

### 3. 講義ノート3 :

## ランダムな媒質中の波動の伝播

松 原 武 生

### 1. 序 :

ランダムな系の問題は、古くからいろいろの形でとりあげられているもので、数学的にも一応の formulation が行われている。ランダムに分布された散乱子による波動の多重散乱は、多体問題の linear な部分と考えられ、ある種の多体問題を取扱う上での良い近似とされている。Lax は媒質中の波動の伝播を、多重散乱の理論を使つて行つている。<sup>1)</sup>この多重散乱の理論は、種々の分野で応用されているが、主眼点は多重散乱された活動を観測することによつて、散乱子に関するどんなことがわかるということ、云い変えるとマクロな観測結果から、如何にしてミクロな情報を得るかということにある。

ここで波動として考えられるものには、(1) スカラー波、(2) ベクトル波、(3) 粒子波があり、一方散乱子 (scatterer) としては、static にランダム分布したものと dynamical にランダム分布したものがある。

問題は、実はひとつの formulation でつくせるものであるが、いろいろの観点から取扱うことができる。すなわち、(1) 散乱の問題、(2) 輻射の問題、(3) 固有場のスペクトルの問題というとらえ方がある。

さて、先にも述べたように、ランダムな系の問題は、これまでいろいろの方法で取扱われて来たが、一体それらがほんとに正しい取り扱いかどうかを知り、もし正しいとすればその根拠づけをするために、又正しくない部分があるとするれば、一体如何にして今後問題を進めて行けば良いかを見るための参考として、Frish<sup>2)</sup>の議論をもとにした解説を、ここで与えることにする。

### 2. 一体問題の散乱演算子 :

散乱子を static なものとする、散乱の様子は屈折率

$$\nabla^2(\mathbf{r}) = 1 + \mu(\mathbf{r}) \quad (2.1)$$

で記述される。場の時間部分をharmonic な  $e^{-ik_0 t}$  と仮定すると、source のない時、場はHermholtz の方程式をみたす。すなわち、

$$[\Delta + k_0^2(1 + \mu(\mathbf{r}))] \phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (k_0 > 0) \quad (2.2)$$

ここで  $k_0$  は自由空間に対する波数である。この問題は、輻射の問題としても、散乱の問題としても、解くことができる。

### (1) 輻射の問題として考えた場合

輻射場  $\phi(\mathbf{r})$  は次の様にして決められる。まずsourceの項  $j(\mathbf{r})$  が与えられているとすると、 $\phi(\mathbf{r})$  の満たす方程式は

$$[\Delta + k_0^2(1 + \mu(\mathbf{r}))] \phi(\mathbf{r}) = j(\mathbf{r}) \quad (2.3)$$

一方輻射条件は

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} - ik_0 \phi \right) = 0 \quad (2.4)$$

で与えられるから、これらと、散乱子の境界で  $\phi$  及び  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  が連続という条件から、 $\phi$  が求められる。

### (2) 散乱の問題として考えた場合

入射波、すなわち自由空間内の波動方程式の解

$$\phi_{inc}(\mathbf{r}) = \exp(ik_{inc} \cdot \mathbf{r}), \quad k_{inc}^2 = k_0^2, \quad (2.5)$$

が与えられた時に、散乱波  $\phi_{sc}$  はどんな形になるかを求める問題になる。

$\phi_{sc}$  は

$$\phi_{sc} = \phi - \phi_{inc}, \quad (2.6)$$

で与えられるが、この右辺の全波動  $\phi$  が (2.2) 式の関係を満たすこと、及び散乱波  $\phi_{sc}$  が (2.4) 式の輻射の条件を満たすということを連立させて、 $\phi_{sc}$  が求められる。

議義ノート 3 .

