

回転ボーズ・アインシュタイン系の渦糸状態

町田 昌彦 (Masahiko Machida), 佐々成正 (Narimasa Sasa)

日本原子力研究所 (Japan Atomic Energy Research Institute)

〒 110-0015 東京都台東区東上野 6-9-3 (6-9-3 Higashi-Ueno, Taito-ku, Tokyo 110-0015)

住友上野ビル 8階

松本秀樹 (Hideki Matsumoto)

筑波大学 (University of Tsukuba) 数理物質科学研究科物理学専攻

〒 305-8571 茨城県つくば市天王台 1-1-1 (1-1-1 Tennodai, Tsukuba, Ibaraki 305-8571)

最近、希薄原子ガスのボーズアインシュタイン凝縮系の回転状態における渦糸構造やその生成及び消滅メカニズムが注目されている。本研究では、この回転ボーズアインシュタイン凝縮系において渦糸がどのように生成されたり消滅したりするかをグロス・ピタエフスキー (Gross-Pitaevskii) 方程式の数値シミュレーション結果を通して議論する。さて、最近の回転ボーズアインシュタイン系に対する多くの実験 [1] 及び理論的研究 [2, 3] は、渦糸が一般に凝縮体の端から生成されることを明らかにした。これは、凝縮体が 1 つの巨視的波動関数から構成されており、至る所、回転フリーの条件が満足される完全流体であることから当然の帰結であるといえることができる。つまり、波動関数の特異点である渦糸は、波動関数の定義域内から自動的に生成できるものでなく、波動関数の連結性が途切れた端からしか導入することができないからである。さて、この数学的に自明な見解に立ち、これまでの理論及び実験研究を見直してみると、実は、連結性が失われる端での、真の渦糸生成及び消滅を見出したわけではなく、端から入るといふ事実の確認だけであるという点が浮かび上がってくる。実際、実験ではトーマスフェルミ端という凝縮密度が急激に減少する端が端としての観測限界であり、これは、決して波動関数連結性が失われる端とは一致していない。事実、数値シミュレーションは、トーマスフェルミ端を越えても波動関数の連結性は破れていないばかりか、渦糸さえ定義できる (幽霊渦糸) ことを示唆してきた [2], [3]。しかしながら、その数値シミュレーションもまた、十分な計算サイズを取っていないことから、連結性が破れる端には到達しておらず、真の渦糸生成の瞬間を見ることには成功していない。こうして、渦糸の生成及び消滅のメカニズムは、最後の詰めを欠き、未だ曖昧なまま、残されていると言えよう。そこで、我々は、波動関数の連結性が失われる端、即ち、渦糸の生成・消滅が真におこる端を探すため、大規模な数値シミュレーション (しかも 3 次元) を行うことにした。その結果、その端がシャープに存在することを 3 次元的に始めて示すことに成功し、実際、そこから、渦糸が生成されたり消滅したりすることを確かめた。本論文では、この数値シミュレーション結果の一部を報告し、渦糸生成や消滅を議論する他、渦糸格子と凝縮体の形についての議論も行い、上記の概念 (連結性が失われる端の存在) がどのようにして実験により確かめられうるかも明らかにする。

I. 序論

渦糸は、我々の住む世界の至る所で現れる、とても興味深い対象 (現象) である。それは、世界が持つ並進対称性を破る一方で、渦糸中心を軸に回転対称性を持つ。従って、流れは同心円状に形成され、流れ場の強さは $1/r$ に比例して同心円の中心に向かって増大する。しかし、この増大は、渦糸中心 (つまりコア) にて物質密度が急激に減少することにより発散が抑えられるため、渦糸は、低エネルギー励起として、我々にとってとてもなじみ深い現象となっている。さて、このありふれた対象である渦糸は、実は、量子力学が成り立つ世界においても、やはり、ありふれた低エネルギー励起、但し、量子化された渦糸として重要な役割を果たしていることが分かっている [4]。

