験方法

(i) 実験水路：境界層の発達に関する実験を行なった Fig. 2 の水路において、水門の下流側に滑面の水たたきをつくり、その下流に砂礫をしいて洗掘限界の実験を行なった。流量の調節は水路に連結する円管にとりつけられたバルブで行ない、また噴流の流速はピトー管によつて測定した。

(ii) 砂礫の特性：実験に使用した砂礫の特性をとりまとめて、Table 1 に示した。粒径はなるべく一

Table 1 Properties of used sands and gravels

grain diameter d cm	specific gravity σ/ρ	$\tan \phi$	number of sands and gravels exposed per unit area cm^{-2}
0.0450	2.479	0.790	191
0.0900	2.507	0.984	64.9
0.185	2.512	1.045	23.7
0.375	2.527	1.036	8.96
0.600	2.528	1.082	3.78
1.75	2.661	1.041	0.811
2.25	2.660	1.019	0.572

様になるように、0.3~0.6 mm, 0.6~1.2 mm, 1.2~2.5 mm, 2.5~5.0 mm, 5.0~7.0 mm, 15~20 mm, 20~25 mm のフルイの目の大きさのそれぞれの平均を採用した。また ϕ は砂礫の静止摩擦角であつて、著者らの研究^{13), 14)}と同様な方法で測定した結果である。

(iii) 実験方法：水たたきの下流側に対象とする砂礫をしき、流量を調節して、水たたきの下流端の近傍

における砂礫の移動数を測定し、流速と移動数との関係を求めた。同時に水温を測定して、動粘性係数を求め、また下流水深も測定した。

(2) 実験結果とその考察

以上のようにしてえられた実験結果のうち、噴流の流速と砂礫の移動割合との関係の一例を Fig. 17 に

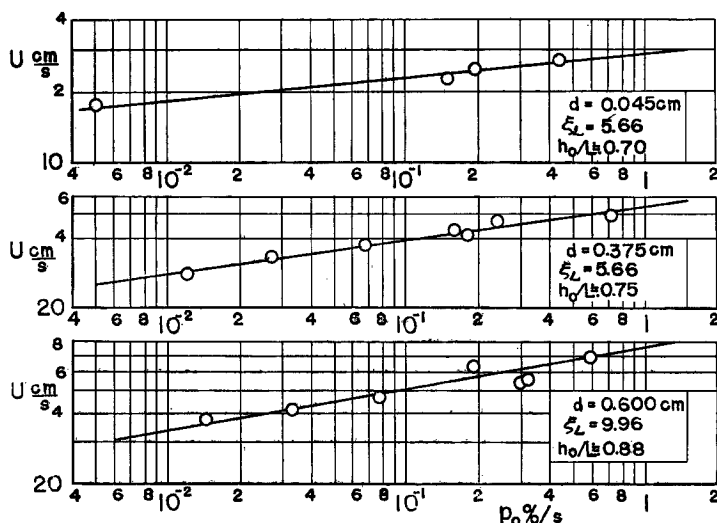


Fig. 17 Variations in number of moved sand gravels with velocity of jets

示す。図の横軸は砂礫の移動限界を定義するために、単位面積当たり単位時間内に移動する砂礫数をその表面にあらわれている砂礫数との比であらわしたものである。

従来、砂礫の移動限界の定義は限界掃流力の実験にみられるように統一されたものでなく、実験者の主観によつてその限界が判定されてきた。従つて、実験値は水理学的機構にもとづくばらつき以上に大きな変動を示した。一方、Einstein がいうように少なくとも混合砂礫の場合はその移動限界を正確に定めることは不可能であるかもしれないが、水工学上の実際問題では、ある一定の取扱いのもとにその限界を定義し、移動限界の水理学的機構を論ずることは、極めて重要なことといえよう。

このような理由から、粒径によつて変らず、前述した理論的考察の発展に都合のよい定義で、しかも実用価値を失わないものとして、上記のようなあらわし方をとつたのである。ここで p_0 %/sec としてどういう値をとるかということは極めて問題の多い点であるが、Fig. 17 に示した結果から p_0 による U の変化が比較的ゆるやかであることを考えてつぎのように定めた。緒言で述べたように、著者らは wall jet のすべての領域、すなわち $\xi > 2\alpha^2$ に対しても理論的考察と実験を行ない、また滑面乱流が十分発達した場合の洗掘限界の問題を同様に考察したが、これらのいずれの場合においても理論結果と実験値とが粒径の大小にかかわらずよくその傾向が一致し、さらに粒径の小さい場合において、限界掃流力に関する従来の実験結果や岩垣の理論曲線に一致すべきこと、などを考慮して $p_0 = 0.5\%$ /sec という値を採用したのである。