(2)で述べた散乱問題は、(1)の輻射の問題に帰結できることが簡単に示せる。  
すなわち、(2.2)と(2.6)とより、

$$[4 + k_0^2(1 + \mu)] \phi_{sc} = -k_0^2 \mu \phi_{inc}. \quad (2.7)$$

が得られるから、 $-k_0^2 \mu \phi_{inc}$  を source の項  $j(r)$  とみなし、 $\phi_{sc}$  を輻射問題の場と解釈すれば、後者は前者に帰結できる。

ここでは輻射の問題として考えることにしよう。まず formal な摂動論的解を与え、これから散乱演算子を組立てることにする。(2.3)式を描象的な演算子方程式として書き直すと

$$(L_0 + \ell) \phi = j$$

$$L_S = 4 + k_0^2 \quad (2.8)$$

$$\ell = k_0^2 \mu(r)$$

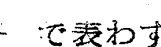
ここで演算子  $L_0$  は、輻射条件 (1.4) を満たすようなユニークな逆演算子が存在する。これは、自由空間に於るグリーン関数に他ならず、座標表示で書くと、convolution 演算子

$$G^{(0)}(r, r') = \frac{ik_0 |r - r'|}{-4\pi |r - r'|} \quad (2.9)$$

という形になる。良く知られた摂動の公式を使つて、 $\phi$  の摂動展開は (2.8) より次の様になる。

$$\phi = G^{(0)} \sum_{n=0}^{\infty} (-\ell G^{(0)})^n j \quad (2.10)$$

この式の最初の 2 項はボルン散乱である。この (2.10) をグラフで表わすために、グラフと式の間を次の様に導入する。すなわち、

- (i) オペレーターはグラフで表わされ、右にオペレートするものとする。
- (ii)  $G^{(0)}$  を  で表わす。
- (iii)  $-\ell$  を  で表わす。

こうすると、(2.10) 式は

$$\phi = \left[ \text{---} + \text{---} \bullet + \text{---} \bullet \bullet + \dots \right] J, \quad (2.11)$$

というグラフで表わされる。このグラフを「裸のダイアグラム」と呼ぶことにする。

ここで散乱演算子をグラフを使つて次のように定義する。

$$S = \bullet + \text{---} \bullet + \text{---} \bullet \bullet + \text{---} \bullet \bullet \bullet + \dots \quad (2.12)$$

この散乱演算子  $S$  を使うと、(2.8) の解は

$$\phi = G^{(0)} J + G^{(0)} S G^{(0)} J \quad (2.13)$$

となる。(2.12) の簡単な iteration から、 $S$  が次の積分方程式とみなすことがわかる。

$$S = \bullet + \text{---} S$$

又は

$$S + \ell + \ell G^{(0)} S = 0 \quad (2.14)$$

(2.12) 式の代りに、(2.13) 式と (2.14) 式を  $S$  の定義とみなすこともできる。

散乱の問題を解いた場合の、散乱波もグラフを使うと、(2.7) 式より

$$\begin{aligned} \phi_{sc} &= \left[ \text{---} \bullet + \text{---} \bullet \bullet + \text{---} \bullet \bullet \bullet + \dots \right] \phi_{inc} \\ &= G^{(0)} S \phi_{inc} \end{aligned} \quad (2.15)$$

となる。入射波として (2.5) 式で与えられる波を使い、 $G^{(0)}$  に (2.9) 式を代入すると、上式より  $\phi_{sc}$  が求まり、散乱子から充分遠いところでは散乱波の振幅  $\mathcal{J}(\mathbf{k}_{sc}, \mathbf{k}_{inc})$  が次の形に求まる。

$$\mathcal{J}(\mathbf{k}_{sc}, \mathbf{k}_{inc}) = -2\pi^2 \hat{S}(\mathbf{k}_{sc}, \mathbf{k}_{inc}) \quad (2.16)$$

### 講義ノート 3 .

ここで  $\hat{S}(\mathbf{k}_{sc}, \mathbf{k}_{inc})$  は散乱演算子のフリーエ成分で

$$S(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \quad (2.17)$$

で定義されるものである。

この散乱波の振幅  $\mathcal{J}(\mathbf{k}_{sc}, \mathbf{k}_{inc})$  と散乱断面積  $\sigma_{sc}(\mathbf{k}_{inc})$  との間には、次の光学定理 (Optical theorem) が成立つ。

$$\begin{aligned} \sigma_{sc}(\mathbf{k}_{inc}) &= \int |\mathcal{J}(\mathbf{k}_{sc}, \mathbf{k}_{inc})|^2 d\Omega_{sc}, \\ &= \frac{4\pi}{k_0} \text{Im} \mathcal{J}(\mathbf{k}_{inc}, \mathbf{k}_{inc}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

