

# Normal graded ring の rational singularity

又は canonical singularity になるための条件について.

都立大. 理 渡辺 敬一

$R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$  を normal graded ring で (1)  $R_0 = k$  は体で  $\text{ch}(k) = 0$  (2)  $R$  は  $k$  上有限生成 であるものとする。

このとき,  $R$  が rational singularity 又は canonical singularity になるための条件を環論的に記述するのが本稿の目的である。

§1. Rational singularity, canonical singularity の定義と簡単な性質.

$k$  は  $\text{ch}(k) = 0$  の代数閉体とする.

$X$  を  $k$  上の normal variety,  $f: \tilde{X} \rightarrow X$  を resolution とする.

定義.  $x \in X$  が rational singularity (又は  $\mathcal{O}_{X,x}$  が rational singularity)

$$\Leftrightarrow (R^i f_* (\mathcal{O}_{\tilde{X}}))_x = 0 \quad (\forall i \geq 1).$$

Grauert-Riemenschneider の vanishing theorem と relative duality により, この条件は次の 2 つの条件と同値である.

(a)  $\mathcal{O}_{X,x}$  は Cohen-Macaulay ring.

(b)  $(f_* \omega_{\tilde{X}})_x = \omega_{X,x}$ .

定義 (M. Reid)  $x \in X$  は canonical singularity とは

$$\begin{cases} \text{(i)} \exists r > 0, \omega_{X,x}^{[r]} \text{ は invertible } \mathcal{O}_{X,x}\text{-module} \\ \text{(ii)} f_*(\omega_X^{\otimes r})_x = \omega_{X,x}^{[r]} \text{ (} r \text{ は (i) の } r \text{)}. \end{cases}$$

の二つの条件をみたす事である。この条件は次の条件と同値である。

$$\begin{cases} \text{(i')} r \cdot \text{cl}(\omega_{X,x}) = 0 \text{ in } \text{cl}(\mathcal{O}_{X,x}). \text{ (} \text{cl}(\cdot) \text{ は divisor class group).} \\ \text{(ii')} f^*(\omega_X^{[r]}) \subset \omega_X \text{ (又は } f^*(\omega_X^{[r]}) = \omega_X(-\Delta), \Delta \geq 0 \text{) near } f(x). \end{cases}$$

但し,  $X_0 = \text{Reg}(X) \xrightarrow{i} X$  とし,  $\omega_X = i_*(\Omega_{X_0}^n)$ ,  $\omega_X^{[r]} = i_*(\Omega_{X_0}^n)^{\otimes r}$  ( $n = \dim X$ ) とする。また  $\omega_X|_{f^{-1}(x_0)} = \omega_X|_{X_0}$  と思う。

ここで "canonical singularity" の名前の由来を見よう。

$V$  は smooth proj. var. /  $k$ ,  $V$  は general type,  $R(V) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(V, \omega_V^{\otimes n})$  が f.g. /  $k$  としよう。 ( $V$ : gen. type  $\Leftrightarrow \text{tr. deg. } k R(V) = \dim V + 1$ .  $\Leftrightarrow \dim(\text{Proj}(R(V))) = \dim V$ ). (このとき  $V$  は "f.g. general type" という) すると次が成立する。

Proposition. (M. Reid)  $X$ : normal proj. var. /  $k$  のとき, 次は同値。

- (i)  $\exists r > 0$ ,  $\omega_X^{[r]}$  は invertible, ample,  $\exists f: \tilde{X} \rightarrow X$  resolution,  $f_*(\omega_{\tilde{X}}^{\otimes r}) = \omega_X^{[r]}$  (このとき  $X$  は "canonical var." という).
- (ii)  $\exists V$ : smooth proj. var. of f.g. general type /  $k$ ,  $\text{Proj}(R(V)) \cong X$ .

注意. (1) Gorenstein, rational sing. は canonical sing.

(2) canonical, Cohen-Macaulay sing. は rational である.

( canonical sing. で Cohen-Macaulay で ない 例は多分まだ存在してない,  $\dim X = 3$  のとき canonical sing.  $\Rightarrow$  C.-M. と Reid が示しているという.)

(3)  $\dim X = 2$  のとき, "canonical singularity" = "rat. dbl pt."