では、この量子渦糸の構造やそのダイナミクス (生成及び消滅等) を研究する最適な系とは、何であろうか? これに関して、最近、希薄原子ガスのボーズアインシュタイン凝縮系が多くの研究者の興味を惹いている。これは、この系が次のように渦糸の観測にとって非常に有利な点を備えているからである。1) 希薄原子ガス・ボーズアインシュタイン系のダイナミクスの時間スケールは、渦糸の運動を直接、キャッチできるほど十分にゆっくりである (時間スケールは、 10^{-3} 秒のオーダーである [1])。これに対し、超流動 He^4 や超伝導では、 $10^{-6} \sim 10^{-9}$ 秒のオーダーである [5])。2) 渦糸の構造を調べる際、その中心、即ちコアのスケールが問題であるが、希薄原子ガス・ボーズアインシュタイン系では、そのサイズが十分に大きい (その大きさは、 $10^{-6} m$ 以上である一方、超伝導では、 $10^{-9} \sim 10^{-8}$ であり [5]、超流動 He^4 に至っては、 10^{-10} のオーダーである [4])。

この有利な系において、渦糸生成のダイナミクス、つまり、どこで、どのように、渦糸が生まれるのかという基本的且つ本質的な問いは、1999 年ごろから精力的に研究されてきた。その結果、まず、凝縮体表面に四重極モードが励起され、それが高周波モードへとカスケードした後、トーマス・フェルミ端内に渦糸が侵入する様子が実験的に確かめられた [1]。このシナリオは、実際、グロス・ピタエフスキー方程式の数値シミュレーションによっても確かめられている [2], [3]。これらの結果は、明らかに渦糸は凝縮体の端から現れ、十分発達している凝縮体の中からは生まれえないことを意味している。これは、数学的には、特異点は、決して、波動関数 (スカラー複素関数) の連結性が失われる端以外から

は侵入できないということの間接的証左であり、実験結果は、凝縮体が正に上記の数学的制限を有する完全流体としての性質を本当に維持していることを示したと言えよう。

さて、これらの結果によって、我々は、渦糸がどこでどのように生まれてくるかを真に理解することができたのだろうか？我々の答えは、未だ不十分であり、ノーである。なぜなら、実験も理論も（特に数値シミュレーション）、上に記したように、波動関数の連結性が失われる真の端を見出す事には成功していないからである（これは、少なくとも、渦糸がどこで生まれるかは理解していないということである）。実際、一般に実験で観測可能な端は、いわゆる、トーマス・フェルミ端であり、そこは、凝縮体密度が急激に減少する場所であるに過ぎず、波動関数の連結性がそこで失われているかどうかについては、これまでの実験だけからは、結論づけることはできない。事実、多くの数値シミュレーションは、そこを超えても、波動関数は生き残ることを示し、波動関数の位相構造は、依然としてトーマス・フェルミ端より遥かに遠くにおいても存在していることを示している [2], [3], [6]。こうして、数値シミュレーションは、波動関数の構造を実験以上の高精度で捉えることができるため、その連結性が失われる端の存在をも捉えることに成功しているものと期待するが、これまでのシミュレーションでは、実はシミュレーション領域が小さいため、その端を捉えるには至っておらず、渦糸の生成及び消滅の真のメカニズムは曖昧のまま残されていることが分る。こうした現状の下、本当の渦糸の生成及び消滅の瞬間を見るため、我々は、大規模なグロス・ピタエフスキー方程式の3次元数値シミュレーションを行い、波動関数の連結性が破れる端を見つけ出すことを試みた。

II. モデル方程式と数値シミュレーション

散逸の効果を現象論的に含む回転系でのグロス・ピタエフスキー方程式は、既に幾つかの論文にて示されている [2], [3]。これらのモデル方程式は、トラップポテンシャルと遠心力の項を持っている。我々は、この方程式を非線形シュレディンガー方程式を解くために発達してきたシンプレティック・インテグレータ [8] を基に開発したスプリッティング法 [7] を用いることで直接数値積分し、回転系での凝縮体のダイナミクスを高精度で追跡する。また、我々は、運動エネルギーの項を計算するためフーリエ変換を用い、計算精度をさらに高めることにした。それらの数値シミュレーションスキームの詳細は、著者の一人である佐々による講究録記事（同巻）を参照されたい。

