

最適経路 — フィボナッチから黄金へ —

九州大学 岩本 誠一 (Seiichi Iwamoto)

Professor emeritus, Kyushu University

Fukuoka 813-0012, Japan

email: iwamotodp@kyudai.jp

1 はじめに

本論文では、フィボナッチ経路と、その極限である黄金経路がそれぞれ最適になる 2 次計画問題を提示する。併せて、主問題と双対問題の間に (1) 相補双対性 と (2) シフト双対性 が成り立つことを示す。

以下では、フィボナッチを適宜フィボと略している。

2 黄金数とフィボナッチ数

実数

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$$

は**黄金数**(Golden number) といわれている $[1, 2, 8]$ 。黄金数については次が成り立つ。

$$1 : \phi = \phi^{-2} : \phi^{-1}, \quad \phi^{-2} + \phi^{-1} = 1$$

$$\phi^{-2} = 2 - \phi = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0.382, \quad \phi^{-1} = \phi - 1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0.618$$

他方、黄金数 ϕ は 2 次方程式

$$x^2 - x - 1 = 0 \tag{1}$$

の正の解としても定義される。この 2 次方程式を**黄金**(Golden) という。ときに**フィボナッチ**(Fibonacci) ともいわれる。黄金 2 次方程式は 2 つの実数解 ϕ とその**共役**(conjugate) $\bar{\phi} := 1 - \phi$ をもつ。このとき、

$$\bar{\phi} = -\phi^{-1} \approx -0.618$$

$$\phi + \bar{\phi} = 1, \quad \phi \cdot \bar{\phi} = -1.$$

さて、**フィボナッチ数列**(Fibonacci sequence) $\{F_n\}$ は 2 階線形差分方程式

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0 \quad x_0 = 0, x_1 = 1 \tag{2}$$

の解として定義される (表 1) $[1, 2, 8]$ 。

n	$\cdots$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\cdots$
F_n	$\cdots$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	$\cdots$

表 1 フィボナッチ数列 $\{F_n\}$

隣り合うフィボナッチ数の比の2つの極限はそれぞれ黄金数とその共役になる：

補題 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \bar{\phi}.$$

3 黄金経路とフィボナッチ経路

3.1 黄金経路

定義 1 列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ は

$$x_n = c\phi^{-2n} \quad \text{または} \quad x_n = c\phi^{-n}$$

のとき、**黄金経路** (Golden path, GP) という。ただし、 c は定数である。前者を $1:\phi$ 型といい、後者を $\phi:1$ 型という (図 1、図 2)。

