

## Minkowski空間の複素化と Maxwell の方程式

京大理 上野健爾

物理と代数幾何との関連が最近話題になっているが、ここでは Penrose 理論の一部を紹介することにする。詳しくは Penrose [2][3]を、数学的に整理されたものとしては Wells [4]を参照されたい。

### §1. Minkowski空間のコンパクト化

いささか天下りではあるが実6次元ベクトル空間  $M^6$  及びその上の符号が  $(++----)$  である内積  $(\cdot)$  を考える。  $M^6$  の部分集合  $V$  を

$$V = \{v \in M^6 \mid v \neq 0, (v \cdot v) = 0\}$$

で定める。  $V$  には自然に  $\mathbb{R}^*$  が作用しており、商空間  $\bar{M} = V/\mathbb{R}^*$  は微分可能多様体となる。

$\bar{M}$  は  $P_5(\mathbb{R})$  の部分多様体

$$(1.1) \quad x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2$$

として実現できるので、  $S^1 \times S^3$  と微分同相である。  $\pi: V \longrightarrow \bar{M}$  を商写像とする。さて  $V$  の4次元部分多様体  $W$  が  $\pi|_W: W \xrightarrow{\sim} \pi(W)$

微分同相なる時,  $M^6$  の内積  $(\cdot)$  は  $W$  上に符号  $(+---)$  なる距離を引き起すことは簡単な計算でたしかめることができる。更に  $V$  の4次元部分多様体  $W_1, W_2$  が同様の条件を満足し,  $\pi(W_1) \cap \pi(W_2) \neq \emptyset$  とすると,  $f = \pi|_{W_2}^{-1} \circ \pi|_{W_1} : U_1 = \pi|_{W_1}^{-1}(\pi(W_1) \cap \pi(W_2)) \rightarrow U_2 = \pi|_{W_2}^{-1}(\pi(W_1) \cap \pi(W_2))$  なる  $W_1$  の開集合から  $W_2$  の開集合への写像が定まる。この時定義よりただちに分かるように  $f$  は  $\lambda$  なる零にならない可微分函数の掛算として得られる。

そこで  $v_1(t)$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  を  $U_1$  内の道,  $v_2(t) = f(v_1(t))$  とおくと, 実は  $v_2(t) = \lambda(v_1(t)) v_1(t)$  となり,

$$v_2'(t) = \frac{d}{dt} \lambda(v_1(t)) v_1(t) + \lambda v_1'(t)$$

が成立する。一方  $(v_1(t) \cdot v_1(t)) = 0$  であるから,  $(v_1(t) \cdot v_1'(t)) = 0$ 。従って  $(v_2'(t) \cdot v_2'(t)) = \lambda^2 (v_1'(t) \cdot v_1'(t))$  となる。即ち写像  $f$  は  $U_1$  から  $U_2$  への等角写像 (conformal mapping) になっている。かくして  $M^6$  の内積によつて  $M$  上に等角構造 (conformal structure) が自然に引起されることが分かった。以下  $M$  はこの等角構造を持ったものとして考える。

次に  $M$  が Minkowski 空間の自然なコンパクト

化になっていることを見よう。

定義 1.  $\bar{M} \ni p, s$  が直交する,  $p \perp s$

$\Leftrightarrow p = \pi(v), s = \pi(w), v, w \in V$  の時  $(v \cdot w) = 0$ .

また  $p \in \bar{M}$  に対して

$$p^\perp = \{ s \in \bar{M} \mid s \perp p \}$$

とおくと,  $p^\perp$  は  $\bar{M}$  の閉集合である。

定理 1.  $\bar{M}$  の任意の点  $p$  に対して,  $u_1, u_2 \in V$ ,  $\pi(u_1) = p$ ,  $(u_1 \cdot u_2) = 1$  をとり