数値シミュレーションで用いられる領域は、トーマス・フェルミ球（トーマス・フェルミ端で囲まれた3次元領域）より遥かに大きく取られ、シミュレーションの端では、波動関数の振幅は 10^{-16} のオーダー、即ち、数値計算の標準的最小精度に至るまで十分に減衰するほどの大きさに取られた。また、積分する時間スケールは、実時間単位で最大で、10秒にも及んだ。これは、実験においても十分に長い時間スケールである。一方、シミュレーションで用いる粒子数は、おおよそ、 10^5 程度であり、これも実験で良く見られるような粒子数である。さらに、トラップポテンシャルは、簡単のため、その空間異方性比は、全て1とした。従って、回転（例えば、 z 軸が回転軸方向に取られる）が系に与えられない場合、凝縮体の形は等方的な球になる。これも、また、実験的にはしばしば用いられる条件である。

III. 数値シミュレーション結果と考察

数値シミュレーション結果を示そう。図1(a)は、回転振動数 $\omega = 0.8\Omega$ (Ω は、トラップポテンシャルの振動数) を系に付与した場合に得られた定常状態での波動関数・振幅の絶対値 ($=0.05$) の等値面である。それは、ほぼ、トーマス・フェルミ端を表している。トーマス・フェルミ端に囲まれているトーマス・フェルミ球は、回転による遠心力のため、相対的に扁平になっており、10個の渦糸が中で格子を組んでいることが分る。図1(b)は、図1(a)の定常状態に対し、 y 軸の中心（原点）で xz 面を切り取った断面図であり、波動関数・振幅の絶対値の分布図である。この図で、絶対値の識別限界は、 10^{-2} 程度であるため、いわゆるトーマス・フェルミ端の外側では、絶対値が均一にゼロとなっているように見える。しかし、実際は、 10^{-2} 以下のオーダーで存在している。この様子を明らかにするため、図中、i), ii), iii) とラベルされた位置での $\tan^{-1} \frac{\text{Im}(\Psi)}{\text{Re}(\Psi)}$ （ここで、 Ψ は、波動関数であり、この量は、波動関数の位相に相当している）の xy 断面図を i), ii), iii) に示した。これらの位相の分布図は、これまで、回転凝縮体の位相構造と渦糸位置との関係を示すため、しばしば、報告されている [2], [6]。しかし、既発表の図と違い、本論文の図は、凝縮体周辺の3次元的な位相分布を与えており、初めての例であることを指摘したい。これらの3つのパネルにおいて、渦糸中心は、黒色か、灰色にて表現されている。ここで、黒色で示されている渦糸中心は、その3次元的に伸びる渦糸がトーマス・フェルミ端を通過し、トーマス・フェルミ球内を横切るものである一方、灰色で示されているものは、トーマス・フェルミ端内に全く入らないものである。こうして、トーマス・フェルミ端を実験的観測限界とすると、数値シミュレーションは、2つの渦糸があることを示したことになる（即ち、観測可能な渦糸と観測限界外の幽霊渦糸 [2], [3]）。

さて、図1のそれら3つの挿入図で最も重要なメッセージは、位相分布構造にはっきりとした境界があることである。その境界は、明らかに、円状に周期的な部分と全くランダムな部分とに分けられている。この結果は、境界の外側では、全くランダムに位相が変動していることを意味しているが、これは、グロス・ピタエフスキー方程式の解としての決定論的構造が計算機が持つ精度以下で生じる数値ノイズにより完全に破壊されていることを物語っている。さて、そのような位相分布が本当にリアルなもので計算機による人為的なものかどうかを調べるため、我々は、熱揺らぎのモデルとして用いられるランジュバンノイズを含む数値シミュレーション [9], [10] を行ってみた。その結果は、定性的には全く

同じで、図のようにはっきりとした境界が観測される一方、境界端の位置は、ノイズの変動振幅により変化することが分った。これらの結果から、トーマス・フェルミ端の外側には、揺らぎによりグロス・ピタエフスキー方程式の決定論的構造が破壊される端があり、その内側では、波動関数は決定論的構造を維持する一方、外側では、決定論的構造の破壊により波動関数の連結性が失われる領域があることが分かる。