例. (1)  $X = \{f(x_0, \dots, x_n) = 0\} \subset \mathbb{A}^{n+1}$ ,  $x=0 \in X$  が 孤立特異点とある。このとき,

(a) (Kimio Watanabe)  $x \in X$  が rational singularity

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^n \deg X_i > \deg f.$$

(b) (M. Reid) もし  $x \in X$  が rational sing. なら,  $k[x_0, \dots, x_n]$  の任意の grading に関して,  $\sum_{i=0}^n \deg X_i > \deg f$  ( $= \min \{f$  にあらわれる monomial の degree $\}$ ).

(2). (Boutot). ring  $S$  (ess. of finite type /  $k$ ) が rat. sing. で  $R$  が  $S$  の subring,  $R$  加群として  $S$  の直和因子

$\Rightarrow R$  も rational singularity である。(これは本稿に於ては、非常に重要な役割を果たす)

有限群又は reductive な代数群による quotient singularity は従って rational singularity である。

(3)  $X$ : smooth proj. var.,  $\mathcal{L}$  は  $X$  上の ample inv. sheaf.

$$R = R(X, \mathcal{L}) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n}). \quad T^n \subset k(X)[T] \quad \text{とする.}$$

$\text{Spec}(R)$  は  $\mathcal{L}^{-1}$  に対応する line bdl の 0-section の contraction

このとき,

(a)  $R(X, \mathcal{L})$  が rational singularity  $\Leftrightarrow \forall p > 0, \forall n \geq 0, H^p(X, \mathcal{L}^{\otimes n}) = 0$ .

(b)  $R(X, \mathcal{L})$  が canonical singularity  $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{Z}, \exists r > 0, a \leq -r,$   
 $\omega_X^{\otimes a} \cong \mathcal{L}^{\otimes r}.$

従ってこのとき,  $R(X, \mathcal{L})$  が canonical ring. なら  $\omega_X^{-1}$  は ample となり, Kodaira vanishing theorem により  $R(X, \mathcal{L})$  は rational singularity になる。

## § 2. Rational singularity の判定.

$R$  を最初の条件をみたす normal graded ring とするとき, Demazure により,  $\exists D \in \text{Div}(X, \mathbb{Q})$  ( $X = \text{Proj}(R)$ ), s.t.  
 $R \cong R(X, D) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(nD))$  である事がわかる。  
 また,  $(X, D)$  の粗に對し,  $C^+ = \text{Spec}_X(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_X(nD))$ ,  
 $C = \text{Spec}_X(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(nD))$  とおくと,  $\Phi: C^+ \rightarrow \text{Spec}(R)$  が  
 存在し,  $\Phi|_C: C \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(R) - \{m\}$  ( $m = R_+ = \bigoplus_{n > 0} R_n$ ),  
 $\Phi(S^+) = \{m\}$  となる (  $S^+ = C^+ \setminus C$  ). これを図示  
 すると, 次のようになる。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & S^+ & \longrightarrow & \{m\} \\
 & \swarrow & \downarrow & & \cap \\
 X & \xleftarrow{\pi^+} & C^+ & \xrightarrow{\Phi} & \text{Spec}(R) \\
 & \nwarrow \pi & \uparrow & & \uparrow \\
 & & C & \xrightarrow{\sim} & \text{Spec}(R) - \{m\}
 \end{array}$$

(注) E.G.A. II, §8 の notation によれば,

$$C^+ \cong \text{Proj}(R^q) \cong \text{Spec}_X\left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_X(n)\right) \quad (\mathcal{O}_X(n) = \widetilde{R(n)})$$

である事が容易に確かめられる。

さて, §1 の例 (3) の  $R(X, \mathcal{L})$  に於て,  $C^+$  は smooth で, 従って  $\Phi$  は  $\text{Spec}(R)$  の resolution だった。一般には  $C^+$  は smooth でないが, もし  $C^+$  が rational singularity しかもたないとき,  $\text{Spec}(R)$  の resolution を  $C^+$  を経由してとる事により  $[f: \widetilde{X} \xrightarrow{g} C^+ \xrightarrow{\Phi} \text{Spec}(R)]$ ,  $R^q g_* (\mathcal{O}_{\widetilde{X}}) = 0$  ( $q > 0$ ), から Leray spectral sequence より,  $R^p f_* (\mathcal{O}_{\widetilde{X}}) \cong R^p \Phi_* (\mathcal{O}_{C^+}) \cong \bigoplus_{n \geq 0} H^p(X, \mathcal{O}_X(n)) \cong \bigoplus_{n \geq 0} H^p(X, \mathcal{O}_X(nD))$  を得る。

補題 1.  $C^+$  が rational singularity  $\Leftrightarrow \text{Spec}(R) - \{m\}$  が nat. sing.