$$M = \{ v \in M^0 \mid (v \cdot u_1) = (v \cdot u_2) = 0 \}$$

とおくと,  $M$  は  $(\cdot)$  より引起される距離によって Minkowski 空間となる。

2)  $k: M \xrightarrow{\sim} \bar{M} - p^\perp$  なる等角写像が存在する。

証明)  $u_1, u_2$  による張られるベクトル空間上で  $(\cdot)$  は符号が  $(+, -)$  であるからりは明らか。

2) の証明のために

$$M_p = \{ w \in V \mid u_1 \cdot w = 1 \}$$

とおくと,  $\pi|_{M_p}: M_p \xrightarrow{\sim} \bar{M} - p^\perp$  は微分同相であり,  $\bar{M}$  の等角構造の入れ方よりこの写像は等角である。一方

$$k_0: M \ni v \longmapsto v - \frac{1}{2}(v \cdot v)u_1 + u_2 \in M_p$$

は直ちに分かるように同型写像。かつ

$$dk_0(v) = dv - (v \cdot dv)u_1,$$

であり,  $M$  の定義から  $(v \cdot u_1) = 0$  であることより,  $(dk_0(v) \cdot dk_0(v)) = (dv \cdot dv)$  となる。即ち  $k_0$  は等距離写像。  $k = \pi|_{M_p} \cdot k_0$  とおけばよい。  $\square$

かくして  $\bar{M}$  は Minkowski 空間の等角的コンパクト化であることが分かった。更に  $\bar{M}$  の定義式 (1.1) が暗示するように,  $\bar{M}$  はグラスマン多様体と関連している。このことは次節で述べることにするが, その準備を少ししておく。

定理 2  $\Gamma$  を  $M^6$  の 2 次元全等方的部分空間とする。即ち  $(u \cdot u) = (v \cdot v) = (u \cdot v) = 0$  なる  $u, v$  によって  $\Gamma$  は張られているとする。この時  $\gamma = \pi(\Gamma - \{0\})$  は  $\bar{M}$  の零測地線である。逆に  $\bar{M}$  の任意の零測地線は  $\bar{M}$  の適当な 2 次元全等方的部分空間  $\Gamma$  によって  $\pi(\Gamma - \{0\})$  と書ける。

(証明) 定理 1 の証明と同じ記号を使う。但し,  $u_1 \in V$ ,  $u_2 \in \Gamma$  と仮定する。  $\dim_{\mathbb{R}} \Gamma = 2$  であるから,  $u_1 \cdot u_\infty = 0$  なる  $u_\infty \in \Gamma$  が存在する。仮定

より  $(u_0 \cdot u_0) = 0$ 。よって  $\{\lambda u_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$  は Minkowski 空間  $M = \{v \in M^6 \mid (v \cdot u_1) = (v \cdot u_2) = 0\}$  の零測地線である。定義より  $k(\lambda u_0) = \pi(\lambda u_0 + u_2) \in \gamma = \pi(\Gamma - \{0\})$ 。逆に  $\gamma \ni \delta$  に対して  $\delta = \pi(u)$ ,  $u = \mu u_0 + v_2$  とおくと,  $v \neq 0$  であれば

$$\delta = \pi(u) = \pi(\frac{1}{\mu}u_0 + u_2) = k(\frac{1}{\mu}u_0)$$

従って  $\gamma = \{\pi(u_0)\}$  は  $\overline{M} - \Gamma$  の零測地線であり,  $\gamma$  は 1次元可微分部分多様体であるので,  $\gamma$  は  $\overline{M}$  の零測地線である。

逆に  $\gamma$  は点  $\delta \in \overline{M}$  を通る零測地線とし,  $N \subset T_\delta(\overline{M})$  を  $\gamma$  の定める零方向ベクトルの作る 1次元部分空間とする。  $\delta = \pi(v)$ ,  $v \in V$  とおき,  $dv$  を  $V$  に点  $v$  で接する接ベクトルで  $\pi(dv) \in N$  なるものとする。  $v, dv$  で張られる 2次元部分空間  $\Gamma \subset M^6$  は全等方的である。  $\gamma' = \pi(\Gamma - \{0\})$  は零測地線。これは点  $\delta$  で  $\gamma$  と同方向であるので,  $\gamma' = \gamma$ 。 □

同様にして次の定理も証明される。

定理 3.  $\delta, \delta' \in \overline{M}$  が同じ零測地線上にあるための必要十分条件は  $\delta \perp \delta'$  となることである。