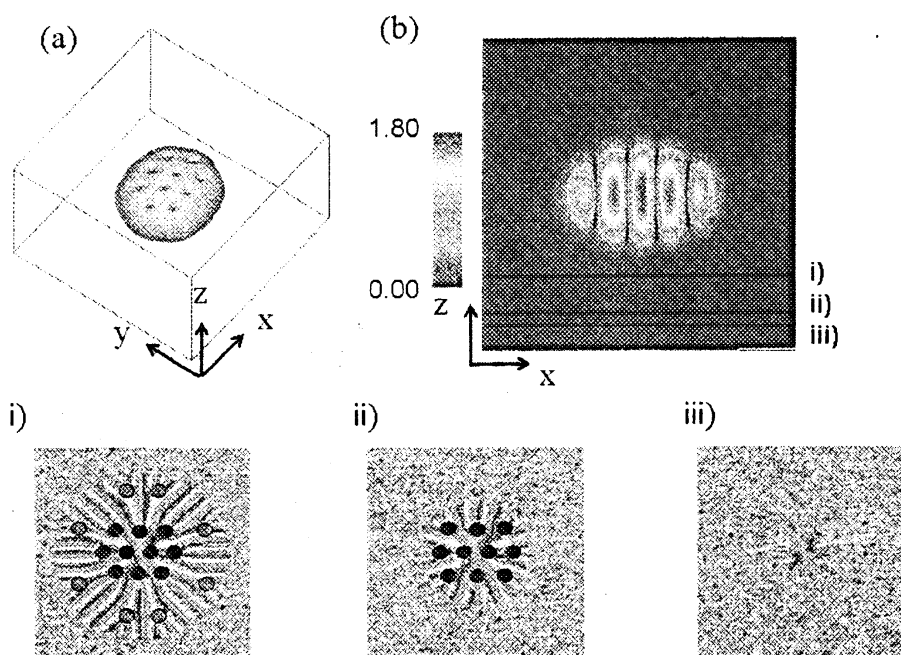


図1 (a): 回転振動数 $\omega = 0.8\Omega$ (Ω は、トラップポテンシャルの振動数) を系に付与した場合に得られた定常状態で波動関数・振幅の絶対値 ($=0.05$) の等値面。ほぼ、凝縮体のトーマス・フェルミ端を表している。(b): 波動関数振幅の絶対値の xz ($y=0$) 断面分布図。i), ii), iii): $\tan^{-1} \frac{\text{Im}(\Psi)}{\text{Re}(\Psi)}$ の xy (z 座標は、(b) に図示) 断面分布図 (Ψ は、波動関数であり、この量は、波動関数の位相に相当する)。

ここで、次の考察をしよう。なぜ、上で見た境界(端)は、それほどにシャープなのだろうか? 図を見直しても、非常にシャープである。このシャープさは、ランジュバンノイズを加えたり、その変動振幅を変えても、全く変らない。我々は、このシャープな端の構造が磁場中第二種超伝導体で見られる磁束渦糸格子の融解に伴う一次相転移現象から理解できると考えた [5]。以下にその理由を説明する。さて、第二種超伝導体では、磁場や温度を上げると超伝導巨視的波動関数・振幅の絶対値平均は減少し、ある臨界温度及び磁場値では、揺らぎの効果によって、その静的な安定性を失い、常に揺らいだ振る舞いを示すこと(これが、アブリコソフ磁束格子の融解である)が知られている。そして、この現象は、これまでの非常に多くの研究により、一次相転移として実現されることが分ってきた。一方、回転ボーズ・アインシュタイン凝縮体系においても、凝縮体中心から外側に向かうときは、トラップポテンシャルにより波動関数・振幅の絶対値は減少し、どこかで、揺らぎによる影響を受け、グロス・ピタエフスキー方程式の決定論的構造が失われることが予想できる。そして、その決定論的構造の喪失は、磁場中超伝導と回転ボーズ・アインシュタイン系のダイナミクスを記述する方程式が同等であることから、理論的には一次相転移的に相の変遷が起ると期待され、一次転移点近傍で現れる2相境界のドメイン境界のシャープさを反映した構造が相境界で現ると考えられる。

図2は、上で見た波動関数の決定論的構造が失われる端とトーマス・フェルミ端の両方を同時に示した図である。図では、凝縮体の中心から外側に行くにつれ、まず、波動関数の絶対値が急激に減少するトーマス・フェルミ端が現れ、その後で、決定論的構造が破れるもう一つの端が現れる2重殻構造を持つことを示している。さて、その2つの端だが、一体、渦糸は、どちらからどのように生まれてくるのだろうか? この問いの答えは、既に記してきたように明らかである。即ち、決定論的構造が破れる端で渦糸が始めて系内に侵入する。なぜなら、その端は、波動関数の連結性も破れている端でもあり、特異点である渦糸は、そこから侵入する以外にないからである。また、この考察は、言い換えると次の事を物語っている。決定論的構造が破れた領域では、波動関数の連結性が時間・空間的に失われているため、領域内のどこでも渦糸は励起されることができる。そして、その励起された渦糸は、その端を通して、決定論的に従う内部領域に供給されることが考えられる。実際、我々の数値シミュレーションによれば、決定論的構造を示す領域内での渦糸は、図2に示したように端の赤道上でループ状の形で生まれ(その端から中に入る)、より内側に向けて押し出されて成長し、その後、トーマス・フェルミ端内に侵入してくることが分った。しかも、一度、その端で生成された渦糸は、途中で消滅することではなく、消滅もその端に達して初めて起こるのである。