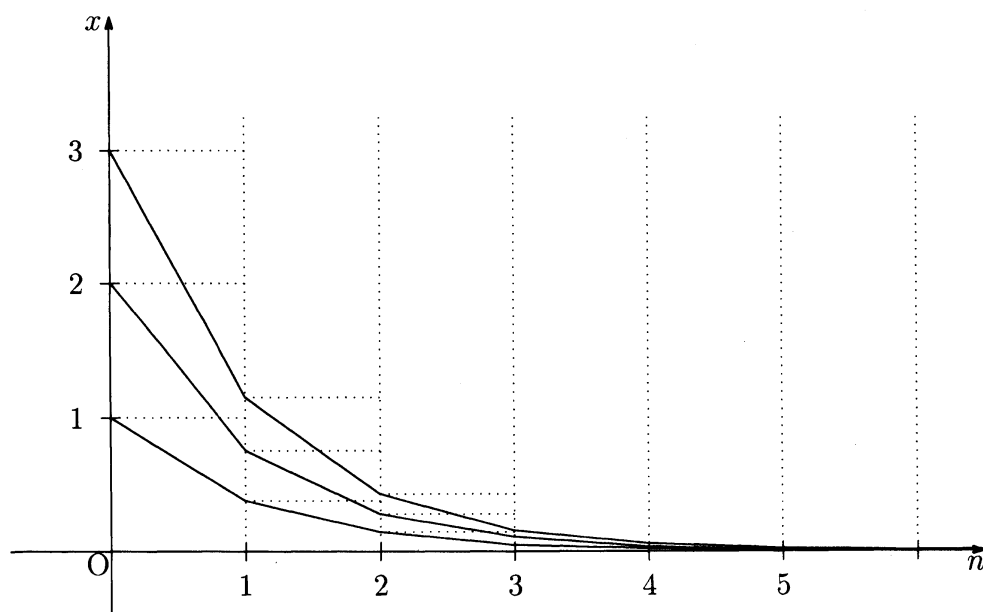


図 1 黄金経路 ($1:\phi$ 型) $x_n = c\phi^{-2n}$ $c = 1, 2, 3$

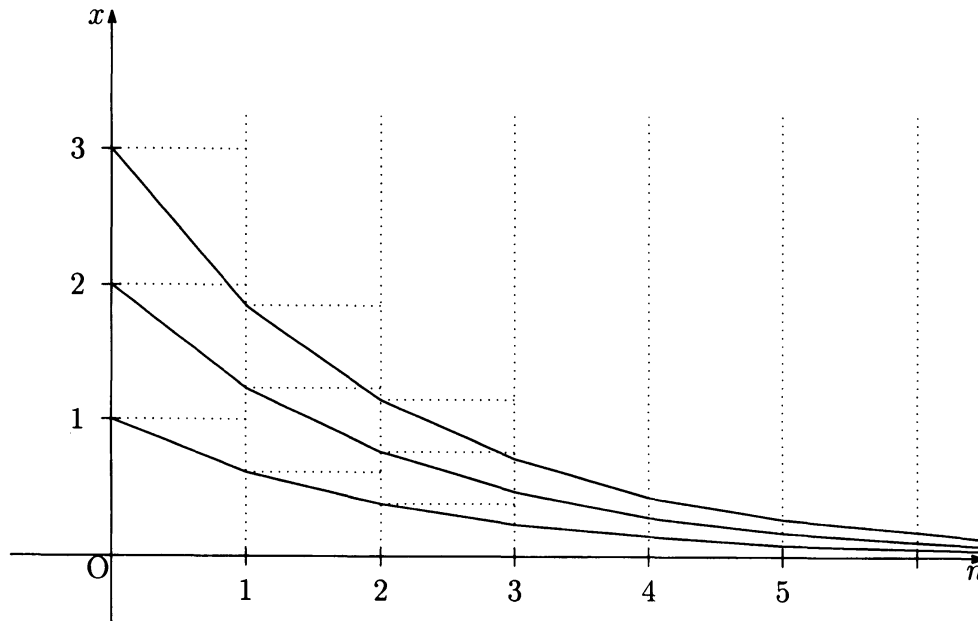


図 2 黄金経路 ($\phi:1$ 型) $x_n = c\phi^{-n}$ $c = 1, 2, 3$

3.2 フィボナッチ経路

定義 2 列 $\{x_k\}_1^n$ は $(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_{n-1}, x_n)$ が

$$c(F_{m+2n-1}, F_{m+2n-3}, \dots, F_{m+2n-2k+1}, \dots, F_{m+3}, F_{m+1})$$

または

$$c(F_{m+n}, F_{m+n-1}, \dots, F_{m+n-k+1}, \dots, F_{m+2}, F_{m+1})$$

のとき、フィボナッチ経路 (Fibonacci path, FP) という。前者を 4:6 型といい、後者を 6:4 型という。

4 最適フィボナッチ経路

この節では 2 つの型のフィボナッチ経路が 2 次計画で最適であることを示す。

4.1 4:6 型

この小節では、 $(n+1)$ 変数 $x = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ を次のように評価する。すなわち、初期値 x_0 を定数 c に固定して、 x 自身の大きさと相隣る量とのずれをともに平方和で評価し、さらに終端値の平方 x_n^2 にフィボナッチ比 $\frac{F_m}{F_{m+1}}$ を加重として掛けた総和で評価する。ただし、 m は非負の整数とする。この小節では、この評価値を最小にする問題を主問題とし、この双対問題を考える。

4.1.1 主問題 (P₁)

まず、4:6 型の主問題として、次の n 変数 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ の最小化問題を考えよう。

$$(P_1) \quad \begin{aligned} & \text{minimize} \quad \sum_{k=0}^{n-1} [(x_k - x_{k+1})^2 + x_{k+1}^2] + \frac{F_m}{F_{m+1}} x_n^2 \\ & \text{subject to} \quad (i) \ x \in R^n, \quad (ii) \ x_0 = c. \end{aligned}$$

ここに $c \in R^1$, $m \geq 0$ とする。

定理 1 主問題 (P₁) は

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_k, \dots, \hat{x}_{n-1}, \hat{x}_n) \\ &= \frac{c}{F_{m+2n+1}} (F_{m+2n-1}, F_{m+2n-3}, \dots, F_{m+2n-2k+1}, \dots, F_{m+3}, F_{m+1}) \end{aligned}$$

