

非線形水面波動の不安定現象、特に変調不安定が関与する現象について
—非線形 Schrödinger 方程式の有用性とその限界—

岐阜大・工・共通 田中光宏

Chap. 1: 変調不安定の発見

1.1 Stokes 波

水表面を伝播する波動に対して、初めて非線形性すなわち有限振幅の効果を取り入れたのは Stokes (1849) である。彼は、無限に深い水の表面を、形を変えずに一定速度で伝播する波列を表わす解として、次のようなものを提出した。

$$\eta(x, t) = a \cos(kx - \omega t) + \frac{1}{2}a^2 k \cos 2(kx - \omega t),$$
$$\omega^2 = gk(1 + a^2 k^2).$$

この解で特に重要な点は、振動数 ω が波数 k のみならず振幅 a にも依存しており、波長が同じでも大きな波ほど速く伝播するという点である。

1.2 Benjamin の発想

Stokes 以後 100 年以上経った 1967 年になって初めて、このような非線形な波列はある種の微小攪乱に対して不安定であることが Benjamin によって指摘された (Benjamin & Feir (1967), Benjamin (1967))。Benjamin が不安定の可能性に思い至った発想は以下のものである。いま基本波数 k_0 の Stokes 波に波数 $k_0 \pm \Delta k (\equiv k_{\pm})$ の一組みの微小な sideband が加わったとして、この sideband と Stokes 波の 2 倍高調波成分 $2k_0$ との相互作用を考える。すると以下のように水の波の分散性のために、振動数に対する共鳴条件が満たされず、従って sideband が Stokes 波から同期的な外力を受けて増大することはないように思われる。

$$2k_0 - k_{\pm} = k_{\mp},$$
$$2\omega_0 - \omega_{\pm} = \omega_{\mp} - (d^2\omega/dk^2)(\Delta k)^2$$

一方、同方向に伝播する 2 つの水面重力波列は、非線形相互作用の結果、互いに自分の振幅の 2 乗に比例する量だけ他方の振動数を増加させ、従ってまたその伝播速度を速くする事が Longuet-Higgins & Phillips (1962) によって示されていた。この効果を考慮すると上式は

$$2\omega_0 - \tilde{\omega}_{\pm} = \tilde{\omega}_{\mp} - \left\{ \frac{d^2\omega}{dk^2} (\Delta k)^2 + 2\delta\omega \right\}$$

となる。ここで $\tilde{\omega}_{\pm} = \omega_{\pm} + \delta\omega$ で、 $\delta\omega$ は非線形な Stokes 波の存在によって生じた sideband の振動数に対する補正であり、 $\omega_0(ak_0)^2$ 程度の量である。ここでもし分散性と非線形性の効果が互いに相殺しあうならば、共鳴が実現して sideband が指数関数的に増大する可能性がある。またその時には $O(ak_0) \sim O(\Delta k/k_0)$ となるはずである。深水重力波の場合、その線形分散関係は $\omega^2 = gk$ であり従って $d^2\omega/dk^2 < 0$ 、また非線形相互作用は伝播速度を速める方向に働くために $\delta\omega > 0$ で、確かにこのような状況になっている。

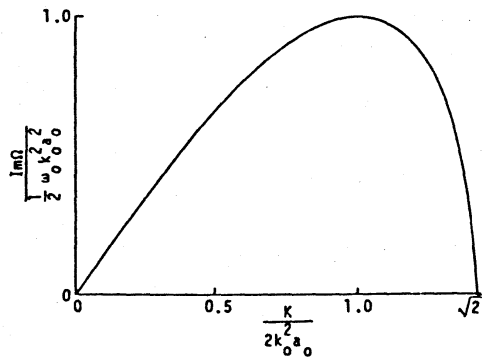


図1 Benjamin による変調不安定の増幅率

Benjaminはこのアイデアのもとに複雑な解析を行ない、その結果図1で表わされるような増幅率を持つ線形不安定性を見いだした。また彼は同様な解析を有限水深の場合にも行ない、 $kh < 1.363$ ではこの不安定は消滅する事も示した。この変調不安定に対する臨界条件は、Benjaminに先立って Whitham (1967) が彼の考案した average Lagrangian と呼ばれる手法によって見出している。しかしながらこの手法では、変調の空間スケールは Stokes 波の波長に比べて限りなく長いと仮定されており、Benjamin

が得たような Δk に対する cutoff や各 Δk に対する増幅率などは表現することが出来ない。

Chap. 2: 非線形 Schrödinger(NLS) 方程式による波列の記述

2.1 NLS 方程式

時間空間的にゆっくりと変調した(すなわち準単色な)弱非線形水面波列の水面変位 $\eta(x, t)$ は

$$\eta(x, t) = \Re \left\{ A(x, t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \right\} + O(A^2)$$

