

モジュラー束と分配束との間の中間の束について

神戸大教育 田村 三郎

モジュラー束と分配束との間にある中間の束のあるシリーズを等式によって定式化することが、この小論の一つの目的である。

定義 1. モジュラー束 M の任意の元 $x_1, x_2, \dots$ に対し, $\delta_0, \delta_1, \dots, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots$ を次のように定義する.

$$\delta_0 = x_1 \cup x_2$$

$$\varepsilon_0 = x_2$$

$$\delta_{2n-1} = \bigcup_{i=1}^{2n-1} (x_i \cap x_{2n+1}) \cup (\delta_{2n-2} \cap x_{2n+1})$$

$$\varepsilon_{2n-1} = \bigcup_{i=1}^{2n-1} (x_i \cap x_{2n+1}) \cup (\varepsilon_{2n-2} \cap x_{2n+1})$$

$$\delta_{2n} = \bigcap_{i=1}^{2n} (x_i \cup x_{2n+2}) \cap (\delta_{2n-1} \cup x_{2n+2})$$

$$\varepsilon_{2n} = \bigcap_{i=1}^{2n} (x_i \cup x_{2n+2}) \cap (\varepsilon_{2n-1} \cup x_{2n+2})$$

モジュラー束 M の任意の元 $x_1, \dots, x_{n+2}$ が

$$\text{等式 } \delta_n = \varepsilon_n$$

を満足するとき, このモジュラー束 M を D_n 束という.

定義 2. 最小元 0 と最大元 1 を持つ $n+4$ 元束

$$L_n = \{0, p_1, \dots, p_{n+2}, 1\}$$

において, $p_1, \dots, p_{n+2}$ がお互いに比較不能であるとき, この $n+4$ 元束 L_n を n 本マスという.

補助定理 1. $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \delta_0, \delta_1, \dots$ が定義されているとき, 各 π_i に対し, n 本マス L_n の元 p_i を代入すれば, 負でない整数 k に対し

$$\delta_{2k} = 1, \quad \varepsilon_{2k} = p_{2k+2}$$

$$\delta_{2k+1} = p_{2k+3}, \quad \varepsilon_{2k+1} = 0$$

証明. k についての帰納法による.

$$k=0 \text{ のとき, } \delta_0 = p_1 \cup p_2 = 1, \quad \varepsilon_0 = p_2$$

$$\delta_1 = (p_1 \wedge p_3) \cup (\delta_0 \wedge p_3) = 0 \cup (1 \wedge p_3) = p_3$$

$$\varepsilon_1 = (p_1 \wedge p_3) \cup (\varepsilon_0 \wedge p_3) = 0 \cup (p_2 \wedge p_3) = 0$$

k より小さいときを仮定し, 一般のステップ k について考える.

$$\delta_{2k} = \bigcap_{i=1}^{2k} (p_i \cup p_{2k+2}) \wedge (\delta_{2k-1} \cup p_{2k+2}) = 1 \wedge 1 = 1$$

$$\varepsilon_{2k} = \bigcap_{i=1}^{2k} (p_i \cup p_{2k+2}) \cap (\varepsilon_{2k-1} \cup p_{2k+2}) = 1 \cap p_{2k+2} = p_{2k+2}$$

$$\delta_{2k+1} = \bigcup_{i=1}^{2k+1} (p_i \cap p_{2k+3}) \cup (\delta_{2k} \cap p_{2k+3}) = 0 \cup p_{2k+3} = p_{2k+3}$$

$$\varepsilon_{2k+1} = \bigcup_{i=1}^{2k+1} (p_i \cap p_{2k+3}) \cup (\varepsilon_{2k} \cap p_{2k+3}) = 0 \cup 0 = 0$$

定理2. n 本マヌ L_n は D_n 束ではない.

証明. $x_i = p_i$ と置くと, 補助定理1より $\delta_n \neq \varepsilon_n$.

したがって, L_n は D_n 束ではない.

定理3. n 本マヌ L_n は D_{n+1} 束である.

証明. $L_n = \{0, p_1, \dots, p_{n+2}, 1\}$ の各元を代入したとき, 等式 $\delta_{n+1} = \varepsilon_{n+1}$ を満たすことを, n についての帰納法で証明する.

$n=0$ のとき. D_1 束は分配束自身であるし, 0 本マヌ L_0 は分配束になっているので, D_1 束である.

n より小さいときを仮定し, 一般のステップ n について考える. $x_1, \dots, x_{n+2}, x_{n+3}$ に対し, n 本マヌ L_n の任意の元を代入する.

1) $x_1, \dots, x_{n+2}$ に対し, ある p_i を代入していいと

する。帰納法の仮定より $\delta_n = \varepsilon_n$ がいえるので、 $\delta_{n+1} = \varepsilon_{n+1}$ もいえる。

2) $x_1, \dots, x_{n+2}$ に対し、すべての p_i を代入していきるときを考える。このとき、 $x_i = p_i$ と考えても一般性を失わない。

○ $n = 2k$ のとき

補助定理1より、 $\delta_{2k} = 1$, $\varepsilon_{2k} = p_{2k+2}$

$$\delta_{2k+1} = \bigcup_{i=1}^{2k+1} (p_i \cap x_{2k+3}) \cup (1 \cap x_{2k+3}) = x_{2k+3}$$

$$\varepsilon_{2k+1} = \bigcup_{i=1}^{2k+1} (p_i \cap x_{2k+3}) \cup (p_{2k+2} \cap x_{2k+3})$$

1) $x_{2k+3} = 0$ ならば、 $\varepsilon_{2k+1} = 0 = \delta_{2k+1}$

□) $x_{2k+3} = p_j$ ならば、 $\varepsilon_{2k+1} = p_j = \delta_{2k+1}$

ハ) $x_{2k+3} = 1$ ならば、 $\varepsilon_{2k+1} = 1 = \delta_{2k+1}$

○ $n = 2k-1$ のとき

補助定理1より、 $\delta_{2k-1} = p_{2k+1}$, $\varepsilon_{2k-1} = 0$

$$\delta_{2k} = \bigcap_{i=1}^{2k} (p_i \cup x_{2k+2}) \cap (p_{2k+1} \cup x_{2k+2})$$

$$\varepsilon_{2k} = \bigcap_{i=1}^{2k} (p_i \cup x_{2k+2}) \cap (0 \cup x_{2k+2}) = x_{2k+2}$$

$x_{2k+2} = 0, p_j, 1$ のどの場合も、 $\delta_{2k} = x_{2k+2} = \varepsilon_{2k}$

以上をまとめると、

- 1) D_1 束は分配束と一致する.
- 2) 各 D_n 束はモジュラー束である.
- 3) 各 D_n 束は D_{n+1} 束である.
- 4) n 本マス L_n は D_n 束ではないが, D_{n+1} 束である.