### 3. 散乱子の確立分布関数

次に、ランダムに分布した  $N$  ケの散乱子に対する  $N$  体散乱の問題を考えてみよう。この問題を解くには、散乱子の十分な統計が与えられねばならない。

散乱子の位置を表わす  $N$  ケのランダムな変数の組を  $(\mathbf{r}_a) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$  とするとき、 $N$  ケの散乱子が、それぞれ  $\mathbf{r}_1$  と  $\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_1$  の間、 $\mathbf{r}_2$  と  $\mathbf{r}_2 + d\mathbf{r}_2$  の間、.....,  $\mathbf{r}_N$  と  $\mathbf{r}_N + d\mathbf{r}_N$  との間にある joint 分布関数を  $p_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N$  とする。ここで  $p_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$  は正で、散乱子の全ての位置について対称である。規格化は、系の体積を  $V$  として

$$\int p_N d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N = V^N \quad (3.1)$$

であるとする。実際の確立分布は  $V^{-N} p_N$  で与えられ、これは 1 に規格化されている。更に、 $s$  ケの散乱子の分布関数の主義を

$$p_s(\mathbf{r}_{a_1}, \mathbf{r}_{a_2}, \dots, \mathbf{r}_{a_s}) = V^{s-N} \int p_N(\mathbf{r}_{a_1}, \dots, \mathbf{r}_{a_s}, \mathbf{r}_{s+1}, \dots, \mathbf{r}_N) d\mathbf{r}_{s+1} \dots d\mathbf{r}_N \quad (3.2)$$

とすると、これに対応する確率分布関数は  $V^{-s} p_s(\mathbf{r}_{a_1}, \dots, \mathbf{r}_{a_s})$  となる。この  $s$  散乱子の確率分布関数より大事な量は、 $s$ - 散乱子の相関関数である。この相関関数は次の様なクラスター展開で定義される。

$$p_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = p_1(\mathbf{r}_1)p_1(\mathbf{r}_2) + g_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

$$p_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = p_1(\mathbf{r}_1)p_1(\mathbf{r}_2)p_1(\mathbf{r}_3) + p_1(\mathbf{r}_1)g_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$$

$$+ p_1(\mathbf{r}_2)g_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) + p_1(\mathbf{r}_3)g_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + g_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \dots\dots\dots$$

$$p_S(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_S) = \sum g_l(\mathbf{r}_{i_1}, \dots, \mathbf{r}_{i_l}) g_m(\mathbf{r}_{j_1}, \dots, \mathbf{r}_{j_m}) g_n(\mathbf{r}_{k_1}, \dots, \mathbf{r}_{k_n}) \dots \quad (3.3)$$

ここで、和は、変数  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_S$  をクラスターに分ける全ての可能な方法について行われる。

これまでの多重散乱の方法では、散乱子は全体として相関していないと仮定している。しかし、実際にはこのような「完全気体」(仮定)は正しくない。

#### 4. N体の輻射の問題とN体の散乱の問題

N体の散乱子は全て identical とする。 $\mathbf{r}_\alpha$ にある散乱子による屈折率を

$$n_\alpha^2(\mathbf{r}) = 1 + \mu(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha) \quad (4.1)$$

とすると、source がなく、N体の散乱子がある時の波動関数は

$$[A + k_0^2 + k_0^2 \sum_{\alpha=1}^N \mu(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha)] \phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.2)$$

となる。§2 で与えた一体散乱の場合と同様、この式を演算子で書き直すと次のようになる。

$$(L_0 + \sum_{\alpha=1}^N \ell_\alpha) \phi = 0 \quad (4.3)$$

$$\left. \begin{aligned} L_0 &= A + k_0^2 \\ \ell_\alpha &= k_0^2 \mu(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

これも又輻射の問題としても散乱の問題としても解ける。輻射の問題と考えると、

講義ノート 3 .