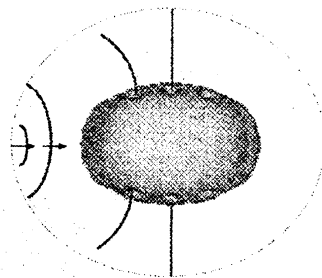


図2: y 方向からみた、凝縮体の全体像。トーマス・フェルミ端(ここでは、 $|\Psi| = 0.05$ の条件を満たす等値面を図示)が淡灰色で図示されている一方、波動関数の決定論的構造が失われる端が点線にて図示されている。渦糸(実曲線)の生成及び成長が模式的に図示されている。

次にこの渦糸の生成・消滅のシナリオと共に、高回転下での凝縮体のダイナミクスを見ていこう。図3は、いわゆる、観測可能な渦糸とトーマス・フェルミ端の外側に存在する幽霊渦糸を合わせた総渦糸数 (N_{tot}) と、観測可能な渦糸数のみ (N_v) の回転振動数依存性を示している。この結果を得る条件として、我々は、回転数を低いところから少し増加させ、その都度、定常に至っていることを確認し、さらに少し増加させるということを行った。図から、分るように、まず、 N_{tot} が回転数の増加と共に増え、その後、 N_v がそれに引きずられて増加していく様子が分る。これは、正に上で述べたような、渦糸の生成及び成長メカニズムが実現されているからである。つまり、渦糸は、一旦、波動関数の決定論的構造が破れる端から中に入り、しばらくの間、幽霊渦糸としてトーマス・フェルミ端外で待機し、その後、トーマス・フェルミ端内へと侵入するのである。この結果は、明らかに渦糸が初めて産声を上げるのは、トーマス・フェルミ端ではなく、その外側にある端であることを意味しているのである。