## §2 Twistor空間

Twistor空間の物理的解釈は次節で述べることにして、ここでは数学的側面について述べる。

$T$  を複素4次元ベクトル空間、 $(1)$  を  $T$  上の符号  $(+, +, -, -)$  なるエルミット内積とする。<sup>\*</sup>  $T$  の底  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  が

$$(e_i | e_j) = (-1)^i \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

を満足する時、正規直交底と呼ぶことにする。

$\omega \in \wedge^4 T$  は  $T$  の正規直交底  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  を使って  $\omega = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$  と書ける時、正規化4ベクトルと呼ぶ。 $(T, (1), \omega)$  が与えられた時、 $T$  の元を *twistor* と呼ぶ。以下  $(T, (1), \omega)$  を一つ固定して考察する。

$\wedge^2 T$  上の対称形式  $u \cdot v$  及びエルミート形式  $(u | v)$  を次のように定める。

$$(2.1) \quad u \wedge v = (u \cdot v) \omega$$

$$(2.2) \quad t_1, t_2, s_1, s_2 \in T \text{ に対して}$$

$$(t_1 \wedge t_2 | s_1 \wedge s_2) = \begin{vmatrix} (t_1 | s_1) & (t_1 | s_2) \\ (t_2 | s_1) & (t_2 | s_2) \end{vmatrix}$$

---

<sup>\*</sup>  $(1)$  は第1変数に関して  $\mathbb{C}$ -線型とする。

さて  $\hat{\Lambda}T$  の任意の元  $v$  に対して  $v^\perp \in \hat{\Lambda}T$  を

$$u \cdot v = (u | v^\perp)$$

で定義する。ただちに分かるように，対応  $v \rightarrow v^\perp$  は  $\mathbb{C}$ -反線型である。

定理 1 . リ  $(v^\perp)^\perp = v$

2)  $\mathbb{R} \hat{\Lambda}T \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in \hat{\Lambda}T \mid v^\perp = v\}$  は 6次元実ベクトル空間である。

3) 対称形式  $u \cdot v$  は  $\mathbb{R} \hat{\Lambda}T$  上に符号  $(++----)$  の内積を引起す。

(証明).  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  を  $T$  の正規直交底， $\omega = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$  とする時， $e_{ik} = e_i \wedge e_k$  と定義する。

$$\eta_1 = e_{12} - e_{34}, \quad \eta_2 = e_{13} - e_{24}, \quad \eta_3 = e_{14} - e_{23}$$

$$\eta_4 = \sqrt{2}(e_{12} + e_{34}), \quad \eta_5 = \sqrt{2}(e_{13} + e_{24}), \quad \eta_6 = \sqrt{2}(e_{14} + e_{23})$$

とおくと，これが  $\mathbb{R} \hat{\Lambda}T$  の  $\mathbb{R}$  上の底となる。また

$$\eta_\alpha \cdot \eta_\beta = \begin{cases} 2, & \alpha = \beta = 2, 5 \\ 0, & \alpha \neq \beta \\ -2, & \alpha = \beta = 1, 3, 4, 6 \end{cases}$$

となる。

□

従って  $M^6 = \mathbb{R} \hat{\Lambda}T$  とおくことにより，前節の議論が適用できる。すると  $\delta \in \mathcal{M}$  は  $\delta = \pi(v)$

,  $v \neq 0$   $v \cdot v = 0$  と書ける. これは (2.1) より  
 $v = t_1 \wedge t_2$ ,  $t_1, t_2 \in T$  と書けることを意味する.  
 ここで

$$S(\delta) = \mathbb{C}t_1 + \mathbb{C}t_2 = \langle t_1, t_2 \rangle_{\mathbb{C}}$$

と,  $T$  の 2 次元部分空間を定義する.

定理 2. 1)  $M$  の任意の点  $\delta$  に対して  $S(\delta)$  は  
 (1) に関して全等方的, 即ち  $(1)|_{S(\delta)} = 0$ .