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad (L_0 + \sum_{\alpha=1}^N \ell_{\alpha}) \phi = J \\ \text{(ii)} \quad \phi \text{ に対する輻射条件} \end{array} \right\} \quad (4.5)$$

の二つから、場の量  $\phi$  が求められる。一方散乱の問題として考えると、

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad (L_0 + \sum_{\alpha=1}^N \ell_{\alpha}) \phi_{\text{inc.}} = - \sum_{\alpha=1}^N \ell_{\alpha} \phi_{\text{inc.}} \\ \text{(ii)} \quad \phi_{\text{sc.}} \text{ に対する輻射条件} \end{array} \right\} \quad (4.6)$$

という二つの条件から、散乱波  $\phi_{\text{sc.}}$  が得られる。ここでも再び、散乱の問題は輻射の問題の特別な場合であることがわかったので、輻射の問題のみを考えることにする。

輻射の問題に対する  $N$  体のグリーン関数は、次の演算子方程式をみたす。

$$(L_0 + \sum_{\alpha=1}^N \ell_{\alpha}) G = I \quad (4.7)$$

ここで  $I$  は恒等演算子である。  $G$  は積分演算子  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  とみなされる。すなわち

$$[\Delta_{\mathbf{r}} + k_0^2 + k_0^2 \sum_{\alpha=1}^N \mu(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha})] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.8)$$

ここでは、次に定義される  $G$  のランダム平均と covariance (二つの異なる点に於る場の積の平均値) に興味がある。  $G$  の平均は

$$\langle G \rangle = \frac{1}{V^N} \int G(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) p_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N \quad (4.9)$$

$G$  の covariance は

$$\langle G \otimes \bar{G} \rangle = \frac{1}{V^N} \int G(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \otimes \overline{G(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)} p_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N \quad (4.10)$$

$\otimes$  はテンソル積をあらわす。 covariance から計算できるものは

a) 平均の輻射場:  $\langle \phi \rangle = \langle G \rangle_j$

$$(4.11)$$

b) 平均の輻射強度:

$$\langle |\phi(\mathbf{r})|^2 \rangle = \int \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \rangle_j(\mathbf{r}') j(\mathbf{r}'') d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' \quad (4.12)$$

である、(4.11) がわかれば大量の物理量が求められる。

## 5. 平均を行う前のグリーン関数。

演算子方程式 (4.7) を、摂動  $\ell_\alpha$  に関して formal に展開すると、

$$G = G^{(0)} - \sum_{\alpha=1}^N G^{(0)} \ell_\alpha G^{(0)} + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N G^{(0)} \ell_\alpha G^{(0)} \ell_\beta G^{(0)} + \dots \quad (5.1)$$

・裸のダイアグラム”に対する下のnotations

(i)  $G^{(0)}$ : 

(ii)  $-\ell_\alpha$ : 

(iii) 全てのギリシャ文字の添字に関して和を行う。

を使うと、(5.1) はグラフで表わせる。

$$G = \text{---} + \text{---} \overset{\alpha}{\bullet} \text{---} + \text{---} \overset{\alpha}{\bullet} \text{---} \overset{\beta}{\bullet} \text{---} + \text{---} \overset{\alpha}{\bullet} \text{---} \overset{\beta}{\bullet} \text{---} \overset{\gamma}{\bullet} \text{---} + \dots \quad (5.2)$$

散乱問題の解を、この裸のグラフで書くと、

$$\phi = \phi_{\text{inc.}} + \left[ \text{---} \overset{\alpha}{\bullet} + \text{---} \overset{\alpha}{\bullet} \text{---} \overset{\beta}{\bullet} + \dots \right] \phi_{\text{inc.}} \quad (5.3)$$

多くの場合、級数 (5.2) はゆつくり収束すると考えられる。この遅い収束を改良するために、同じ散乱子による連結した相互作用を含むようなグラフを使う。すなわち、一体の散乱演算子の定義  $S$  と同様、位置  $\mathbf{r}_\alpha$  にある散乱子による散乱演算子の定義を次で与える。

$$S_\alpha = \overset{\alpha}{\bullet} + \text{---} \overset{\alpha}{\bullet} \text{---} \overset{\alpha}{\bullet} + \text{---} \overset{\alpha}{\bullet} \text{---} \overset{\alpha}{\bullet} \text{---} \overset{\alpha}{\bullet} + \dots = \overset{\alpha}{\circ} \quad (5.4)$$



講義ノート 3 .

