

On positive contraction semi-groups

都立大 理 長谷川 実

§ 1. 以下取り扱う作用素はすべて線形作用素とする。

正の縮小作用素より成る半群 (略して PC 半群) $\Sigma \equiv \{T_t; t \geq 0\}$ を Banach 束 X 上で考える。 $\tilde{\Sigma} \equiv \{\tilde{T}_t; t \geq 0\}$ を他の PC 半群としたときに

$$\tilde{T}_t x \geq T_t x \quad (x \geq 0, t \geq 0)$$

が成り立つならば $\tilde{\Sigma}$ は Σ を dominate するという。

Markov 過程論における研究を背景として G.E.H. Reuter [1] は 次のような問題を 抽象空間 X において考えた:

(*) 与えられた PC 半群 Σ に対して これを dominate する PC 半群 $\tilde{\Sigma}$ を構成すること。

この論文 [1] に 次の結果が得られている。

定理 1-a 稠密な定義域を持つ作用素 A が PC 半群の生成作用素であるための条件は

$$(1) \quad (e, Ax) \leq 0 \quad (x \geq 0, x \in D(A))$$

ここで $(e, x) \equiv \|x^+\| - \|x^-\|$,

(2) 任意の $\lambda > 0$ に対して 正の解作用素 $R(\lambda; A) \equiv (\lambda I - A)^{-1}$ が X 上に存在する。

定理 1.b A を与えられた PC 半群 Σ の生成作用素とする。 $\tilde{A}$ を $D(\tilde{A}) = D(A)$ なる作用素とすると $\tilde{A}$ が Σ を dominate する PC 半群 $\tilde{\Sigma}$ の生成作用素であるための条件は

- (1) $(e, \tilde{A}x) \leq 0 \quad (x \geq 0, x \in D(A))$,
- (2) $\tilde{A}x \geq Ax \quad (x \geq 0, x \in D(A))$,
- (3) 定理 1.a の条件 (2) において A を $\tilde{A}$ で置き換えたもの。

特に

$$A_z x \equiv Ax - (e, Ax)z \quad (z \geq 0, 0 < \|z\| \leq 1)$$

は Σ を dominate する PC 半群 Σ_z の生成作用素となる。

これに続いて I. Miyadera [2] は次の結果を得た (記号を上記の通りにする) :

定理 2.b A と同じ定義域を持つ作用素 $\tilde{A}$ が Σ を dominate する PC 半群 $\tilde{\Sigma}$ の生成作用素であるための条件は

- (1) $\left. \begin{array}{l} \text{(1)} \\ \text{(2)} \end{array} \right\} \text{ 定理 1.b に同じ,}$

(3) 次の二つの条件のいずれかをみたすこと;

$$\text{i) } (I - (\tilde{A} - A)R(\lambda; A))X = X \quad (\lambda > 0),$$

$$\text{ii) } \sum_{k=0}^{\infty} \| \{ (\tilde{A} - A)R(\lambda; A) \}^k x \| < \infty \quad (\lambda > 0, x \geq 0).$$

また この論文 [2] では上記 Σ と異なる形の Σ を dominate する PC 半群の例が得られている。

この問題 (*) を任意の Banach 束 X 上で考えよう。このために R.S. Phillips [3] による 吉田-Hille の定理の 一つの变形を与える。

定理 3a 稠密な定義域を持つ作用素 A が PC 半群の生成作用素であるための条件は

- (1) $[Ax, x^+] \leq 0 \quad (x \in D(A))$,
- (2) $(I - A)D(A) = X$.

