

平面ポアズイユ乱流の数値実験と二、三の考察

名大 工学部 桑原 真二

§1. まえがき

Reynolds以来, 乱流について非常に多くの研究がなされてきた。Taylor, Kolmogorov等の成功により、一様、等方性乱流に多くの努力がはらわれた。最近では他の物理の分野との交流もさかんになり、たとえば、場の量子論や統計物理学でもさかんにならるグリーン関数の方法等の手法がもたらわれようになった。

今日, "乱流"を明確に定義することはむずかしいように思われる。しかし、ほとんどすべての流体力学者が乱流とみとめる流れがある。たとえば、臨界レイノルズ数を十分上回る状態における、管内の流れ、境界層の流れ、けいり物体の伴流等がそれである。さて、このような"乱れた"流れの特徴は何であろうか。まず、現象を特徴づけるパラメーターが非常に多いことである。たとえば、運動場を振動数あるいは波数分析すれば、非常に多くの振動数、波数と

るであらう。いわば、時間的にも、空間的にも非常に多くの特徴的時間および長さが存在することになる。

一方、どんな乱流でもはじめは層流であり、層流を經過して、乱流状態に遷移する。それ故、遷移の機構は乱流を理解する上で非常に重要である。実際、平行流について考えてみると、擾乱をフーリエ成分にわけて表わしうるとすると、はじめはある一つのフーリエ成分が選択的に成長し、ついで、フーリエ成分間の相互作用によって、多くの成分を励起し、ついに連続スペクトルまで成長する。

又、十分発達した定常乱流は、一種の統計的、力学的平衡状態にあると考えるべき。エネルギー的にみれば、升からのエネルギーの供給（管流では圧力勾配、境界層流、小さい物体の伴流では、物体にくわわる力）によって、多くの擾乱の成分（モード）が励起し、モード間の相互作用によって更に小さいモードにエネルギーがうつり、最後は粘性の散逸作用によって、熱になってしめる。そして、この一連の過程が、外部パラメター（圧力勾配等）に対応してきまると種の統計的平衡状態にあると考えるべき。

以上の考察から、乱流を次のように特徴づけざることになる。

① 乱流は非常に多くのパラメター（^{モード}モード）をもってゐる。

- ② 外部パラメータの値に対応して、ある統計的平衡状態に近接する傾向をもっており、定常乱流は、そのような平衡に到達した状態と考へられる。

§2. 流れの記述と基礎方程式

こゝでは、平面ポアズイユ乱流を考察する。物理的には、層流のポアズイユが存在しているとし、それに初期擾乱を与えたとする、どのようにして統計的平衡に到達するかを考察する。時間の経過とともに、流れはいろいろの状態をへめぐるであろうが、(平均的) 圧力勾配は一定に保っておくものとする。そこで、単位時間には断面を通過する流量は、一般に一定でなく、時間的に変化する。実際の流れでは、十分長い有限のダクトの両端の圧力差を一定に保っておくことに対応している。それ故、レイノルズ数を平均流量としての速度 U にもとづいてつくると、時間的に変化することになり、² 便宜なので、圧力勾配に対応する層流の最大流速をその基準にとりこける。

乱流の速度場 $w(x, t)$ 、圧力場 $p(x, t)$ は Navier-Stokes 方程式にしたがうものとす。

$$\operatorname{div} w = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (w \cdot \operatorname{grad}) w = - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta w \quad (2.2)$$

ここで ν は動粘性率である。 また

$$v = \bar{u} + \tilde{u} \quad p = \bar{p} + \tilde{p} \quad (2.3)$$

$$\bar{u} = (\bar{u}(y), 0, 0) ; \quad \bar{p} = -\alpha x, \quad \alpha = \text{const.} \quad (2.4)$$

と分解し, $\bar{u}, \bar{p}$ とし 2 層流解をとる:

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} = -\frac{\alpha}{\rho \nu}. \quad (2.5)$$