この時は  $\alpha$  に対する和は行わない。これは、原点の移動だけで、先に §2 で定義された一体の散乱子と同じものになり、次の関係が成立つ。

$$S_{\alpha}(r, r') = S(r - r_{\alpha}, r' - r_{\alpha}) \quad (5.5)$$

(5.4) 式で導入された新しい notation を使うと  $N$  体のグリーン関数は

$$G = \text{---} + \overset{\alpha_1}{\text{---} \bigcirc \text{---}} + \overset{\alpha_1}{\text{---} \bigcirc} \overset{\alpha_2}{\text{---} \bigcirc \text{---}} + \dots \quad (5.6)$$

と書ける。ここで、和は、グラフ上で隣接する添字は互いに等しくないという制限の下で、全ての可能な  $\alpha$  の値について行われる。ここで、下の二つのグラフを比較してみよう。



この二つのグラフは、実際は異なるものであるのに、トポロジカルには同値である。これをトポロジカルにも区別できるようにするために、新しい notation を導入することにする。

(i) グラフに於て、同じ添字をもつ散乱演算子を、main line の下の solid line で結び、「link」と呼ぶ

(ii) 隣接する散乱演算子はリンクされない。

この二つの法則で描かれたグラフを「半分着物を着たダイアグラム (half-dressed diagram)」と呼ぶ。これを使って  $G$  を表わすと

$$\langle G \rangle = \text{---} + \overset{\alpha}{\text{---} \bigcirc \text{---}} + \overset{\alpha}{\text{---} \bigcirc} \overset{\beta}{\text{---} \bigcirc \text{---}} + \overset{\alpha}{\text{---} \bigcirc} \overset{\beta}{\text{---} \bigcirc} \overset{r}{\text{---} \bigcirc \text{---}} + \overset{\alpha}{\text{---} \bigcirc} \overset{\beta}{\text{---} \bigcirc} \overset{\alpha}{\text{---} \bigcirc \text{---}} + \dots \quad (5.7)$$

一方、covariance に対する摂動展開は

$$G \otimes \bar{G} = \text{---} + \overset{\alpha}{\text{---} \bigcirc \text{---}} + \text{---} \underset{\alpha}{\bigcirc} \text{---} + \overset{\alpha}{\text{---} \bigcirc} \underset{\beta}{\text{---} \bigcirc} \text{---} + \overset{\alpha}{\text{---} \bigcirc} \underset{\alpha}{\text{---} \bigcirc} \text{---} + \dots \quad (5.8)$$

## 6. (平均のグリーン関数とその covariance

平均のグリーン関数と covariance を求めるためには、\* 半分着物を着たダイアグラム\* をランダム変数  $r_\alpha$  の確率分布関数に関して平均しなければならない。s ケの散乱子のみに関係しているグラフを平均するためには、s 散乱子の確率分布関数  $V_{ps}^{-s}(r_{\alpha 1}, \dots, r_{\alpha s})$  を使えばよい。いま 2 散乱子のみに関係しているような下のグラフの平均を考えてみよう。すなわち、

$$\begin{aligned}
 \langle \text{---} \overset{\alpha}{\circ} \text{---} \overset{\beta}{\circ} \text{---} \overset{\alpha}{\circ} \text{---} \rangle &= \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N V^{-2} \int G^{(0)} S_\alpha G^{(0)} S_\beta G^{(0)} S_\alpha G^{(0)} \times \\
 &\quad \times p_2(r_\alpha, r_\beta) dr_\alpha dr_\beta \\
 &= \frac{N(N-1)}{V^2} \int G^{(0)} S_1 G^{(0)} S_j G^{(0)} S_1 G^{(0)} \\
 &\quad \times \{ p_1(r_1) p_1(r_j) + g_2(r_1, r_j) \} dr_1 dr_j \quad (6.1)
 \end{aligned}$$