と表現することが出来る。ここで $A(x, t)$ は x と t についてゆっくり変化する関数で複素振幅と呼ばれる。Hasimoto & Ono(1972) は多重尺度展開を用いることによって、 A の発展を記述する式として非線形 Schrödinger 方程式と呼ばれる以下のような方程式を導出した。

$$i \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} + v_g \frac{\partial A}{\partial x} \right\} + p \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = q |A|^2 A$$

ここで v_g は群速度 $d\omega/dk$ を表わす。また $p = \frac{1}{2}d^2\omega/dk^2$, q は k_0h の複雑な関数であり、 $k_0h \rightarrow \infty$ の極限ではそれぞれ $p = -\omega_0/8k_0^2$, $q = \frac{1}{2}\omega_0k_0^2$ となる。

2.2 Stokes 波解とその安定性

NLS 方程式の x に依存しない解 $A(x, t) = A_0 \exp\{-iq|A_0|^2 t\}$ は §1.1 に述べた Stokes の解に対応している。NLS 方程式に基づいてこの解の線形安定性を調べると、 $pq < 0$ の時に不安定となること、その時の不安定領域及び各不安定モードの増幅率が Benjamin によって得られたものと完全に一致することが分かる。水面重力波では p は常に正、一方 q は $kh = 1.363$ で符号を変えるため、再び Benjamin や Whitham が見いだした臨界条件が得られる。

$pq < 0$ が不安定に対応することは Benjamin 流 (§1.2) に、分散性による共鳴条件からのずらし (p の効果) と非線形性 (q の効果) が相殺すると見ることも出来るが、以下のような解釈も成り立つ。仮に $p < 0, q > 0$ としよう。 $p < 0$ は $d^2\omega/dk^2 < 0$, 即ち群速度が k の減少関数であること、また $q > 0$ は位相速度が振幅の増加関数であることを意味している。今仮に波列中のある点に振幅の極大が出来たとすると (図 2 参照)、この付近の波の位相速度が増加し ($q > 0$)、前面では波数の増加がまた後面では減少が起きる。すると前面での群速度が減少し ($p < 0$)、その結果エネルギーの流出量が減少する。逆に後面では群速度が増加し、従ってまたエネルギーの流入量も増加する。これにより、振幅極大の近傍にはますますエネルギーが集中し、波列の不安定につながる。

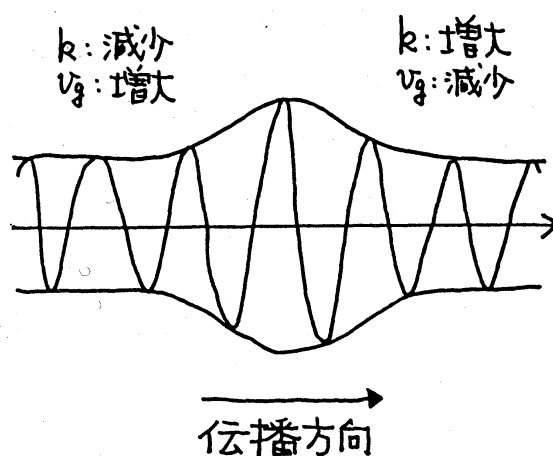


図2 変調不安定の直感的描像

2.3 包絡ソリトン、逆散乱法

変調不安定すなわち $pq < 0$ の場合には、包絡ソリトンと呼ばれる以下のような一定の速度で形を変えずに伝播する孤立した波束解が存在する。

$$A(x, t) = a \operatorname{sech} \left[\left| \frac{q}{2p} \right|^{1/2} a \{x - (v_g + \Delta v)t\} \right] \times \exp \left[-i \frac{\Delta v}{2|p|} (x - v_g t) + \frac{i}{2} \left(\frac{\Delta v^2}{2|p|} - qa^2 \right) t \right]$$

ここで伝播速度 Δv と振幅 a は独立なパラメタであり、この点で伝播速度が波高に依って決まる K-dV ソリトンとは事情が異なる。

NLS 方程式の初期値問題は、初期条件が遠方で十分速く減衰する場合には、逆散乱法と呼ばれる手法によって解析的に解けることが Zakharov & Shabat (1972) によって示された。この理論は波束の時間発展に対して、「初期波束は最終的には、いくつかの包絡ソリトンと、時間とともに分散していく振動的な‘テイル’とに分裂していく」といった一般的な描像を与える。

Chap. 3: 水槽実験との比較

3.1 波束の場合：

空間的に局在した波束的な場合に、水槽実験の結果と NLS 方程式による理論的な予測とを比較する試みは Yuen & Lake (1975) によってなされ、(1) ソリトン解の定常性と安定性、及び (2) 初期波束のソリトンへの分裂（その時間スケールおよび出現するソリトンの個数）において良い一致を得た。その後、Su (1982) は同様な趣旨の、より精密な実験を非常に長い水槽を用いて行ない、その他の点では NLS 方程式との一致は良好なものの、分裂後の先行ソリトンのピーク振動数が初期のそれに比べ低下している（ダウンシフト）事を見出し、この現象は一定な搬送波の存在を前提として導出された NLS 方程式の範囲では説明が付かないと主張した。