このように定められた p_0 に対応した噴流の流速を求める。さらにこの値と L および ν とから計算される Reynolds 数 UL/ν に対応した C_f の値を Fig. 15 によつて求め、これより限界摩擦速度 u_*^* を推定し、 $u_*^{*2}/(\sigma/\rho - 1)gd \tan \varphi$ と u_*^*d/ν との値を計算する。このようにして実験値が点描されるが、これらと理論曲線とを比較した結果が Fig. 18 である。図中の理論曲線は岩垣の提案した遮蔽係数 ξ を導入して、(59) 式を

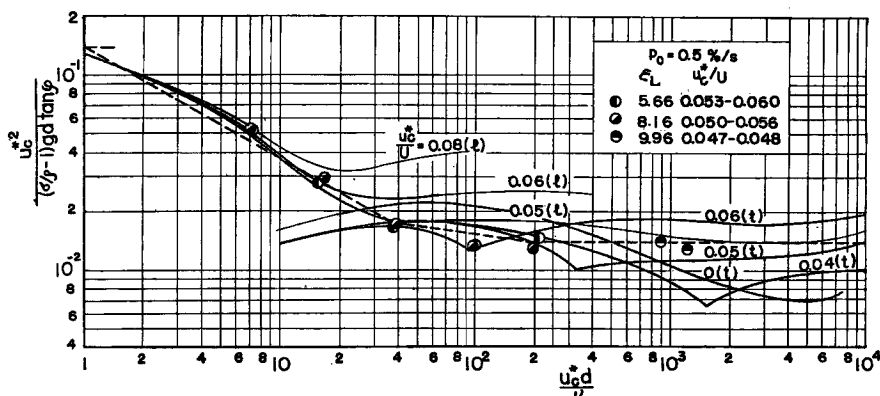


Fig. 18 Comparison of experimental results and theoretical curves

$$\frac{u_e^{*2}}{(\sigma/\rho - 1)gd \tan \phi} = \frac{4}{3\epsilon_L} \quad \text{.....(61)}$$

とあらわし、 ϵ の値がその水理学的機構を考へて、限界掃流力の場合とほぼ同一であらうと推定されることから、 $\epsilon=0.4$ としたものである。Fig. 18 によれば、層流境界層から乱流境界層への遷移が明らかでないため理論曲線を u_e^*/U をパラメーターとして1つの曲線であらわしえないので、実験値との全面的な比較はできない。しかし多くの仮定を導入して考察した理論結果であるにもかかわらず、実験結果とかなりよく一致していることがわかる。

5. 実験公式と水たたきの長さに関する考察

本章においては、以上述べた結果にもとづいて実験公式を提案し、洗掘限界に立脚した水たたきの長さの決定について若干考察してみたい。

(1) 実験公式

前章で述べた洗掘限界に関する考察をもとにして、実際に水門の下流側の水たたきの長さを決定するには、Fig. 18 に示した結果では実用上はなほ都合がわるいので、実験公式として簡便な式にかきかえる必要がある。そこでいま Fig. 18 における破線のように、折線で $u_e^{*2}/(\sigma/\rho - 1)gd \tan \phi$ と u_e^*d/ν との関係をあらわすことにすると、これらの折線はつぎのような実験公式であらわされる。

$$\left. \begin{aligned} R^* &\geq 1330 ; & u_e^{*2} &= 0.0140 \{ (\sigma/\rho - 1)gd \tan \phi \} d, \\ 268 \leq R^* &\leq 1330 ; & &= 0.0391 \{ (\sigma/\rho - 1)gd \tan \phi \}^{18/14} \nu^{1/7} d^{11/14}, \\ 2.68 \leq R^* &\leq 268 ; & &= 0.216 \{ (\sigma/\rho - 1)gd \tan \phi \}^{7/9} \nu^{4/9} d^{1/3}, \\ R^* &\leq 2.68 ; & &= 0.139 \{ (\sigma/\rho - 1)gd \tan \phi \} d, \end{aligned} \right\} \text{.....(62)}$$

ここに、 $R^* = \{ (\sigma/\rho - 1)gd \tan \phi \}^{1/2} d^{3/2} / \nu$ である。

また、砂礫の比重 σ/ρ を 2.65、 $\tan \phi = 1$ とし、 $\nu = 0.01 \text{ cm}^2/\text{sec}$ (20.3°C)、 $g = 980 \text{ cm}/\text{sec}^2$ を用いて (62) 式を簡易化すると、 u_e^{*2} を $(\text{cm}/\text{sec})^2$ 、 d を cm であらわして次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} d &\geq 0.478 \text{ cm} ; & u_e^{*2} &= 22.6 d, & (\text{cm}/\text{sec})^2 \\ 0.172 \leq d &\leq 0.478 ; & &= 19.3 d^{11/14}, \\ 0.00763 \leq d &\leq 0.172 ; & &= 8.73 d^{1/3}, \\ d &\leq 0.00763 ; & &= 219 d. \end{aligned} \right\} \text{.....(63)}$$