上のとおり; 物理的状況では, 圧力変動 $\tilde{p}$ は平均値の 0 と考えられるが, 速度変動 $\tilde{u}$ の平均値は一般に 0 とはならない。 実際, レイノルズ応力による基本流へのフィードバックを考慮すると (2.5) は

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} = -\frac{\alpha}{\rho \nu} + \frac{1}{\nu} \langle (\tilde{u} \cdot \text{grad}) \tilde{u} \rangle \quad (2.6)$$

と書きかえなければならない。 ここで, $\langle \rangle$ は統計的平均をあらわす。 したがって, レイノルズ応力によるフィードバックは $\tilde{u}$ の中をふくめられているから, $\tilde{u}$ の中には全流量の変化に対応するゆっくりと変化す成分をふくんでいる。

^{の位置}
壁を $y=0$, a と考え, 境界条件

$$\bar{u} = 0, \quad y = 0, a$$

のもとに, (2.5) を解くと

$$\frac{\bar{u}}{U} = 4 \frac{y}{a} \left(1 - \frac{y}{a}\right), \quad U = \frac{\alpha a^2}{8 \alpha \nu} \quad (2.7)$$

という。 ここで U は層流平均ポアズイユ流の最大速度である。 (2.3) を (2.2) に代入し, 更に

$$U t / a \rightarrow t, \quad x / a \rightarrow x, \quad v, \bar{u}, \tilde{u} / U \rightarrow v, \bar{u}, \tilde{u},$$

cf

$$\bar{p}/\rho\sigma^2 \rightarrow \bar{p}$$

の無次元化を行うと, 変動成分に対する方程式となる:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \text{grad}) \tilde{u} + (\tilde{u} \cdot \text{grad}) \bar{u} + (\tilde{u} \cdot \text{grad}) \tilde{u} \\ = -\text{grad } \tilde{p} + \frac{1}{R} \Delta \tilde{u}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

(2.7) は無次元化すると

$$\bar{u} = 4y(1-y) \quad (2.9)$$

となる。レイノルズ数は

$$R = \frac{Ua}{\nu} \quad (2.10)$$

で定義される。

更に, 数学的に簡単にするために, 上の仮定を ^{おと} ~~おと~~ する。

i) 擾乱は 2 次元である。

ii) 2 方向の周期的境界条件を ~~おと~~ ^{もつ}。

i) の仮定は, 解析を次の段階ではのぞかぬであろう。 ii) については, これは周期 2 とするが, 2 の値を大きくすると, 近似をよく成すことが出来る。

さて, 流れの場を完備な正規直交関数系で展開することを考えよう。上の仮定を考慮して, 正規直交関数系に次の条件を課する:

$$(W_{lm}, W_{np}) \equiv \int_0^1 \int_{-1}^1 W_{lm}(x)^* W_{np}(x) dx dy = \delta_{ln} \delta_{mp} \quad (2.11)$$

$$\text{div } W_{lm} = 0 \quad (2.12)$$

$$W_{lm} = 0 \quad \text{固定壁において} \quad (2.13)$$

$$V_{lm}: \text{周期境界条件を満足する} \quad (2.14)$$

ここで ψ は任意被演算子, l, m は可能なすべての値にわたるものとする。そこで

$$\tilde{\psi}(x, t) = \sum_{l, m} a_{lm}(t) V_{lm}(x) \quad (2.15)$$

のように展開可能と仮定する。

(2.11) ~ (2.14) を満足する直交関数系をつくるために,

$$u_{lm}(x) = \frac{\partial \psi_{lm}}{\partial y}, \quad v_{lm}(x) = -\frac{\partial \psi_{lm}}{\partial x} \quad (2.16)$$

$$\psi_{lm}(x) = \varphi_l(x) f_{lm}(y) \quad (2.17)$$

$$\varphi_l(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi l x} \quad (2.18)$$

とおけば, (2.12), (2.14) の条件は満足される。ここで

$\varphi_l(x)$ は ^{正規} 直交条件:

$$(\varphi_l, \varphi_m) \equiv \int_{-1}^1 \varphi_l(x)^* \varphi_m(x) dx = \delta_{lm} \quad (2.19)$$