3.2 連続波列の場合

連続波列の場合の理論と実験の比較は Lake et al. (1977) によってなされ、その結果 Benjamin-Feir 不安定が完全に確認された。すなわち初期に一樣な波列を起こしても、制御しきれない背後の微小攪乱の中から Benjamin によって最も不安定と予測された一対の sideband が予想通りの増幅率で成長し、造波機から遠ざかるにつれ一樣波列が崩れていくことが観測された。（図 3）

また実験によるとこの不安定は再帰的で、変調はある極大に達するとその後消滅し、その下流では再びほぼ一樣な波列が実現する様に見える。この実験結果に示唆されて数値的に調べられた結果、NLS 方程式は周期境界条件のもとで確かにこのような再帰性を示しうることが確認された。なおこの再帰性については Stiassnie & Kroszynski (1982) が、NLS 方程式から導いた 3 つのモードだけ（carrier + 一対の sideband）からなる系の時間発展を調べ、Jacobi の楕円関数で書ける解析解を得ている。

Lake et al. は NLS 理論ではうまく説明が出来ない現象としてやはり「ダウンシフト」を挙げている。即ち、変調がおさまった後、またほぼ一樣な波列に戻ることは上で述べたが、場合によってはその時の波長が、初期に比べて長くなっていることがある（図 3 参照）。彼らによると、その原因は不明ながらも、このダウンシフト現象が起こる場合とそうでない場合に常に見られる差異は、強く変調された状態における砕波の有無であり、砕波が何らかの形で重要な役割を果たしているらしいとの示唆がなされた。

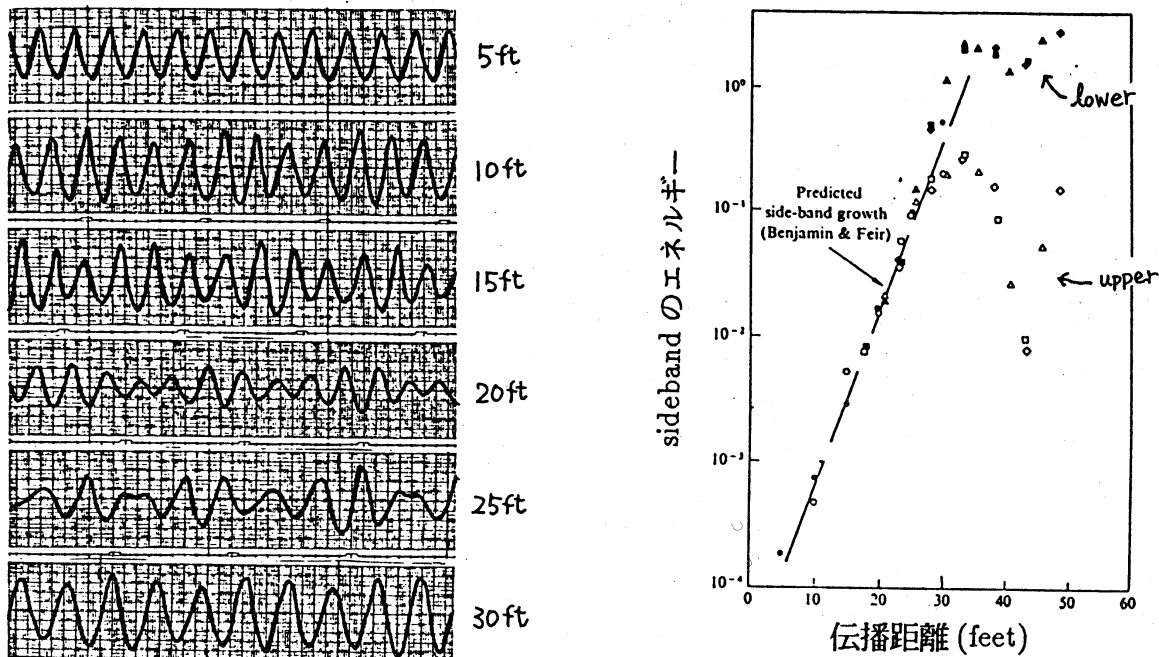


図3 各観測点における時間波形及び波列の伝播に伴う不安定 sideband の成長

3.3 NLS 方程式のその他の欠点

(1) 厳密な結果からの大きなズレ:

厳密な方程式系に基づいた Stokes 波の線形安定解析は、Longuet-Higgins (1978) によってなされたが、Benjamin の結果、従って NLS 方程式の結果は、 ak の増大とともに急激に Longuet-Higgins の結果からずれてしまう。例えば $ak = 0.2$ 程度で、すでに不安定領域の広さや最大増幅率に 50% 以上の誤差が生じる。(図 4 参照)

(2) 3次元に拡張した場合の不都合:

3次元に拡張した時の NLS 方程式は以下のように書ける。

$$i \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\omega}{2k} \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{\omega}{8k^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\omega}{4k^2} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \omega k^2 |A|^2 A$$

これをもとにして、Stokes 波の 3次元攪乱に対する線形安定性を調べると、その不安定領域が攪乱の波数平面で無限に広く、しかも最大増幅率に対応する不安定モードがどんな高波数にも存在する事が分かる。この結果、3次元 NLS

方程式の時間発展では、時間とともに不安定な高波数モードが次々と励起されるためにスペクトルがどんどん広がり、準単色というその導出の大前提が崩れ、自己矛盾に陥ってしまう。

Chap. 4: より正確な近似方程式

4.1 Dysthe の式

Dysthe (1979) は NLS 方程式の精神（すなわち、準単色 + 弱非線形）はそのまま、もう一次高次項まで取り入れた以下のような方程式系を導出した。この式では、波列が変調されたことによって生みだされた平均流成分（ $O(A^3)$ ）と波列自身との相互作用（次式の右辺最後の項）が考慮されているところが、変調不安定の観点からすると特に重要な点である。

$$i \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\omega}{2k} \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{\omega}{8k^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \omega k^2 |A|^2 A$$

$$= \frac{i}{16} \frac{\omega}{k^3} \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} + \frac{i\omega k}{4} A^2 \frac{\partial A^*}{\partial x} - \frac{3i\omega k}{2} |A|^2 \frac{\partial A}{\partial x} + kA \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{z=0},$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad (-\infty < z < 0)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\omega}{2} \frac{\partial |A|^2}{\partial x}, \quad (z = 0),$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow -\infty)$$

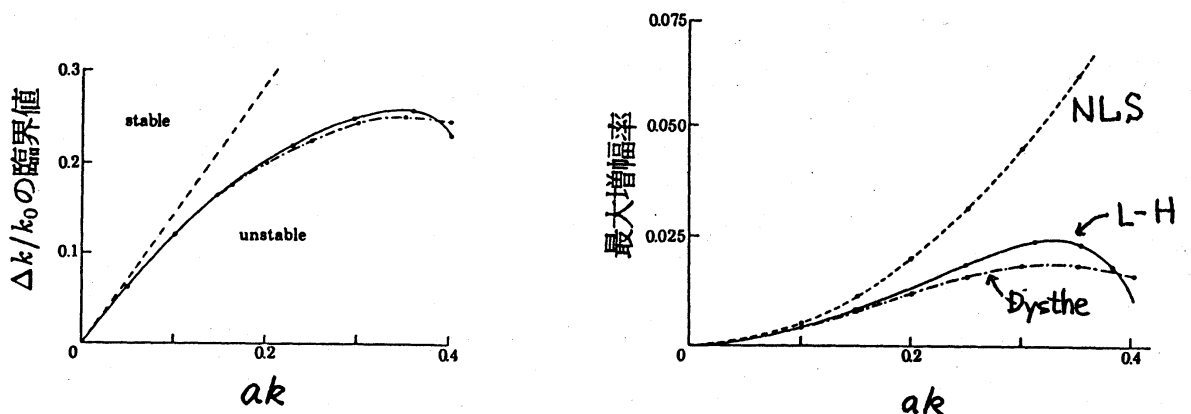


図4 Dysthe 方程式のもとづく Stokes 波の不安定性
(NLS 方程式および Longuet-Higgins(1978) との比較)

この式に基づいて Stokes 波の線形安定解析を行なうと、図 4 に示すように Longuet-Higgins の厳密な結果との一致が飛躍的に改良される。また 3 次元攪乱に対しても不安定領域が有限になり、また最大増幅は常に 2 次元攪乱に対して実現するなど NLS 理論に比較すると非常に優れた性質を持っている。漸近展開を一步進めることが非常に有効である場合の、良い例になっている。

4.2 Zakharov 方程式

Zakharov (1968) は水の波の Hamilton 形式

$$\frac{\partial b(\vec{k})}{\partial t} = -i \frac{\delta H}{\delta b^*(\vec{k})}; \quad H \equiv \frac{1}{2} \int d\vec{r} \int_{-\infty}^{\eta} (\nabla \phi)^2 dz + \frac{1}{2} g \int \eta^2 d\vec{r}.$$

を基にして、

$$i \frac{\partial B(\vec{k}, t)}{\partial t} = \iiint_{-\infty}^{\infty} T(\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) \delta(\vec{k} + \vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) \\ \times e^{i(\omega + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3)t} B^*(\vec{k}_1) B(\vec{k}_2) B(\vec{k}_3) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3$$