Fig. 19 は (63) 式を図示したものであり、比較のために限界掃流力に関する岩垣公式を示したが、滑面

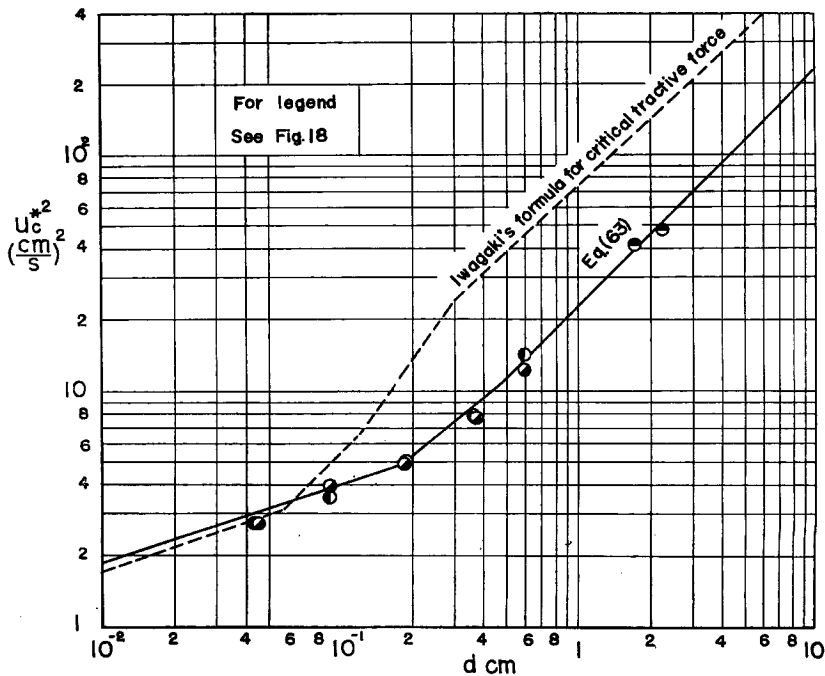


Fig. 19 Graphical representation of empirical formula

の水たたきの下流端における砂礫の移動限界は粒径の大きいとき、限界掃流力の場合に較べて非常に小さい掃流力で規定されることをあらわしている。

実際にこの公式を用いて洗掘限界にあるような水たたきの長さを推定するには、つぎのような方法をとる必要がある。いま一例として、噴流の大きさ D 、その流速 U および砂礫の大きさ d をあたえて、水たたきの長さを求める方法を述べる。

まず (62) 式あるいは (63) 式か Fig. 19 より d に対応した u_c^{*2} を求め、これと U とを用い $C_f = 2(u_c^*/U)^2$ の関係によつて C_f を計算し、これに対応した UL/ν の値を Fig. 15 から求めて、水たたきの長さ L を求める。Fig. 15 を用いるとき、 C_f の 1 つの値に対して 2 つの UL/ν がえられるが、そのような場合には實際上 UL/ν の値の大きな方、すなわち乱流境界層に対する Blasius の関係式の方をとるべきであろう。

なお、以上述べた実験公式は前章までに述べた数値計算および実験結果からして $UL/\nu \approx 10^3 \sim 10^6$ 程度の範囲について適用されると考えてよいであろう。また $L/D \leq 2\alpha^2$ (Albertson らによれば $\alpha = 2.28$) の範囲内で以上の関係が適用されるべきであることを注意しておく。

(2) 水たたきの長さに関する考察

以上述べた洗掘限界に関する考察および実験公式をもとにして、水たたきの長さについて二、三の考察を試みよう。Fig. 19 から明らかなように、粒径の大きい場合限界掃流力に較べて $1/3$ 程度の掃流力（摩擦速度にして $1/\sqrt{3}$ 程度）で砂礫が移動をはじめるわけであるから、水たたきの長さを短くするためには、十分掃流力を小さくするように考慮する必要がある。掃流力は乱流境界層の場合 Fig. 15 から明らかなように、 $n=1/7$ として $U^2(UL/\nu)^{-1/5}$ に比例するわけであるから、水門から流出する単位巾当りの流量 q をあたえた場合は、 ν を一定として $(q/D)^{9/5}L^{-1/5}$ に比例するので、 L を長くするより D を大きくして掃流力を減少させる方がはるかに効果的であることがわかる。