を満足している。(2.16) ~ (2.18) から

$$u_{lm} = \varphi_l(x) f'_{lm}(y), \quad v_{lm} = -\pi i l \varphi_l(x) f_{lm}(y) \quad (2.20)$$

を用いる。そこで, (2.13) の ^{境界} 条件は

$$f_{lm}(y) = f'_{lm}(y) = 0 \quad y=0, 1 \quad (l \neq 0) \quad (2.21)$$

となる。 $l=0$ の場合は、(2.13) 以外の条件から, 境界条件を定めなければならない。(2.16), (2.18) から

$$u_{0m} = \frac{1}{\sqrt{2}} f'_{0m}(y), \quad v_{0m} = 0 \quad (2.22)$$

となり、このばあいには平行流となる。

さて、(2.8) の x -成分は、境界条件 $\bar{u} = \tilde{u} = 0$ ($y=0, 1$) のため、 $y=0, 1$ において

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} = R \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \quad (2.23)$$

となる。また、 $\tilde{p}$ は周期条件を満足するため

$$\tilde{p}(-1, y) = \tilde{p}(1, y) \quad y=0, 1 \quad (2.24)$$

である。(2.23) を x について -1 から $+1$ まで積分して

$$\int_{-1}^1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} dx = R [\tilde{p}(+1, y) - \tilde{p}(-1, y)] = 0 \quad y=0, 1 \quad (2.25)$$

となる。各 $\tilde{u}_{lm}$ について考えれば

$$\int_{-1}^1 \frac{\partial^2 \tilde{u}_{lm}}{\partial y^2} dx = \begin{cases} \sqrt{2} f_{lm}''' & l=0 \\ 0 & l \neq 0 \end{cases} \quad y=0, 1 \quad (2.26)$$

となる。そこで、 $l \neq 0$ のばあいには $\tilde{u}_{lm}$ のみが (2.25)

を満足している。これ故、 $l=0$ のばあいにもこの条件を満足するとすれば f_{0m} の境界条件として

$$f_{lm}' = f_{lm}''' = 0, \quad y=0, 1, \quad l=0 \quad (2.27)$$

となる。

φ_c の正規直交条件 (2.19) を考慮すると、 v_{lm}, v_{np} は $l \neq n$ ならば、直交している。そこで正規直交条件 (2.11) は

$$(v_{lm}, v_{ln}) = (f_{lm}', f_{ln}') + \pi^2 l^2 (f_{lm}, f_{ln}) = \delta_{mn} \quad (2.28)$$

となる。

そこで、正規直交関数系をつくるためには、(2.28)
($l=0$) または (2.21) ($l \neq 0$) の境界条件と正規直交条件
(2.28) を満足する f_{lm} を決定すればよい。 すると

$$\hat{f}_m(y) = \begin{cases} -\cos m\pi y & l=0 \\ \cos m\pi y - \cos(m+2)\pi y & l \neq 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

とおけば (2.28) または (2.21) の条件をおのおの満足して
いる。 そして、これらの一次結合によって (2.28) を満足す
るような直交関数系をつくることができる。

さて、 $l=0$ の場合は、(2.29) の $\hat{f}_m$ は互に直交している
から、正規化を行えばよい。 $l \neq 0$ の場合は、 m
の偶数と、奇数の $\hat{f}_m$ は互に直交しているから、 $\{V_{l2m}\}$ 、
 $\{V_{l2m+1}\}$ の各々で正規直交化を行えばよい。 Schmidt
の方法によって正規直交化を行えば、結局

$$\begin{aligned} V_{l2m} &= C_{lm}^m \hat{V}_{l2m} + \sum_{n=0}^{m-1} C_{lm}^n V_{l2n} = \sum_{n=0}^m \hat{C}_{lm}^n \hat{V}_{l2n} \\ V_{l2m+1} &= D_{lm}^m \hat{V}_{l2m+1} + \sum_{n=0}^{m-1} D_{lm}^n V_{l2n+1} = \sum_{n=0}^m D_{lm}^n \hat{V}_{l2n+1} \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\hat{V}_{lm} = \varphi_l(x) (\hat{f}_m'(y), -\pi i \hat{f}_m(y))$$