ここで (3.3) 式を使つた。一般に s 次のグラフでは散乱子に対する和を行わず

$$\frac{1}{V^s} N(N-1) \dots (N-s+1) \int \dots p_s(r_1, \dots, r_s) dr_1 \dots dr_s \quad (6.2)$$

と書く。点線の部分はグラフを式に書き直す法則を使つて、 $S_1, S_j, \dots$  と  $G^{(0)}$  との積であらわされるもので、グラフに対して決まつて来る。(6.2) 式の中の  $p_s$  を 1 次, 2 次,  $\dots$  S 次の相関関数によるクラスター展開におき変えると、(6.1) の最後の表式のような結果が得られる。いま、異なる散乱子間に相関があることをあらわすグラフ表示として相関のある散乱子を全部点線で結ぶことにする。この点線で結ぶという操作は、散乱子に対するランダム平均をおこなつたことに相当している。このようなグラフを\* 着物を着たダイアグラム\* (dressed diagram) と呼ぶと、\* 半分着物を着たダイアグラム\* (half-dressed diagram) との関係は下図のようになる。

$$\begin{aligned}
 \langle \text{---} \overset{\alpha}{\circ} \text{---} \rangle &= \text{---} \overset{\alpha}{\circ} \text{---} \\
 \langle \text{---} \overset{\alpha}{\circ} \text{---} \overset{\beta}{\circ} \text{---} \rangle &= \text{---} \overset{\alpha}{\circ} \text{---} \overset{\beta}{\circ} \text{---} + \text{---} \overset{\alpha}{\circ} \text{---} \text{---} \overset{\beta}{\circ} \text{---}
 \end{aligned}$$

講義ノート 3.

$$\begin{aligned}
 & \langle \text{diagram with } \alpha, \beta, \alpha \text{ labels} \rangle = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} \\
 & \langle \text{diagram with } \alpha, \beta, \beta \text{ labels} \rangle = \text{diagram 3} + \text{diagram 4}
 \end{aligned}
 \tag{6.3}$$

### 7. mass operator と Intensity operator

平均のグリーン関数及び covariance を、閉じた積分方程式で表わすために、§6 で導入された「着物を着たダイアグラム」のうち connect されたものを次の様に定義する。 $\langle G \rangle$  に対するグラフについては、直線を一ヶ所のみで切ることによつて 2 つの部分に分けられないようなグラフを、connected diagram と呼ぶ。一方  $\langle G \otimes \bar{G} \rangle$  をあらわすグラフについては、2 本の直線を、それぞれ一ヶ所ずつ同時に切ることによつて 2 つの部分に分けられないようなグラフを connected diagram と呼ぶことにする。

$\langle G \rangle$  に寄与する全ての可能な connected diagrams の和を  $M$  又は  $\text{diagram with circle and cross}$  で表わし、これを「mass operator」と呼ぶ。すなわち

$$M \equiv \text{diagram with circle and cross} = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \dots
 \tag{7.1}$$

一次  $\langle G \otimes \bar{G} \rangle$  に寄与する全ての可能な connected diagrams の和を  $K$  又は  $\text{diagram with two vertical lines and cross}$  で表わし、これを、「Intensity operator」とよぶ。すなわち、

$$K \equiv \text{diagram with two vertical lines and cross} = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \text{diagram 5} + \dots
 \tag{7.2}$$