ここで $[x, y]$ は特別な半スカラー積である, 即ち $X \times X$ 上の次の条件をみたす実数値関数である:

$$\begin{aligned} [x+y, z] &= [x, z] + [y, z], \quad [\lambda x, y] = \lambda [x, y] \\ [x, x] &= \|x\|^2, \quad |[x, y]| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \\ [x, y] &\geq 0 \quad (x, y \geq 0), \quad [x, x^+] = \|x^+\|^2. \end{aligned}$$

A. Olubummo [4] はこの定理を用いて Reuter-Miyadera の結果が一般の Banach 束 X 上で成り立つことを示した。

定理 4b A を与えられた PC 半群 Σ の生成作用素とする。 A と同じ定義域を持つ作用素 $\tilde{A}$ が Σ を dominate する PC 半群 $\tilde{\Sigma}$ の生成作用素であるための条件は

- (1) $[\tilde{A}x, x^+] \leq 0 \quad (x \in D(A))$,
- (2) $\tilde{A}x \geq Ax \quad (x \geq 0, x \in D(A))$,

$$(5) \quad (I - (\tilde{A} - A)R(\alpha; A))X = X \quad (\alpha > 0).$$

ここで $B = \tilde{A} - A$ が X 上の有界作用素に拡張されるとき条件 (5) は不要である。

§ 2. ここでは定理 1a, 2b, 4a における条件 (3) の持つ役割について考える (5). Banach 空間 X が次の条件をみたすものと仮定する:

正の単調増加列 $\{\varepsilon_n\}$ が

$$\sup_n \|\varepsilon_n\| < \infty$$

をみたすならば、ある $x_0 \in X$ が存在して $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}\| = 0$ が成り立つ (例えば 小笠原隆文郎、東論 II)。

定理 5.1 A を与えられた PC 半群 Σ の生成作用素とする。 A と同じ定義域を持つ作用素 $\tilde{A}$ を A の適当な拡張が Σ を dominate する PC 半群 $\tilde{\Sigma}$ の生成作用素であったものの条件

$$(1) \quad \langle \tilde{A}x, x \rangle \leq 0 \quad (x \in D(A)),$$

$$(2) \quad \tilde{A}x \geq Ax \quad (x \geq 0, x \in D(A)).$$

この定理の証明の要約を記す。 $B = \tilde{A} - A$ とし

$$A_{n,\lambda} = A + (n-\lambda)BR(n; A) \quad (n \geq \lambda),$$

$$B_{n,\lambda} = A_{n+1,\lambda} - A_{n,\lambda}$$

$$= BR(n+1; A)(A-A)R(n; A) \quad (n \geq \lambda)$$

とおく。ここで $\sup_n \|B_{n,\lambda}\| \leq L < \infty$ である。

もし正の解作用素 $R(\lambda; A_{n,\lambda}) = (\lambda I - A_{n,\lambda})^{-1}$ が X 上に存在したとすると、 $\lambda R(\lambda; A_{n,\lambda})$ は解作用素であることとなる。任意の $x \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} & \lambda \|R(\lambda; A_{n,\lambda})x\|^2 \\ &= [\lambda R(\lambda; A_{n,\lambda})x, \lambda R(\lambda; A_{n,\lambda})x] \\ &\leq [(\lambda - \tilde{A})R(\lambda; A_{n,\lambda})x, R(\lambda; A_{n,\lambda})x] \\ &= [x, R(\lambda; A_{n,\lambda})x] \\ &= [BR(n; A)(\lambda - A)R(\lambda; A_{n,\lambda})x, R(\lambda; A_{n,\lambda})x] \\ &\leq [x, R(\lambda; A_{n,\lambda})x] \\ &\leq \|x\| \|R(\lambda; A_{n,\lambda})x\| \end{aligned}$$

これから任意の $x \in X$ に対して $\|R(\lambda; A_{n,\lambda})\| \leq 1$ を得る。

次に正の解作用素 $R(\lambda; A_{n,\lambda}) = (\lambda I - A_{n,\lambda})^{-1}$ が X 上に存在することを n に関する帰納法を用いて示そう。 $R(\lambda; A_{n,\lambda})$ の存在をある $n \geq 2 > L$ に對し示せば用意である。

$$\|B_{n,\lambda} R(\lambda; A_{n,\lambda})\| \leq \|B_{n,\lambda}\| \|R(\lambda; A_{n,\lambda})\| \leq 1$$

$$R(\lambda; A_{n+1,\lambda}) = \sum_{k=0}^{\infty} R(\lambda; A_{n,\lambda}) \{B_{n,\lambda} R(\lambda; A_{n,\lambda})\}^k$$