さらに詳しい考察は wall jet のすべての領域について洗掘限界を論ずる必要があるので、これらについてはつぎの機会にゆずりたいと思う。また以上述べた考察は水たたきの面が滑面であるとして議論したわけであるが、掃流力を小さくすることから、水たたきに適当な粗度をあたえることも考えられるが、こうすることによつて一方では水門やカルバートの排水機能が減少するおそれもあるので、このような点については今後の研究にまたねばならない。

6. 結 語

以上 wall jet による洗掘限界の考察に関連して、水門から噴出する wall jet における境界層の発達について述べ、その結果にもとづいて流速が一定である領域における洗掘限界を論じた。また、実験結果にもとづいて実験公式を提案し、水たたきの長さについて若干の考察を行ったが、これらの結果は道路排水にもなる水門やカルバートの水たたきの設計に対する基礎的資料の一つとなりうるものと考えている。

最後に本研究を行なうにあたつて、終始御激励を賜つた石原藤次郎教授に深く感謝するとともに、実験に協力していただいた久下元一氏および実験ならびに計算の一部を助力していただいた宇野 辻、長谷川の諸君に謝意を表する。なお、この研究が昭和34年度文部省総合研究費による研究の一部であることを付記する。

参 考 文 献

- 1) Smith, G. L. : Scour and Energy Dissipation below Culvert Outlets, Thesis of the degree of Master of Science, Colorado Agricultural and Mechanical College, April, 1957.
- 2) Glauert, M. B. : The Wall Jet, Jour. of Fluid Mech., Vol. 1, 1956, pp. 625-643.
- 3) Bakke, P. : An Experimental Investigation of a Wall Jet, Jour. of Fluid Mech., Vol. 2, 1956, pp. 467-472.
- 4) Rouse, H., Siao, T. T., and Nagaratnam, S. : Tubulence Characteristics of the Hydraulic Jump, Proc. A.S.C.E., Vol. 84, No. HY 1, 1958, pp. 1-30.
- 5) Tollmien, W. : Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge, Z.A.M.M., Vol. 6, 1926, pp. 468-478.
- 6) Schlichting, H. : Boundary Layer Theory, 1955, p. 498.
- 7) Albertson, M. L., Dai, Y. B., Jensen, R. A., and Rouse, H. : Diffusion of Submerged Jets, Trans. A.S.C.E. Vol. 115, 1950, pp. 639-697.
- 8) Rouse, H. : Cavitation dans la zone de mélange d'un jet noyé, La Houille Blanche, Janvier-Février, 1953, pp. 9-19.
- 9) Iwasa, Y. : Boundary Layer Growth of Open Channel Flows on a Smooth Bed and its Contribution to Practical Application to Channel Design, Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University, Vol. XIX, No. III, 1957, pp. 229-254.
- 10) Rouse, H. : Engineering Hydraulics, 1950, p. 789.
- 11) White, C. M. : The Equilibrium of Grains on the Bed of a Stream, Proc. Roy. Soc., A 174, 1940, pp. 322-338.
- 12) 栗原道徳 : 限界掃流力に就いて, 九州大学流体工学研究所報告, 第4巻, 第3号, 昭.23.9, pp. 1-26.
- 13) 岩垣雄一 : 限界掃流力の流体力学的研究, 土木学会論文集, 第41号, 昭.31.12, pp. 1-21.
- 14) 岩垣雄一, 土屋義人 : 砂面上におかれた礫の限界掃流力について, 土木学会論文集, 第41号, 昭.31.12, pp. 22-38.
- 15) 土屋義人 : 噴流による砂礫の移動限界について, 土木学会第14回年次学術講演会講演概要, 昭.34.6.
- 16) Yalin, S. : Sur la mécanique du mouvement des matériaux solides, La Houille Blanche, Novembre, 1956, pp. 607-618.

- 17) Corrsin, S. and Kistler, A. L. : Free Stream Boundaries of Turbulent Flows, N.A.C.A., Report No. 1244, 1955, pp. 1-32.
- 18) Klebanoff, P. S. : Characteristics of Turbulence in a Boundary Layer with Zero Pressure Gradient, N.A.C.A., Report No. 1247, 1955, pp. 1-19.
- 19) Spengos, A. C. : Turbulent Diffusion of Momentum and Heat from a Smooth Plane Boundary with Zero Pressure Gradient, Scientific Report No. 1, Dept. of Civil Eng., Colorado Agricultural and Mechanical College, 1956, pp. 1-50.