又、 $\langle G \rangle$  を二本線であらわすことになる。

$$\langle G \rangle : \text{diagram with two parallel horizontal lines}$$

いま、系が大きくて、 $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  となるが、その比  $N/V \rightarrow n$  は finite であるから、一般に

$$\frac{N(N-1) \cdots (N-s+1)}{s!} \rightarrow n^s$$

という近似が許されるであろう。\*) これが許されると仮定すると  $\langle G \rangle$  及び  $\langle G \otimes \bar{G} \rangle$  はそれぞれ  $M$  及び  $K$  を使って、

$$\langle G \rangle \equiv \text{---} = \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \quad (7.3)$$

$$\langle G \otimes \bar{G} \rangle = \text{---} + \text{---} \boxtimes \langle G \otimes \bar{G} \rangle \quad (7.4)$$

(7.3) は Dyson 方程式、(7.4) は Bethe-Salpeter 方程式と呼ばれるものである。

## 8. 相関のある等方的な点散乱子

等方的な点散乱子というのは、散乱演算子が次式で与えられるような理想的な散乱子のことである。

すなわち、

$$S_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi f \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1) \quad (8.1)$$

この様な散乱子に対しては、後方散乱が一般に無視できることを示そう。このために、次の二つのグラフからの寄与を比較してみよう。

$$\text{---} \circ \text{---} = -4\pi n f \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

$$\begin{aligned} \text{---} \text{---} \text{---} &= (-4\pi f)^3 n^2 \int |G^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r}_1 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= \frac{(-4\pi n)^2}{ik_0} f^3 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (8.2)$$

\*) 実際にはこの近似は正しくない。各 diagram の平均を、適当な cumulant 平均でおきかえると、この近似をしなくても、厳密に  $\langle G \rangle$  を Dyson 方程式で書くことができる。<sup>3)</sup>

講義ノート 3.

(8.1) と (8.2) を比べると、後方散乱が無視できる条件は

$$|4\pi n \mathcal{J}^2 / k_0| \ll 1 \quad (8.3)$$

である。  $4\pi |\mathcal{J}|^2$  は一散乱子に対する散乱断面積  $\sigma_{sc}$  であるから、(8.3) は

$$|n \sigma_{sc} / k_0| \ll 1 \quad (8.4)$$

となる。  $\sigma_{sc}$  は  $k_0^4 a^6$  のオーダーである濃度  $n$  は  $n \leq a^{-3}$  をみたすから、(8.4) の条件は結局  $|k_0 a|^3 \ll 1$  ということに帰し、これは明らかにみたされている。したがって (8.2) の様な後方散乱は、(8.1) のようなグラフに比べて無視できる程度に小さい。一般にもつと高次の後方散乱についても、上と同様の証明を行うことができ、上の場合同様  $|k_0 a|^3 \ll 1$  という状況の下で無視できることが示される。

もし、(8.4) の条件をみたす点散乱子を考えると、全ての link されたグラフは無視することができて、 $\langle G \rangle$  は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \langle G \rangle = & \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} + \dots \\ & + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} + \dots \end{aligned} \quad (8.5)$$

このうち、相関のない散乱子に対する平均のグリーン関数は

$$\langle G^{(1)} \rangle \equiv \text{~~~~~} = \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} + \dots \quad (8.6)$$

この近似は、結局、波数  $k_0$  を、有効波数  $k_{\text{eff}} = (k_0^2 + 4\pi n \mathcal{J}^2)^{1/2}$  とおきかえたことに相当する。  $G^{(0)}$  の代りに  $G^{(1)}$  を使つて  $\langle G \rangle$  をあらわすことができる。すなわち

$$\langle G \rangle = \text{~~~~~} + \text{~~~~~} \circ \text{~~~~~} + \text{~~~~~} \circ \text{~~~~~} \circ \text{~~~~~} + \dots \quad (8.7)$$

点線で結ばれている  $S$  次の相関のクラスターには、先に定義されたように

$g_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_S)$  が対応する。

上で記述した「等方的な点散乱子」の結果は、連続的なランダム媒質中の放射の問題と関係づけられることを示す。ランダムな連続媒質中で、1個の

point source により輻射される場合の平均の場の求め方を考えてみよう。

$k_{\text{eff}}$  を平均の波数、 $1+\hat{\mu}(\mathbf{r})$  をランダムな屈折率、 $\hat{\mu}(\mathbf{r})$  をランダム関数とする。  
(但し  $\langle \hat{\mu}(\mathbf{r}) \rangle = 0$ .) この時場についての波動関数は

$$[1 + k_{\text{eff}}^2 (1 + \hat{\mu}(\mathbf{r}))] \phi(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) \quad (8.8)$$