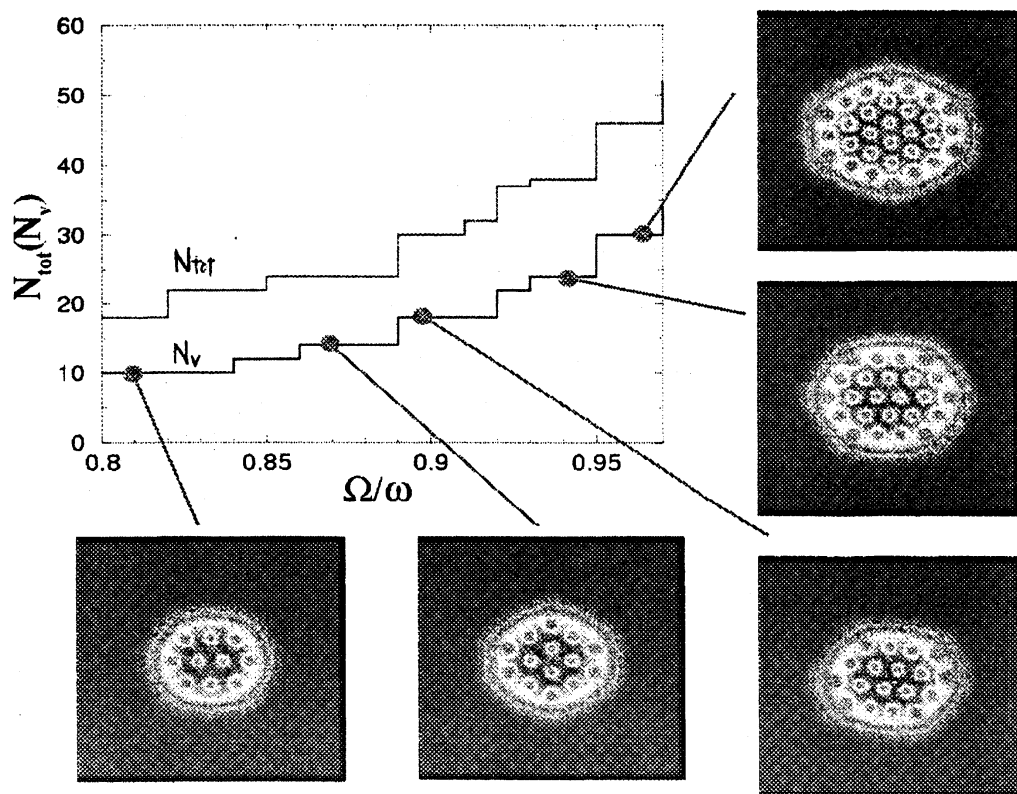


図3. 観測可能な渦糸と幽霊渦糸を合わせた総渦糸数 (N_{tot}) と、観測可能な渦糸数のみ (N_v) の回転振動数依存性。図中、代表的回転数での波動関数・振幅絶対値の xy 断面 ($z=0$) 分布図が挿入されている。

次に、図3の各代表的回転数における凝縮体の波動関数・振幅絶対値の2次元断面図に注目しよう。凝縮体は、共通の形状を持つが、一般に遠心力下で期待される円状ではなく、多角形で、基本図形は、六角形であることが分る。この回転対称性の破れは、数値シミュレーションだけでなく、しばしば、実験においても見受けられる[11]。我々は、この六角形の形成に、観測可能な渦糸だけでなく、幽霊渦糸が関与していることを見出した。図4は、代表的な回転数における凝縮体の位相構造を示すと同時に、観測可能な渦糸と幽霊渦糸の位置の両方を示している。また、点線は、図3の挿入図で見たトーマス・フェルミ端である。これらの図から分るように、トーマス・フェルミ端は幽霊渦糸と観測可能な渦糸との間にあることが分る一方、幽霊渦糸と観測可能な渦糸は、全体で一つの三角格子を形成していることが分る(両渦糸間のいわゆる格子間距離は、伸びてはいるが)。これらの事実から、なぜ、凝縮体の形が六角形を取るかが次のように説明される。まず、もし、幽霊渦糸が全くいない場合を考えると、凝縮体は、六角形より円状の形状をとることは明らかである。これは、遠心力がある場合、最も、そのエネルギーを低く保つ唯一の形状であるからである。しかしながら、幽霊渦糸がいて、全体で図のような格子を形成している場合は、円への凝縮体の変形は阻害される。なぜなら、幽霊渦糸の位置をそのままに、円形をとった場合、幽霊渦糸による渦糸周辺の円周流れの成分が凝縮体表面に現れ、エネルギー的に損をするからである(六角形のトーマス・フェルミ端は、ちょうど、その表面で流れが消失するような配置となっている)。また、幽霊渦糸の配置を変えて、円状に形状を適合させようとすると、今度は、全体の格子構造が壊れてしまい(円と三角格子をきっちり、適合させることは、所詮、不可能である)、これもエネルギー的に安定な点からの逸脱を意味する。これらのことから、本論文で示してきたように、トーマス・フェルミ端の外側に波動関数の決定論的構造が破れる端があり、そこから、渦糸が生成されるような場合は、2種類の渦糸が基本的に存在し、それら全体で作る格子に合わせてトーマス・フェルミ端が適合するという方策を系が選択するということが分る。従って、凝縮体の六角形構造は、2種類の端の存在とその間で待機する幽霊渦糸の存在を間接的に証明していることになる。

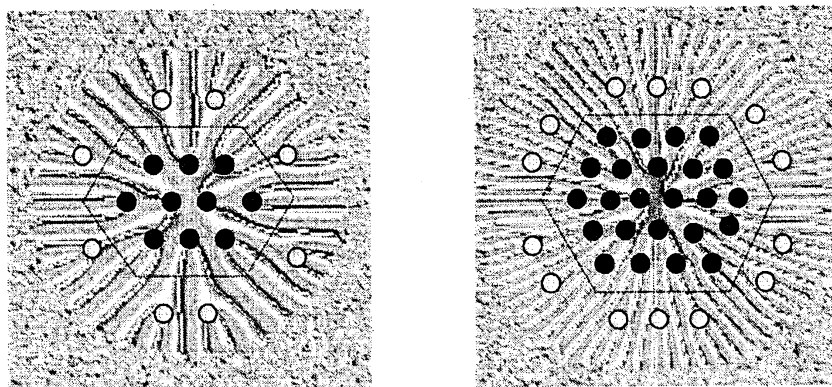


図4 代表的回転数下での、位相の $xy(z=0)$ 断面分布図。黒丸及び淡黒(灰色)丸は、トーマス・フェルミ球内を通過する及び通過しない渦糸の中心を示している。点線は、トーマス・フェルミ端である。