2) 対応

$$M \ni \delta \longmapsto S(\delta) \in \left\{ (T, (1)) \text{ の 2 次元全等方的 } \right. \\ \left. \text{部分ベクトル空間} \right\}$$

は全単射である.

3)  $\delta, \delta' \in M$  が同じ零測地線に属するため  
 の必要十分条件は  $S(\delta) \cap S(\delta') \neq 0$  である.

証明) 1)  $v = t_1 \wedge t_2$  とすると, 任意の  $s \in T$  に対  
 して  $v \wedge t_1 \wedge s = 0$ . よって (2.1), (2.2) より

$$0 = v \cdot (t_1 \wedge s) = (t_1 \wedge s | v^\perp) = (t_1 \wedge s | v)$$

$$= (t_1 \wedge s | t_1 \wedge t_2) = (t_1 | t_1)(s | t_2) - (s | t_1)(t_1 | t_2)$$

$s$  は任意でよかったから  $(t_1 | t_1) = (t_1 | t_2) = 0$  であ  
 る. 同様にして  $(t_2 | t_2) = 0$ .

2)  $S = \langle t_1, t_2 \rangle_{\mathbb{C}}$  を 2 次元全等方的とする.

$$(t_1 | t_1) = (t_1 | t_2) = (t_2 | t_2) = 0 \text{ より}$$

$$(t_1 \wedge t_2 \mid t_1 \wedge s) = 0, \quad \forall s \in T.$$

従って  $(t_1 \wedge t_2)^\perp \wedge t_1 = 0$  である。同様にして  $(t_1 \wedge t_2)^\perp \wedge t_2 = 0$ 。よって  $(t_1 \wedge t_2)^\perp = \lambda t_1 \wedge t_2$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  でなければならぬ。定理 1 より  $|\lambda| = 1$ 。そこで  $\lambda = \mu / \bar{\mu}$ ,  $\mu \in \mathbb{C}^*$  とおき,  $v = \mu t_1 \wedge t_2$  とおくと,  $v^\perp = v$ 。また  $v \cdot v = 0$  は上のことより明らか。  $\delta = \pi(v)$  とおくと  $S = S(\delta)$ 。

3) これは §1 の定理 3 の書換にすぎない。口  
さて  $M$  の零測地線  $\gamma$  に対して

$$R(\gamma) = \bigcap_{\delta \in \gamma} S(\delta)$$

と定義する。定理 2, 3) より  $\gamma$  の任意の 2 点  $\delta, \delta'$  に対して  $S(\delta) \cap S(\delta') \neq 0$ 。また定理 2, 2) より, もし  $R(\delta) = 0$  であれば  $\gamma$  上の 3 点  $\delta, \delta', \delta''$  で  $S(\delta) \cap S(\delta') \cap S(\delta'') = 0$  なるものが存在する。すると  $S(\delta) \cap S(\delta') \ni v_1$ ,  $S(\delta') \cap S(\delta'') \ni v_2$ ,  $S(\delta'') \cap S(\delta) \ni v_3$  なる元を適当に選べば 1 次独立になる。また  $S(\delta), S(\delta'), S(\delta'')$  は全等方的であるので, 3 次元部分空間  $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle_{\mathbb{C}}$  も (1) に関して全等方的。これは (1) の符号  $(++ , ---)$  に反す

る。よって  $\dim_{\mathbb{R}} R(\gamma) = 1$  でなければならぬ。

$R(\gamma)$  は勿論全等方的。逆に  $R$  を  $T$  の 1 次元全等方的部分空間とする。 $R$  の中の 0 でない元  $t$  を使って

$$\Gamma = \{ v \in M^6 = \mathbb{R} \wedge T \mid v \wedge t = 0 \}$$

とおくと、これは全等方的である。何故ならば  $\Gamma$  の任意の元は  $t \wedge s$  の形に書け、従って

$v, v' \in \Gamma$  に対して (2.1) より  $(v|v') = v \cdot v' = 0$  と

なるからである。よって  $\dim_{\mathbb{R}} \Gamma \leq 2$ 。一方  $\Gamma$  内

に 2 個の 1 次独立な元が選べるから  $\Gamma$  は 2 次

元である。よって §1 定理 2 によつて  $\gamma = \pi(\Gamma - 10)$

は  $\overline{M}$  の零測地線。作り方より  $R(\gamma) = R$ 。よつ

て次の定理を得る。

定理 3. 対応  $\gamma \longmapsto R(\gamma)$  は  $\overline{M}$  の零測地線全体と  $T$  の (1) に属する 1 次元全等方的部分空間の間の全単射を与える。また  $\gamma \in \gamma$  であることと  $R(\gamma) \subset S(\delta)$  であることとは同値である。