$$\begin{aligned} C_{lm}^m &= \{V_{lmm} - (V_{lmm-1} C_{lm-1}^{m-1})^2\}^{-\frac{1}{2}} \\ C_{lm}^{m-1} &= -V_{lmm-1} C_{lm-1}^{m-1} C_{lm}^m \\ C_{lm}^n &= 0 \quad n=0, \dots, m-2 \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{lm}^m &= \{V_{lmm} - (V_{lmm-1} D_{lm-1}^{m-1})^2\}^{-\frac{1}{2}} \\ D_{lm}^{m-1} &= -V_{lmm-1} D_{lm}^m \\ D_{lm}^n &= 0 \quad n=0, \dots, m-2 \end{aligned} \right\} \quad (B.32)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{C}_{lm}^m &= C_{lm}^m; \quad \hat{C}_{lm}^n = C_{lm}^{m-1} C_{lm-1}^n \quad n=0, \dots, m-1 \\ \hat{D}_{lm}^m &= V D_{lm}^m; \quad \hat{D}_{lm}^n = D_{lm}^{m-1} D_{lm-1}^n \quad n=0, \dots, m-1 \\ V_{lmmn} &= (\hat{V}_{l2m}, \hat{V}_{l2n}), \quad V_{lmmn} = (\hat{V}_{l2m+1}, \hat{V}_{l2n+1}) \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

と与え。

上のようにつくった正規直交関数系が L_2 の意味で完備であることは証明するとは容易である。速度は流れの関数 Ψ_{lm} であるから、(2.16) によってつくられ、 Ψ_{lm} は $e^{il\pi x}$ の $m\pi y$ ($l=0, \pm 1, \dots$; $m=0, 1, 2, \dots$) のすべての組合せによってつくられている。一方 $\{e^{i\pi x}\}$ および $\{m\pi y\}$ は x の領域 $[-1, 1]$ および y の領域 $[0, 1]$ において、それぞれ完備であり、したがって、それらの積によってつくられる関数系は (x, y) の領域 $[-1, 1] \times [0, 1]$ において完備であるからである。

上の $\hat{u}$ の展開 (2.15) を (2.8) に代入し、それと v_{lm} との内積をとると、偏微分方程式の無限連立の常微分方程式に変換されることをかいてみる：

$$\begin{aligned} \dot{a}_{lm} &= -\frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} A_{lm}^n a_{ln} + \sum_{n=0}^{\infty} B_{lm}^n a_{ln} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} A_{lm}^{npr} \\ &\quad \times a_{np} a_{l-n-r} \quad l=0, \pm 1, \dots, m=0, 1, \dots \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{lm}^n &= -(V_{lm}, \nabla \Delta V_{lm}) \\ S_{lm}^n &= -(V_{lm}, (\bar{u} \cdot \text{grad}) V_{lm}) - (V_{lm}, (V_{lm} \cdot \text{grad}) \bar{u}) \\ A_{lm}^{np2} &= (V_{lm}, (V_{l-n2} \cdot \text{grad}) V_{np}) \end{aligned} \right\} (2.35)$$

この基礎方程式は乱流の状態を $\{a_{lm}\}$ によって ~~は~~ 空間,
 あるいはヒルベルト空間 $l_2 = \{\{a_{lm}\} \mid \sum |a_{lm}|^2 < \infty\}$
 の上の運動として記述されるものである。

§3. むすび

前節で、乱流の状態をヒルベルト空間 l_2 の中の運動として記述した。もし、このヒルベルト空間に確率分布関数を導入すれば、確率過程論として定式化できる。

こゝでは、無限次元の空間を有限次元 ($|l| < L, 0 \leq m < M$) で近似するものとする。つまり

$$\sum_{l=-L}^L \sum_{m=0}^M |a_{lm}|^2 \gg \left(\sum_{l=-L}^{L-1} + \sum_{l=L+1}^{\infty} \right) \sum_{m=0}^M |a_{lm}|^2 + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=M+1}^{\infty} |a_{lm}|^2 \quad (2.3.1)$$