なる微積分方程式を導出した。ここで

$$b(\vec{k}, t) \equiv \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \hat{\eta}(\vec{k}, t) + i \sqrt{\frac{k}{2\omega}} \hat{\phi}^{(s)}(\vec{k}, t), \\ b(\vec{k}, t) e^{i\omega(\vec{k})t} = B(\vec{k}, t) + O(a^2 k^2).$$

また T は複雑なモード間の結合係数である。この方程式の特徴は、弱非線形の仮定のもとで、4 波共鳴相互作用に近いすべての相互作用を取り込んでおり、NLS 方程式や Dysthe 方程式のようにスペクトル幅が狭いことを前提としていない点である。Zakharov 方程式は準単色の仮定を付加することにより、NLS 方程式にも Dysthe 方程式にも帰着させることが出来る。(cf. Stiassnie (1984))

このより正確な方程式による Stokes 波の線形安定性の問題は Crawford et al. (1981) によって調べられ、2 次元攪乱に対しては ak の増大とともに長波長攪乱の安定化、また最終的な不安定領域の消滅など Longuet-Higgins (1978) の厳密な結果と定性的に一致する結果を、また 3 次元攪乱に対してはすでに Phillips (1967) によって指摘されていたいわゆる「Phillips の 8 の字」に沿った不安定領域の出現、およびその ak の増大に伴う消滅などが明らかにされた。

4.3 修正 Zakharov 方程式

Stiassnie & Shemer (1984) は Zakharov の解析をさらにもう 1 次高次まで進めて、5 波共鳴相互作用まで取り込んだ修正 Zakharov 方程式を導出した。こ

の方程式によると、Zakharov 方程式では表現出来なかった Class II と呼ばれる全く別の不安定性をも再現することが出来る。この不安定性は McLean(1982) による厳密な Stokes 波の 3 次元攪乱に対する線形安定解析の際に詳しく研究されたもので、最大増幅率が常に 3 次元攪乱に対して起こることから、今まで述べた Benjamin-Feir の変調不安定ならびにその拡張と考えられる不安定 (Class I 不安定) とは対照的に、本質的に 3 次元的な不安定といえる。Su & Green (1985) の水槽実験において、初期の 2 次元的な変調不安定によって生み出された大きな ak によって、Class II の不安定が誘発され、波形が次第に 3 次元的に移っていく様子が観測されている。

Chap. 5: ダウンシフト

5.1: 波束 (Su の実験) の場合

Su の実験の初期条件は、複素振幅 $A(x, 0)$ が実数の場合に対応していると考えられる。しかし、この時 NLS 理論によると、現れてくるであろうすべてのソリトンの速度は等しく、従って実験で観測されたような最終的なソリトンへの分裂は起こらずに、一種の束縛状態が実現するはずである。

この現象に対して、Lo & Mei (1985) は NLS 方程式ではなく Dysthe 方程式を数値的に積分することにより、Su の実験とかなりよく一致する結果が得られることを示した。その後、Akylas (1989, 1991) は Dysthe が NLS 方程式に付加した高次項を NLS ソリトンに対する摂動と考え、その影響を解析した結果、高次項は各ソリトンの振動数を低下させ、その結果その伝播速度を増すことを示した。(多ソリトン解の場合、各ソリトンごとにこの効果の大きさが違うために伝播速度に差が生まれ、分裂が可能となる。)

これらのことから、波束の分裂に関する Su の実験において観測された先行ソリトンのダウンシフト、および NLS 方程式による予測との不一致は、単に NLS 方程式の非線形性の取り入れ不足によるもので、Dysthe 方程式のようなより高次の方程式を使えば説明が付く現象と思われる。

5.2 連続波列 (Lake et al. の実験) の場合

Dold & Peregrine (1986) は境界積分法による全非線形の数値シミュレーションを行ない、変調過程において波の砕波が起こらない場合は、ある時間の後ほぼ初期条件に再帰することを示した。(このスキームでは砕波が起こるとその後の計算続行は不可能。) この結果は、上述の Su の観測したものと違い、この場合のダウンシフトはいくら高次の非線形性を取り入れても、ポテンシャル理論の範囲内で考える限り説明が付かないであろう事を示唆している。どうも NLS 理論より高次の理論が示す sideband 間の非対称性 (即ち、lower sideband の選択的な増大) と合わせて、砕波によるエネルギー散逸に対する何らかのモデル化が必要のように思われる。

Dysthe (1990) は彼の方程式にさらに、振幅がある臨界値より大きいところでのみ働くような散逸項を付加することにより、ダウンシフトを起こすことが出来ることを示した。しかしこの付加的な散逸項は、いきなり Dysthe 方程式という envelope に対する方程式に導入されたもので、あまりにも現象論的で、それが現実の碎波とどのように結び付いているかについては必ずしも明らかではない。