のとき、最小値 $m = \frac{F_{m+2n}}{F_{m+2n+1}} c^2$ をもつ。

最小点 $\hat{x}$ は 4:6 型フィボナッチ経路になっている。

4.1.2 双対問題 (D₁)

今度は、主問題の双対問題を考えよう。主問題 (P₁) の双対問題は n 変数 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ の最大化問題として次で与えられる：

$$(D_1) \quad \begin{aligned} & \text{Maximize} \quad 2c\mu_1 - \sum_{k=1}^{n-1} [\mu_k^2 + (\mu_k - \mu_{k+1})^2] - \frac{F_{m+3}}{F_{m+2}} \mu_n^2 \\ & \text{subject to} \quad (i) \ \mu \in R^n. \end{aligned}$$

定理 2 双対問題 (D₁) は

$$\begin{aligned} \mu^* &= (\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_k^*, \dots, \mu_{n-1}^*, \mu_n^*) \\ &= \frac{c}{F_{m+2n+1}} (F_{m+2n}, F_{m+2n-2}, \dots, F_{m+2n-2k}, \dots, F_{m+4}, F_{m+2}) \end{aligned}$$

のとき、最大値 $M = \frac{F_{m+2n}}{F_{m+2n+1}} c^2$ をもつ。

最大点 μ^* も 4:6 型フィボナッチ経路になっている。

4.1.3 フィボナッチ相補双対

主問題 (P₁) の最小解と双対問題 (D₁) の最大解の間には次の 3 つの関係が成り立っている。

1. (双対性) 最小値と最大値が等しい: $m = M$. 共に初期値 c の 2 次関数で、その係数は相隣るフィボ数の比 $\frac{F_{m+2n}}{F_{m+2n+1}}$ である。
2. (2 段階フィボナッチ) 最小点 $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ と最大点 $(\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_n^*)$ は共にフィボ数列の後ろ向き 2 段跳びである。
3. (相補フィボナッチ) 最大点と最小点を交互に編むと、後ろ向きフィボ数列になる。

すなわち、最適点の交互列は

$$\begin{aligned}
 & (\mu_1^*, \hat{x}_1, \mu_2^*, \hat{x}_2, \dots, \mu_k^*, \hat{x}_k, \dots, \mu_{n-1}^*, \hat{x}_{n-1}, \mu_n^*, \hat{x}_n) \\
 &= \frac{c}{F_{m+2n+1}} (F_{m+2n}, F_{m+2n-1}, F_{m+2n-2}, F_{m+2n-3}, \dots, F_{m+2n-2k}, \\
 & \quad F_{m+2n-2k-1}, \dots, F_{m+4}, F_{m+3}, F_{m+2}, F_{m+1})
 \end{aligned}$$

となる。

この三位一体の関係をフィボナッチ相補双対性 (Fibonacci complementary duality, FCD) という [5]。映画『ダ・ヴィンチ・コード』(2006) では、 $m = 0$, $n = 4$, $c = F_9 = 34$ のときが、暗号 [ダ・ヴィンチ・コード] として用いられている。

4.2 6:4 型

以下では m, n を自然数として、フィボナッチ数列

$$F_m, F_{m+1}, \dots, F_{m+n-1}, F_{m+n}$$

を係数にもつ n 変数の 2 次計画問題の主問題とその双対問題を考える。

4.2.1 主問題 (P₂)

まず、主問題として

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \left[F_{m+n-k} (x_k - x_{k+1})^2 + \frac{F_{m+n-k-1}^2}{F_{m+n-k}} x_{k+1}^2 \right] + \frac{F_{m-1} F_m}{F_{m+1}} x_n^2 \\
 (P_2) \quad & \text{subject to} \quad \text{(i) } x \in R^n, \quad \text{(ii) } x_0 = c
 \end{aligned}$$

を考える。

定理 3 主問題 (P₂) は

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \left(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_k, \dots, \hat{x}_{n-1}, \hat{x}_n \right) \\ &= \frac{c}{F_{m+n+1}} \left(F_{m+n}, F_{m+n-1}, \dots, F_{m+n-k+1}, \dots, F_{m+2}, F_{m+1} \right)\end{aligned}$$

のとき、最小値 $m = \frac{F_{m+n-1}F_{m+n}}{F_{m+n+1}}c^2$ をもつ。

この最小点 $\hat{x}$ は 6:4 型フィボナッチ経路になっている。

4.2.2 双対問題 (D₂)