(証明)  $\Rightarrow$  は  $\text{Spec}(R) - \{m\} \cong C \xrightarrow{\text{open}} C^+$  より自明。

$\Leftarrow$   $\text{Spec}(R) - \{m\} \cong \text{Spec}\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(nD)\right)$  が rational sing.

$\Rightarrow \left[\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(nD)\right][T]$  も so.  $\deg(T) = -1$  とおくと,

$\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_X(nD)$  は  $\left[\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(nD)\right][T]$  の degree 0 と同型:

$\left[\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(nD)\right][T]_0$  は  $\left[\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(nD)\right][T]$  の直和因子だから,

Boutot の定理により rational singularity である。

補題 2.  $R^p \Phi_* (\mathcal{O}_{C^+}) \cong H^p(C^+, \mathcal{O}_{C^+}) \cong \bigoplus_{n \geq 0} H^p(X, \mathcal{O}_X(nD)) \cong \bigoplus_{n \geq 0} [H_m^{p+1}(R)]_n$ .

( $p \geq 1$ )

(証明) [W], §2, 命題 1. 参照

以上の2つの補題により次を得る。

定理.  $\text{Spec}(R) - \{m\}$  が *rational singularity* のとき,

$$R^p f_* (\mathcal{O}_X) \cong \bigoplus_{n \geq 0} [H_m^{p+1}(R)]_n.$$

特に,  $R$  が *rational singularity*  $\Leftrightarrow R$  は *Cohen-Macaulay* かつ  $a(R) = 0$ .

[但し,  $\dim R = d$  のとき,  $a(R) \stackrel{\text{def.}}{=} \max \{i \mid (H_m^d(R))_i \neq 0\}$  であらう.]

$R$  が *Cohen-Macaulay* で,  $f \in R$  が  $\deg(f) = s$  の正則元 のとき,

$a(R/fR) = a(R) + s$  である, 不変量  $a(R)$  は環論的に計算可能な量であるといえる.]

例.  $R = k[x_1, \dots, x_{n+r}]/(f_1, \dots, f_r)$  が完全交叉 のとき,

$$a(R) = - \sum_{i=1}^{n+r} \deg(x_i) + \sum_{j=1}^r \deg(f_j). \quad \text{従って, } \text{Spec}(R) - \{m\}$$

が *rational singularity* のとき,  $R$  が *rational sing.*  $\Leftrightarrow \sum \deg x_i > \sum \deg f_j$ .

### §3. Canonical singularity の判定.

$X$  は normal proj. scheme /  $k$

$$D = \sum \frac{p_V}{q_V} \cdot V \in \text{Div}(X, \mathbb{Q}) \quad (\text{但し, } q_V > 0, (p_V, q_V) = 1 \ (\forall V)).$$

条件 "  $\exists N > 0, ND$  は ample Cartier divisor " をみたすとし,

$R = R(X, D)$  とする。また,

$$D' = \sum \frac{q_V - 1}{q_V} \cdot V \quad \text{とおく。} \quad C^+, S^+ \text{ 等は §2 の記号を使う。}$$

補題 1.  $\omega_{C^+} \cong \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_X(K_X + D' + nD)$ . (divisor の言葉で述べると,  $\text{div}_{C^+}(\omega_{C^+}) \equiv \pi^*(K_X + D') - S^+.$ )

(証明). 1°.  $D$  が ample Cartier divisor のときは知られている。

2°.  $(C^+)^{(n)} = \text{Spec}_X \left( \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_X(nD) \right)$  とおくとき,  $C^+ \rightarrow (C^+)^{(n)}$  は finite morphism であり,  $\omega_{C^+} \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_{C^+}}(\mathcal{O}_{C^+}, \omega_{(C^+)^{(n)}})$ . として求めることができる.

このとき,  $\Phi_*(\omega_{C^+}) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + D' + nD))$ ,  
 $\omega_R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + D' + nD))$  だから,  $a(R) = -\min\{i \mid (\omega_R)_i \neq 0\}$  であり,  
 $\sum \Phi_*(\omega_{C^+}) = \omega_R \Leftrightarrow a(R) < 0$ .