Chap. 6: 変調波列の最大波高

変調不安定は波列内の少数の波にエネルギーを集中させ、その結果初期波高に比べ相当大きな波の出現をもたらす。与えられた一様波列から変調不安定によって生じ得る最大波高を知ることは工学的にも興味ある問題で、Tanaka (1990a) によって数値的に調べられた。基礎方程式としては、NLS 方程式及び厳密な水の波の方程式を用い、後者については Dold & Peregrine の境界積分法により数値積分を行なった。図5は $a_0 k_0 = 1/9$, $k_0 = 9$ の Stokes 波に波数 $k_0 \pm 2$ の一対の微小な sideband を重ねた場合の、変調が最大に達したときの波形と初期波形との比較を示す。また図6は増幅係数、すなわち変調過程において現れる最大の波高と初期波高の比を $a_0 k_0$ の関数として表わしたものである。これによると、全く外部からのエネルギー供給がなくても、変調不安定の結果、初期波高の4倍近い大きな波が出現する可能性があることが分かる。

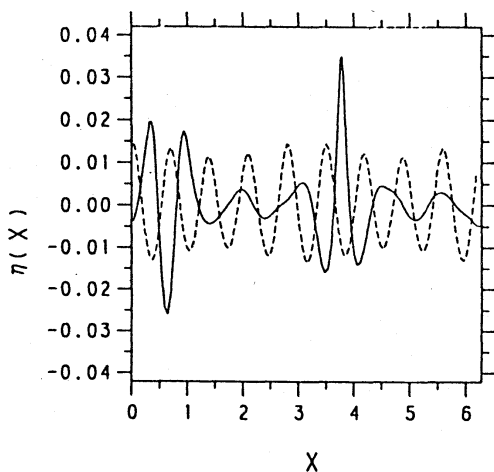


図5 初期及び最大変調時の波形

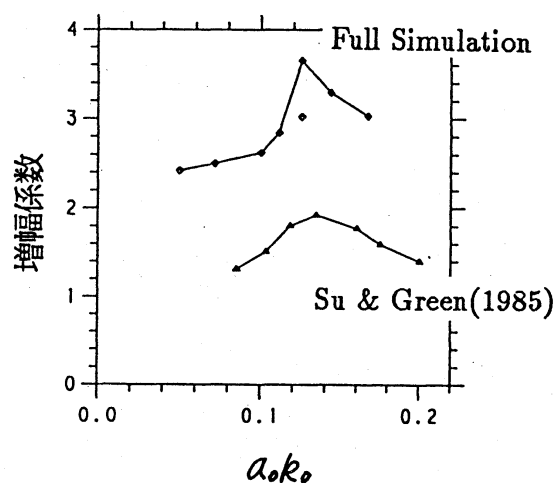


図6 増幅係数の $a_0 k_0$ 依存性

またこの問題に関しては、Su & Green (1985) が実験的に考察しており、増幅係数が $a_0 k_0 = 0.13$ 付近で頭打ちになり、その後 $a_0 k_0$ の増加とともに減少

することを報告している（図6参照）。彼らはその原因として、初期の ak の値が 0.13 程度になると、変調過程の途中において3次元的な Class II 不安定を誘発するに十分な大きさの ak が局所的に出現し、その結果多くのエネルギーが3次元場に流出し、砕波によって散逸するためであろうと述べている。しかしながら図6から分かるように、実験結果とのかなり大きな定量的不一致はあるものの、全非線形なシミュレーションは2次元運動の範囲内でも同様な傾向を示しうる。この場合、増幅係数の頭打ち並びに減少は、 $a_0 k_0$ の増大に伴って最大増幅率に対応する攪乱の波長が減少し（NLS方程式によれば、 $\Delta k/k_0 = 2a_0 k_0$ に対して最大増幅）、その結果一つの波群内の波の数、従って波群内の最大波にエネルギーを供給する他の波の数が減少するためと理解できるのではないだろうか。

Chap. 7: 波群形成における変調不安定の役割

外洋では大きな波は単独では来ないで、数波続いてくる傾向があることが古くから知られている。言い換えれば、海の波では波列に沿ってのエネルギーの分布に大きな非一様性があり、これを「波群の形成」と呼ぶことにする。波群を生み出すメカニズムとしては、今まで述べてきた変調不安定がまず第一に頭に浮かぶが、変調不安定の概念は、本来準単色の仮定のもとでのみ明確な意味を有するもので、現実の海洋波の如く比較的広いスペクトルを持つような波動場での波群形成に対して、どれほどの影響力を持ち得るかは必ずしも自明ではない。Tanaka (1992) はまず MKdV 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \pm 3u^2 \frac{\partial u}{\partial x}$$