IV. 結論

我々は、回転ボーズ・アインシュタイン系をシミュレートするためグロス・ピタエフスキー方程式の大規模数値シミュレーションを行い、波動関数が決定論的構造を持つ領域とランダムに揺動する領域の2つに分離される境界が存在するということを示してきた。この境界は、波動関数の絶対値の振幅が急激に減少するトーマス・フェルミ端より、遠くに位置し、波動関数の連結性が揺らぎにより破れてしまう端である。従って、系が持つ揺らぎの強さによりその位置は変りうるということが期待されるが、十分に低温で回転数が小さい場合は、その位置は、トーマス・フェルミ端より十分遠い位置に存在すると考えられる。一方、この端の存在は、系が回転系であろうとなかろうと存在するが、回転系では、渦糸(特異点)の生成及び消滅を引き起こす場所として、特に重要な役割を果たすことが分った。これは、数学的に言い換えると、完全流体中に特異点を引き入れるため、連結性を破る端が、物理的に妥当な理由と共に存在するということの意味している。我々は、本研究において、この端を発見し、未完の渦糸生成・消滅のシナリオを完結させることができたと思っている。

V. 謝辞

著者2名(町田及び佐々)は、大阪市立大・笠松及び坪田氏に対し、有益な議論に対する謝意を示す。また、町田は、筑波大・大橋及び東北大・小山氏にも有益な議論に対して感謝する他、龍谷大・森田氏には、議論と支援に対し感謝する。最後に、数値計算を行うに当たっての支援に対し原研・計算科学技術推進センター・スタッフ一同に感謝する。

- [1] Madison, K.W., Chevy, F., Bretin, V., and Dalibard, D., Stationary States of a Rotating Bose-Einstein Condensate: Route to Vortex Nucleation., *Phys. Rev. Lett.*, 86, 4443-4446(2001).
- [2] Tsubota, M., Kasamatsu, K., and Ueda, M., Vortex Lattice Formation in a Rotating Bose-Einstein Condensate., *Phys. Rev. A* 65, 023603 (2002).
- [3] Penckwitt, A.A., Ballagh, R.J., and Gardiner, C.W., Nucleation, Growth, and Stabilization of Bose-Einstein Condensate Vortex Lattices., *P. Phys. Rev. Lett.*, 89, 260402(2002).
- [4] Donnelly, R.J., *Quantized Vortices in Helium II* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1991).
- [5] Blatter, G., Feigel'man, M.V., Geshkenbein, V.B., Larkin, A.I., and Vinokur, V.M., Vortices in high-temperature superconductors. *Rev. Mod. Phys.*, 66, 1125-1388(1994).
- [6] Butts, D.A. and Rokhsar, D.S., Predicted Signature of Rotating Bose-Einstein Condensates, *Nature* 397, 327-329 (1999).
- [7] Herbst, B.M., Varadi, F., and Ablowitz, M.J., Symplectic methods for the nonlinear Schrodinger equation, *Math. Comput. Simulation* 37, 353-369 (1994).
- [8] Goldman, D. and Sirovich, L., *Quart. Appl. Math.* 53, 315 (1995).
- [9] Kato, R., Enomoto, Y., and Maekawa, S., Effect of the surface boundary on the magnetization process in type II superconductors. *Phys. Rev. B* 47, 8016-8024(1993).
- [10] Machida, M., Tanaka, A., and Tachiki, M., Direct numerical experiments for interlayer Josephson plasma and fluctuation of vortices in layered high-Tc superconductors. *Physica C* 288, 199-207(1997).
- [11] Madison, K.W., Chevy, F., Wohlleben, W., and Dalibard, J., *Phys. Rev. Lett.*, 84, 806-809(2000).