補題 2.  $\omega_R^{[r]} \cong R(a')$  のとき,  $\text{div}(\Phi^*(\omega_R^{[r]})) = r[\pi^*(K_X + D')] + a'S^+$

(証明).  $\Phi$  は  $S^+$  の contraction だから,  $\exists b \in \mathbb{Z}$ ,  
 $\text{div}(\Phi^*(\omega_R^{[r]})) = r \cdot \pi^*(K_X + D') + bS^+$ . しかるに,  $\omega_R^{[r]} \cong R(a')$   
 $\Leftrightarrow r(K_X + D') \equiv a'D$  in  $\text{Div}(X)$  と,  $\pi^*(D) \equiv -S^+$  と,  
 $\Phi^*(\omega_R^{[r]}) \otimes_{\mathcal{O}_{C^+}} \mathcal{O}_{S^+} \equiv \mathcal{O}_{S^+}$  に注意すると, 結果を得る.

$\text{Spec}(R)$  の resolution を

$f = [\tilde{X} \xrightarrow{g} C^+ \xrightarrow{\Phi} \text{Spec}(R)]$  と分解するとき,  $g_*(\omega_{\tilde{X}}^{\otimes r}) \subset \omega_{C^+}^{[r]}$  は常に成立するから,  $f_*(\omega_{\tilde{X}}^{\otimes r}) = \omega_R^{[r]}$  となるため  
 に,  $\Phi_*(\omega_{C^+}^{[r]}) = \omega_R^{[r]}$  となる事は必要条件である。従って,

定理. もし  $R(X, D)$  が canonical singularity  
 $\Rightarrow \exists r > 0$ ,  $r(K_X + D') \equiv a'D$  in  $\text{Div}(X)$  かつ  $a' \leq -r$ .

### § 3. Rational singularity のある環論的性質.

一般に,  $(A, m)$  は  $n$  次元 Noeth. local ring で,  $|A/m| = \infty$  とする.

このとき  $\mathfrak{o}_f = (t_1, \dots, t_n) \subset \mathfrak{m}$  で,  $\mathfrak{m}$  は integral over  $\mathfrak{o}_f$  であるものが存在する ( $\mathfrak{m}$  の minimal reduction). このとき,

$$t(A) = \min \{t \mid \mathfrak{m}^t \subset \mathfrak{o}_f\} \quad \text{とおこう.}$$

M. Artin, H. Laufer はそれぞれ, 2次元 rational sing., 2次元の "minimally elliptic" singularity に関してかなり詳しい環論的記述をしているが, この事は実は, それぞれ,

$t(A) \leq 2, 3$  である事から導く事ができる。また,  $t(A)=2$  で  $A$  が Cohen-Macaulay 又は  $t(A)=3$  で  $A$  が Gorenstein のとき, J. Sally は  $\hat{g}_{\text{sm}}(A)$  がそれぞれ Cohen-Macaulay, Gorenstein になる事を示している。  $t(A)$  に関し, 次のような事が知られている。

定理 [L-T].  $(A, \mathfrak{m})$  を ① regular local ring ② 2次元, rational singularity (任意標数) ③  $\text{cl}(\mathfrak{R})=0$  上 ess. of finiteness type 又は analytic な local ring で rational singularity.

のいずれかとする。  $\dim A = n$  のとき,  $\forall$  イデアル  $I \subset A$ ,  
 $\forall \lambda \geq 1$  に対し,  $\overline{I^{\lambda+n-1}} \subset I$  ( $\overline{\phantom{x}}$  は integral closure を示す.)

これを  $I = \mathfrak{o}_f$  に対して使うと, " $A$  が rational singularity,  $\dim A = n \Rightarrow t(A) \leq n$ " を得る。この事実の一つの応用として,

系.  $A$  が rational singularity で  $\dim A = n$ ,  $A$  が complete intersection  $\Rightarrow \text{emb.}(A) (= \dim_{\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \leq 2n-1$ .



問題. 一般に, 「 $(A, m)$  が rational singularity  $\Rightarrow \text{grm}(A)$  は Cohen-Macaulay (又は  $(A, m)$  が Gorenstein rational sing.  $\Rightarrow \text{grm}(A)$  が Gorenstein)」は成立するだろうか?

[追記] §3 の内容に関しては後藤四郎氏に教えられた点が多い。この場をお借りして感謝の意を表したい。

### References.

- [L-T] J. Lipman and B. Teissier: On a theorem of Briançon-Skoda about integral closures of ideals, (preprint).
- [R] M. Reid: Canonical 3-folds, (preprint, Warwick univ., September, 1979).
- [D] M. Demazure: Anneaux gradués normaux, preprint, C.N.R.S. 169, Mai 1979.
- [W] K. Watanabe: Some remarks concerning Demazure's construction of normal graded rings, 数理研究論集, 374 (1980).