主問題 (P₂) の双対問題は

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & 2cF_{m+n}\mu_1 - \sum_{k=1}^{n-1} F_{m+n-k+1} \left[\mu_k^2 + \left(\frac{F_{m+n-k+1}}{F_{m+n-k}} \mu_k - \mu_{k+1} \right)^2 \right] \\ (D_2) \quad & - \frac{F_{m+1}F_{m+2}}{F_m} \mu_n^2 \\ \text{subject to} \quad & (i) \mu \in R^n \end{aligned}$$

で表わされる。

定理 4 双対問題 (D₂) は

$$\begin{aligned}\mu^* &= \left(\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_k^*, \dots, \mu_{n-1}^*, \mu_n^* \right) \\ &= \frac{c}{F_{m+n+1}} \left(F_{m+n-1}, F_{m+n-2}, \dots, F_{m+n-k}, \dots, F_{m+1}, F_m \right)\end{aligned}$$

のとき、最大値 $M = \frac{F_{m+n-1}F_{m+n}}{F_{m+n+1}}c^2$ をもつ。

この最大点 μ^* は 6:4 型フィボナッチ経路である。

4.2.3 フィボナッチシフト双対

主問題 (P₂) の最小解と双対問題 (D₂) の最大解の間には次の 3 つの関係が成り立っている。

1. (双対性) 最小値と最大値が等しい: $m = M$. 共に初期値 c の 2 次関数で、その係数は 3 連フィボ数の比 $\frac{F_{m+n-1}F_{m+n}}{F_{m+n+1}}$ である。
2. (フィボナッチ) 最小点 $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n-1}, \hat{x}_n)$ と最大点 $(\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_{n-1}^*, \mu_n^*)$ は共にフィボ数列の後ろ向きである。

3. (シフト) 最大点 μ^* は最小点 $\hat{x}$ を1段シフトした点になる:

$$\mu_k^* = \hat{x}_{k+1} \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

すなわち

$$\left(\hat{x}, \frac{F_m}{F_{m+n+1}} c \right) = \left(\frac{F_{m+n}}{F_{m+n+1}} c, \mu^* \right).$$

この関係をフィボナッチシフト双対性 (Fibonacci sift duality, FSD) という。

5 最適黄金経路

この節では、前節の 4:6 型および 6:4 型に対応する無限変数版としてそれぞれ $1:\phi$ 型と $\phi:1$ 型を考察し、2つの型の黄金最適経路を与える。

5.1 $1:\phi$ 型

前節の主問題 (P₁) と双対問題 (D₁) の無限変数版はそれぞれ次の (P₃) と (D₃) になる。
すなわち、主問題

$$\begin{aligned} (P_3) \quad & \text{minimize} \quad \sum_{n=0}^{\infty} [(x_n - x_{n+1})^2 + x_{n+1}^2] \\ & \text{subject to} \quad (i) \ x \in R^{\infty} \quad (ii) \ x_0 = c \end{aligned}$$

と双対問題

$$\begin{aligned} (D_3) \quad & \text{Maximize} \quad 2c\mu_1 - \mu_1^2 - \sum_{n=1}^{\infty} [(\mu_n - \mu_{n+1})^2 + \mu_{n+1}^2] \\ & \text{subject to} \quad (i) \ \mu \in R^{\infty} \end{aligned}$$

を考える。

定理 5 ([7]) (i) 主問題 (P₃) は

$$\hat{x} = (x_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, \dots) = c(1, \phi^{-2}, \phi^{-4}, \dots, \phi^{-2n}, \dots)$$

で最小値 $m = \phi^{-1}c^2$ をもつ。

(ii) 双対問題 (D₃) は

$$\mu^* = (\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*, \dots, \mu_n^*, \dots) = c(\phi^{-1}, \phi^{-3}, \phi^{-5}, \dots, \phi^{-(2n-1)}, \dots)$$

で最大値 $M = \phi^{-1}c^2$ をもつ。

5.1.1 黄金相補双対

主問題 (P₃) の最小解と双対問題 (D₃) の最大解の間には次の3つの関係が成り立っている。

1. (双対性) 最小値と最大値が等しい: $m = M$. 共に初期値 c の2次関数で、その係数は黄金数の逆数 ϕ^{-1} である。
2. (黄金) 最小点 $(x_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, \dots)$ と最大点 $(\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_n^*, \dots)$ は共に $1:\phi$ 型の黄金経路である。
3. (相補性) 最小点と最大点を交互に編むと、 $\phi:1$ 型の黄金経路である。