対応するグリーン関数のグラフによる展開は、

$$\langle G \rangle = \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} + \dots \quad (8.9)$$

ここで --- には  $G^{(1)}$  を、点  $\circ$  には  $-k_{\text{eff}}^2$  を対応させる。点線の  $\sqrt{\text{ランダム}}$  関数  $\hat{\mu}(\mathbf{r})$  の  $s$  点相関関数  $h_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_s)$  を対応させる。(8.7) と (8.9) は

$$(4\pi n)^2 g_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_s) = k_{\text{eff}}^{2s} h_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_s) \quad (8.10)$$

の時、トポロジカルに同値になる。したがって、不連続で等方的な点散乱子による散乱の問題は、連続媒質中の輻射の問題と (8.10) で関係づけられている。

## 9. グリーン関数の covariance と平均の強さ、

covariance  $\langle \phi \otimes \bar{\phi} \rangle$  から種々の物理量が求められるが、2.3の例は次のようなものである。

### (1) 場の covariance:

$$\langle \phi \otimes \bar{\phi} \rangle = \langle G \otimes \bar{G} \rangle_j \otimes \bar{j} \quad (9.1)$$

### (2) 平均の強さ:

$$I(\mathbf{r}) = \langle |\phi(\mathbf{r})|^2 \rangle \quad (9.2)$$

### (3) 平均の flux:

$$F(\mathbf{r}) = \langle \text{Re} \left[ \frac{\phi(\mathbf{r}) \nabla \phi(\mathbf{r})}{ik_0} \right] \rangle \quad (9.3)$$

いま、濃度が充分小さく、相関が無視できる場合を考えると、 $M$  と  $K$  はそれぞれ  $n$  に関して最低次までとつた近似が使える、すなわち

講義ノート 3 .

$$\left. \begin{aligned} M &= \text{---} \circ \text{---} \\ K &= \text{---} \circ \text{---} \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

すると、積分方程式は

$$\left. \begin{aligned} \text{---} &= \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \\ \langle G \otimes \bar{G} \rangle &= \text{---} + \text{---} \circ \langle G \otimes \bar{G} \rangle \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

となる。散乱演算子として (8.1) を使うと、場の covariance は

$$\begin{aligned} \langle \phi(r) \phi(r_1) \rangle &= \frac{e^{ik_{\text{eff}} \cdot r} e^{-ik_{\text{eff}} \cdot r_1}}{(-4\pi r)(-4\pi r_1)} \\ &+ \int \frac{e^{ik_{\text{eff}} |r-r'|} e^{-ik_{\text{eff}} |r_1-r'_1|}}{|r-r'| \times |r_1-r'_1|} n |\mathcal{J}|^2 \langle |\phi(r')|^2 \rangle \delta(r'-r'_1) dr' dr'_1 \end{aligned} \quad (9.6)$$

上式で  $r=r_1$  とおくことによつて、平均の強さ  $\langle |\phi(r)|^2 \rangle$  が求められる。 $k_{\text{eff}}$  を実数部分と虚数部分に分けて

$$k_{\text{eff}} = k' + ik'' \quad (9.7)$$

と書くとする、これを (9.6) に代入して  $I(r)$  が次の形に求まる。

$$I(r) = \frac{e^{-2k''r}}{16\pi^2 r^2} + n |\mathcal{J}|^2 \int \frac{e^{-2k'' |r-r'|}}{|r-r'|^2} I(r') d(r') \quad (9.8)$$

### References

- 1) M.Lax : Revs. Mod. Phys. 23 (1951), 287
- 2) U.Frisch : to be published.
- 3) F.Yonezawa and T.Matsubara : Prog. Theor. Phys. 35 (1966) 357.

(文責、米沢富美子)