を基礎方程式として、様々なスペクトル幅を持つ波動場に対して、変調不安定の有無が波群形成の程度にどのような差異をもたらすかについて考察した。MKdV 方程式から NLS 方程式を導出してみると、MKdV 方程式の非線形項の符号で+を採用すると、あらゆる波長の波列が全て変調不安定になり、逆に-にすると不安定な波列が一つもなくなる事が分かる。このように MKdV 方程式に支配される系においては、非線形性の程度や分散性を全く変える事なく、単に非線形項の符号の選択だけで変調不安定の有無を自由に操作する事ができる。

図7はいろいろな幅を持った初期スペクトル（ここでは仮に Rayleigh 分布を採用している）、また図8は MKdV 方程式及びそれより導出された NLS 方程式が与える $\overline{GF}$ (波群形成の目安) を、初期のスペクトル幅の関数として表わしたものである。この図は次のような事実を表わしている。すなわち、(1) 非線形性の効果は、系の変調安定性によって全く反対の方向に働く。すなわち、系が変調不安定の場合には波群形成を促進するように、また変調安定の場合に

は抑制する方向に働く。またこの効果はスペクトル幅の広がりとともに次第に弱まりながらも、かなり広いスペクトルの波動場に対しても存在し続けている、また (2)NLS 方程式は準単色の仮定のもとで導出されたにもかかわらず、少なくとも波群形成の指標 GF に関する限りでは、かなり広いスペクトル幅に対しても非常に有効である。

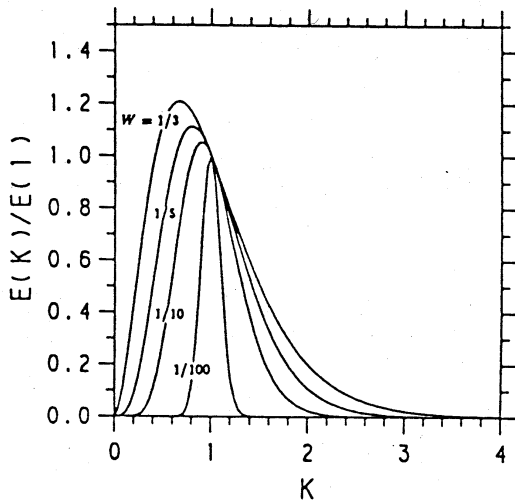


図7 様々なバンド幅の初期スペクトル

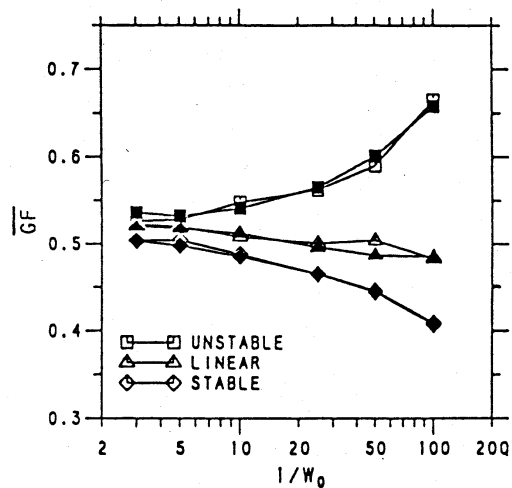


図8 MKdV 方程式による GF vs. バンド幅 (白抜きは NLS 方程式による結果)

図8に示されたように、NLS 方程式が MKdV 方程式と全く同様な GF の振舞いを示すという事実は、この振舞いが MKdV 方程式で支配される系に固有の性質ではなく、広く非線形分散系一般に共通する性質であることを示唆している。これを確認するために、同じ問題を MKdV 方程式に代わって、長波に対するモデル方程式 (Tanaka(1990b))

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} h \frac{\partial u}{\partial x} + L(u) = 0,$$

で支配される系について調べた結果を、図9に示す。ここで、 $L(u)$ は水面重力波の分散関係 $\omega = \sqrt{gk \tanh kh}$ に対応する線形演算子である。 GF の

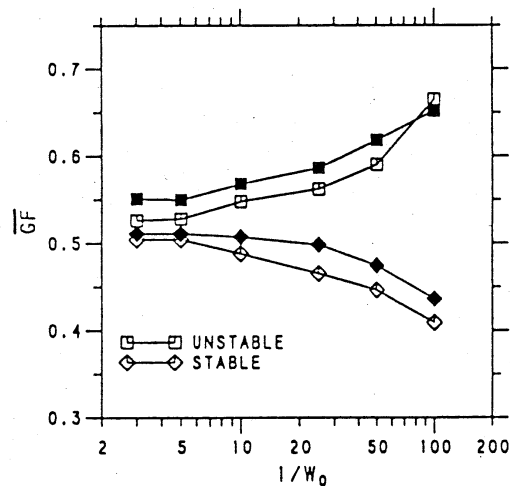


図9 モデル方程式による GF vs. バンド幅 (白抜きは NLS 方程式による結果)