すなわち、最適点の交互列は

$$\begin{aligned} & (x_0, \mu_1^*, \hat{x}_1, \mu_2^*, \hat{x}_2, \dots, \mu_n^*, \hat{x}_n, \dots) \\ & = c(1, \phi^{-1}, \phi^{-2}, \phi^{-3}, \dots, \phi^{-(2n-1)}, \phi^{-2n}, \dots) \end{aligned}$$

となる。

この三位一体の関係を黄金相補双対性 (Golden complementary duality, GCD) という [3, 4, 6, 7]。

5.2 $\phi:1$ 型

主問題 (P₂) と双対問題 (D₂) の目的関数を F_{m+n} で割って $n \rightarrow \infty$ とすると、主問題と双対問題はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} (P_4) \quad & \text{minimize} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{-n} [(x_n - x_{n+1})^2 + \phi^{-2} x_{n+1}^2] \\ & \text{subject to} \quad (i) \ x \in R^{\infty} \quad (ii) \ x_0 = c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D_4) \quad & \text{Maximize} \quad 2c\mu_1 - \sum_{n=1}^{\infty} \phi^{-(n-1)} [\mu_n^2 + (\phi\mu_n - \mu_{n+1})^2] \\ & \text{subject to} \quad (i) \ \mu \in R^{\infty}. \end{aligned}$$

定理 6 (i) 主問題 (P₄) は

$$\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, \dots) = c(\phi^{-1}, \phi^{-2}, \dots, \phi^{-n}, \dots)$$

で最小値 $m = \phi^{-2}c^2$ をもつ。

(ii) 双対問題 (D₄) は

$$\mu^* = (\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_n^*, \dots) = c(\phi^{-2}, \phi^{-3}, \dots, \phi^{-(n+1)}, \dots)$$

で最大値 $M = \phi^{-2}c^2$ をもつ。

5.2.1 黄金シフト双対

主問題 (P_4) と双対問題 (D_4) の最適解の間には次の3つの関係が成り立っている。

1. (双対性) 最小値と最大値が等しい: $m = M$. 共に初期値 c の2次関数で、その係数は黄金数の平方逆数 ϕ^{-2} である。
2. (黄金) 最小点 $(x_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, \dots)$ と最大点 $(\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_n^*, \dots)$ は共に $\phi:1$ 型の黄金経路である。
3. (シフト性) 最大点は最小点を1時点右にシフトさせた黄金経路である。

すなわち、

$$(\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_n^*, \dots) = (\hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_{n+1}, \dots)$$

となる。

この関係を黄金シフト双対性 (Golden shift duality, GSD) という。

参考文献

- [1] Beutelspacher, A. and Petri, B., 『黄金分割 — 自然と数理と芸術と — 』(柳井浩訳), 共立出版, 2005 年; (Original) *Der Goldene Schnitt 2, überarbeitete und erweiterte Auflage*, Heidelberg, Elsevier GmbH, Spectrum Akademischer Verlag, 1996.
- [2] Dunlap, R.A., 『黄金比とフィボナッチ数』(岩永恭雄・松井講介訳), 日本評論社, 2003 年; (Original) *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., 1977.
- [3] 岩本 誠一, 「動学的最適化における黄金最適政策、小特集: 経済分析と最適化の数理」, 三田学会雑誌 (慶應義塾経済学会), 第 99 巻 4 号, 2007 年, pp.101–125.
- [4] Iwamoto, S., “Golden optimal policy in calculus of variation and dynamic programming,” *Advances in Mathematical Economics* Vol.10, 2007, pp.65–89.
- [5] Iwamoto, S. and Kira, A., “The Fibonacci complementary duality in quadratic programming,” Ed. Takahashi, W. and Tanaka, T., *Proceedings of the 5th Intl. Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2007 Taiwan)*, Yokohama, Yokohama Publishers, 2009, pp.63–73.
- [6] Iwamoto, S. and Yasuda, M., “Golden optimal path in discrete-time dynamic optimization processes,” Ed. Elaydi, et al., *Advanced Studies in Pure Mathematics* Vol.53, *Advances in Discrete Dynamic Systems*, 2009, pp.77–86.
- [7] Kira, A. and Iwamoto, S., “Golden complementary dual in quadratic optimization,” *Modeling Decisions for Artificial Intelligence*, Springer-Verlag Lecture Notes in Artificial Intelligence, Vol.5285, 2008, pp.191–202.
- [8] 中村 滋, 『フィボナッチ数の小宇宙 — フィボナッチ数、リュカ数、黄金分割 — 』第 2 版, 日本評論社, 2008 年.