がなり立つと考える。そこで、 $(2L+1) \times (M+1)$ 次元のベクトルの常微分方程式の初期問題と考える。

微分方程式の係数の 0 になるものがある。この a_{lm} の m の奇偶によって分けてあつた方がずっと便利である。こゝで

$$\left. \begin{aligned} A_{lm} &= a_{l2m} \quad m=0, \dots, MA \\ B_{lm} &= a_{l2m+1} \quad m=0, \dots, MB (=MA \text{ or } MA-1) \\ l &= -L, \dots, L \end{aligned} \right\} (3.2)$$

とすれば、基礎方程式 (2.34) は

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_{lm} &= \sum_{p=0}^{MA} \left(-\frac{1}{R} CAA_{lm}^p + i CSA_{lm}^p \right) A_{lp} \\ &\quad - i \sum_{n=l-L}^L \left(\sum_{p=0}^{MA} \sum_{q=0}^{MB} CAA_{lm}^{npq} A_{np} B_{l-nq} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p=0}^{MB} \sum_{q=0}^{MA} CABA_{lm}^{npq} B_{np} A_{l-nq} \right) \\ \dot{B}_{lm} &= \sum_{p=0}^{MB} \left(-\frac{1}{R} CBB_{lm}^p + i CSB_{lm}^p \right) B_{lp} \\ &\quad - i \sum_{n=l-L}^L \left(\sum_{p=0}^{MA} \sum_{q=0}^{MA} CBA_{lm}^{npq} A_{np} A_{l-nq} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p=0}^{MB} \sum_{q=0}^{MB} CBB_{lm}^{npq} B_{np} B_{l-nq} \right) \end{aligned} \right\} (3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} CAA_{lm}^n &= A_{l2m}^{2n} ; CBB_{lm}^n = A_{l2m+1}^{2n+1} \\ CSA_{lm}^n &= \frac{1}{i} S_{l2m}^{2n} ; CSB_{lm}^n = \frac{1}{i} S_{l2m+1}^{2n+1} \\ CAA_{lm}^{Bnpq} &= \frac{1}{i} A_{l2m}^{n2p+2q+1} \\ CABA_{lm}^{npq} &= \frac{1}{i} A_{l2m}^{n2p+12q} \\ CBA_{lm}^{npq} &= \frac{1}{i} A_{l2m+1}^{n2p2q} \\ CBB_{lm}^{npq} &= \frac{1}{i} A_{l2m+1}^{n2p+12q+1} \end{aligned} \right\} (3.3)$$

とす。ところで、 S_{l2m} , A_{lm} , B_{lm} は複素数であり、 CAA

等は実像値である。

実際, $R = 20,000$ について i) $l = 0, \pm 1, \pm 2$;
 $m = 0, 1$ (9モード), ii) $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$,
 $m = 0, 1, 2$ (120モード), iii) $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$,
 $m = 0, \dots, 3$ (35モード) のベクトルについて, 初期値
 問題 (初期値として a_{10} と a_{11} の値を小さくし, 他
 は0とする) を解いた。その結果, §1のベクトル流の9%
 微, ちるわ, 多くのモードが除き^{統計的}に励起され, 平衡状
 態に向う傾向をみせた。くわしい計算結果は他の機会に行
 う。

参考文献:

D.C.

- 1) Leslie: Developments in the theory of
 turbulence, Clarendon Press, Oxford 1984.
- 2) 宇原真二: 非等方, 非一様乱流はいかに^にあ^つかい;
 3か — 平面ポアズエ流の散逸実験に關連して
 第6回乱流シンポジウム, 学術宇宙研 (1974) 151
- 3) 宇原真二: 非一様, 非等方乱流の非線形力学, 学術
 工業部紀要 A (1974) 42
- 4) 宇原真二: 一般化 Burgers 方程式と平面 Poiseuille 流の
 散逸実験, 数理解析講究録 218 (1974) 128.