W_0 への依存の仕方、および極めて広い範囲にわたる NLS 方程式の有効性など、図 8 が示すと同様な特徴が観察される。

References

- Akylas, T.R. (1989) Higher-order modulation effects on solitary wave envelopes in deep water. *J. Fluid Mech.* 198, 387-397.
- Akylas, T.R. (1991) Higher-order modulation effects on solitary wave envelopes in deep water. Part 2. Multi-soliton envelopes. *J. Fluid Mech.* 224, 417-428.
- Benjamin, T.B. (1967) Instability of periodic wavetrains in nonlinear dispersive systems. *Proc. R. Soc. Lond.* A299, 59-75.
- Benjamin, T.B. & Feir, J.E. (1967) The disintegration of wave trains on deep water. Part 1. Theory. *J. Fluid Mech.* 27, 417-430.
- Crawford, D.R., Lake, B.M., Saffman, P.G. & Yuen, H.C. (1981) Stability of weakly nonlinear deep-water waves in two and three dimensions. *J. Fluid Mech.* 105, 177-191.
- Dold, J.W. & Peregrine, D.H. (1986) Water-wave modulation. *Coastal Engineering*, 163-175.
- Hasimoto, H. & Ono, H. (1972) Nonlinear modulation of gravity waves. *J. Phys. Soc. Jpn.* 33, 805-811.
- Dysthe, K.B. (1979) Note on a modification to the nonlinear Schrödinger equation for application to deep water waves. *Proc. R. Soc. Lond.* A369, 105-114.
- Lake, B.M., Yuen, H.C., Rungaldier, H., & Ferguson, W.E. (1977) Nonlinear deep water waves: theory and experiment. Part 2. Evolution of a continuous wave train. *J. Fluid Mech.* 83, 49-74.
- Lo, E. & Mei, C.C. (1985) A numerical study of water-wave modulation based on a higher-order nonlinear Schrödinger equation. *J. Fluid Mech.* 150, 395-416.
- Longuet-Higgins, M.S. (1978) The instabilities of gravity waves of finite amplitude in deep water. II. Subharmonics. *Proc. R. Soc. Lond.* A360, 489-505.
- Longuet-Higgins, M.S. & Phillips, O.M. (1962) Phase velocity effects in tertiary wave interactions. *J. Fluid Mech.* 12, 333-336.
- McLean, J.W. (1982) Instabilities of finite amplitude water waves. *J. Fluid Mech.* 114, 331-341.
- Phillips, O.M. (1967) Theoretical and experimental studies of gravity wave interactions. *Proc. R. Soc. Lond.* A299, 104-119.

- Stiassnie, M. (1984) Note on the modified nonlinear Schrödinger equation for deep water waves. *Wave Motion* 6, 431-433.
- Stiassnie, M. & Kroszynski, U.I. (1982) Long-time evolution of an unstable water-wave train. *J. Fluid Mech.* 116, 207-225.
- Stiassnie, M & Shemer, L. (1984) On modifications of the Zakharov equation for surface gravity waves. *J. Fluid Mech.* 143, 47-67.
- Stokes, G.G. (1849) On the theory of oscillatory waves. *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 8, 441-455.
- Su, M.Y. (1982) Evolution of groups of gravity waves with moderate to high steepness. *Phys. Fluids* 25, 2167-2174.
- Su, M.Y. & Green, A.W. (1985) Wave breaking and nonlinear instability coupling. *The Ocean Surface*. Y. Toba & H. Mitsuyasu (eds.), Reidel, 31-38.
- Tanaka, M. (1990a) Maximum amplitude of modulated wavetrain. *Wave Motion* 12, 559-568.
- Tanaka, M. (1990b) On a model equation for waves on moderately deep water. *Res. Rep. Fac. Engng. Gifu Univ.* 40, 75-84.
- Tanaka, M. (1992) The role of modulational instability in the formation of wave groups. *Proc. IUTAM Breaking Waves Symposium*, R. Grimshaw (ed.), Springer
- Trulsen, K. & Dysthe, K.B. (1990) Frequency down-shift through self modulation and breaking. *Water Wave Kinematics*, A. Tørum & O.T. Gudmestad (eds.), Kluwer, 561-572.
- Whitham, G.B. (1967) Non-linear dispersion of water waves. *J. Fluid Mech.* 27, 399-412.
- Yuen, H.C. & Lake, B.M. (1975) Nonlinear deep water waves: Theory and experiment. *Phys. Fluids* 18, 956-960.
- Zakharov, V.E. (1968) Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2, 190-194.
- Zakharov, V.E. & Shabat, A.B. (1972) Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulating waves in nonlinear media. *Sov. Phys.-JETP* 65, 997-1011.