となり、しかも $B_{n,\lambda} R(\lambda; A_{n,\lambda})$ が正であることより

$$R(\lambda; A_{n+1,\lambda})x \geq R(\lambda; A_{n,\lambda})x \geq 0 \quad (x \geq 0).$$

を得る。また Banach 束 X に対する仮定から

$$\lim_{n, n' \rightarrow \infty} \|R(\lambda; A_{n, \lambda})x - R(\lambda; A_{n', \lambda})x\| = 0$$

を得る。次に

$$R(\lambda - \mu; A_{n, \lambda}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{k-1} R(\lambda; A_{n, \lambda})^k \quad (|\mu| < \lambda)$$

に注目すると、 $\{R(\lambda'; A_{n, \lambda})x\} \ (|\lambda'| < \lambda)$ も n に関する Cauchy 列となり、 $\lambda' R(\lambda'; A_{n, \lambda}) \ (0 < \lambda' < \lambda)$ は正の縮小作用素である。

$$\tilde{R}(\lambda; A_k)x \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} R(\lambda; A_{n, k})x \quad (x \in X)$$

とおく。 $\{\tilde{R}(\lambda; A_k); \lambda \leq k\}$ は

$$(1) \quad \tilde{R}(\lambda; A_k) - \tilde{R}(\lambda'; A_k) = (\lambda' - \lambda) \tilde{R}(\lambda; A_k) \tilde{R}(\lambda'; A_k) \quad (\lambda, \lambda' \leq k),$$

$$(2) \quad \lambda \|\tilde{R}(\lambda; A_k)\| \leq 1$$

$$(3) \quad \tilde{R}(\lambda; A_{k'}) = R(\lambda; A_k) \quad (\lambda < k < k')$$

をみたすことがわかる。よって

$$\tilde{R}(\lambda) \equiv \tilde{R}(\lambda; A_k) \quad (\lambda \leq k)$$

とおけば $E = \lambda I - \tilde{R}(\lambda)^{-1}$ が Σ を dominate する PC 半群 $\tilde{\Sigma}$ の生成作用素であり、 E は $\tilde{A}$ の閉拡張になっている。並は明らかである。

この証明において X に関する仮定は重要な役割を担っていて、この方法では一般の Banach 束においてこの証明をそのまま使うことは出来ない。一般の Banach 束における定理 5.6 に対応する結果についての議論はまだ出されていないようである。

る。最後にこの定理における条件(1)は $X \times X$ 上の実数値関数 $\tau(x, y) = \lim_{a \rightarrow 0+} a^{-1} (\|x + ay\| - \|x\|)$ によって

$$(1') \quad \tau(x, \tilde{A}x) \leq 0 \quad (x \in D(\tilde{A}))$$

で置き換えられることに注意する (M. Hasegawa, On contraction semi-groups and (di)-operators, J. Math. Soc. Japan 18(1966), 290-302)。また定理 3.a, 4b における条件 (1) もそれぞれ

$$(1') \quad \tau'(x^+, Ax) \leq 0 \quad (x \in D(A))$$

$$(1') \quad \tau'(x^+, \tilde{A}x) \leq 0 \quad (x \in D(\tilde{A}))$$

で置き換えられる。ここで

$$\tau'(x, y) = \frac{1}{2} \{ \tau(x, y) - \tau(x, -y) \}.$$

佐藤健一氏の On the generators of non-negative contraction semi-groups in Banach lattices (to appear) にこの方面に関する新しい結果が見られる。

文 献

- [1] G. E. H. Reuter, A note on contraction semi-groups, Math. Scand. 3(1955), 275-280.
- [2] I. Miyadera, A note on contraction semi-groups of operators, Tôhoku Math. J. II (1961), 679-698.
- [3] R. S. Phillips, Semi-groups of positive contraction

operators, Czechoslovak Math. J. 12 (1962), 294-313.

[4] A. Olubummo, A note on perturbation theory of semi-groups of operators, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1964), 818-822.

[5] M. Hasegawa, On the convergence of resolvents of operators, Pacific J. Math. 21 (1967), 35-47.