## §3 スペノル

$SO^0(1,3)$  の普遍被覆群はよく知られているように  $SL(2, \mathbb{C})$  と同型である。被覆写像  $\chi: SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow SO^0(3,1)$  は次の様に与えられる。

$(x^0, x^1, x^2, x^3)$  を Minkowski 空間の座標とし、この座標によって距離が  $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$  より引き起こされているとする。この時  $2 \times 2$  行列  $Q$  を

$$Q = \begin{pmatrix} x^0 + x^1 & x^2 + \sqrt{-1}x^3 \\ x^2 - \sqrt{-1}x^3 & x^0 - x^1 \end{pmatrix}$$

と定義する。  $g \in SL(2, \mathbb{C})$  に対して  $gQ\bar{g}$  を

$$gQ\bar{g} = \begin{pmatrix} x'_0 + x'_1 & x'_2 + \sqrt{-1}x'_3 \\ x'_2 - \sqrt{-1}x'_3 & x'_0 - x'_1 \end{pmatrix}$$

と書くと、 $(x_i)$  より  $(x'_i)$  への 1 次変換  $\chi(g)$  が定まる。これが求める写像である。

さて Minkowski 空間  $M$  の接束  $TM$  は  $SO^0(1,3)$  束と見ることが出来る。  $TM$  は自明な束であるから、被覆写像  $\chi$  によって  $M$  上に  $SL(2, \mathbb{C})$  束  $\Lambda$  が構成できる。  $\Lambda$  は  $\mathbb{C}^2$ -束である。  $\underbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}_a \otimes \underbrace{T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M}_b$  の  $M$  上の  $C^\infty$  切断が  $(a, b)$  型のテンソル場 (以下場は省く) であったが、

$$(3.1) \quad \underbrace{\Lambda \otimes \cdots \otimes \Lambda}_a \otimes \underbrace{\bar{\Lambda} \otimes \cdots \otimes \bar{\Lambda}}_{a'} \otimes \underbrace{\Lambda^* \otimes \cdots \otimes \Lambda^*}_b \otimes \underbrace{\bar{\Lambda}^* \otimes \cdots \otimes \bar{\Lambda}^*}_{b'}$$

の  $C^\infty$  切断をスピノル (場) と呼ぶ。テンソルとスピノルの間には当然のことながら対応がある。テンソルからスピノルへの移行を述べるために、TM から  $\Lambda$  を作った上の操作をもう少し一般的の場合に考えることにする。

$N$  を実 4 次元微分可能多様体、 $(g_{ij})$  を符号が  $(+, ---)$  なる距離とする。再び  $TN$  は  $SO^0(1, 3)$  束と考えることができる。今度は必ずしも対応する  $SL(2, \mathbb{C})$  束が  $N$  上には構成できない。(局所的には常に可能であるが。)  $SL(2, \mathbb{C})$  束  $\Lambda$  が構成できるための必要十分条件は 2 次 Stiefel-Whitney 類  $w_2(N) = 0$  である。そこで  $w_2(N) = 0$  を仮定しよう。その時 (3.1) の  $C^\infty$  切断をスピノルと呼ぼう。この時テンソルからスピノルへの移行は次の条件を満足する  $N$  上の  $2 \times 2$  エルミット行列  $(\sigma_i^{JJ'})$ ,  $(\bar{\sigma}_i^{JJ'})$   $J = 0, 1$ ,  $J' = 0, 1$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  によって与えられる。(正確には  $(\sigma_i^{JJ'})$  は座標によって形が変わりあるベクトル束の  $C^\infty$  切断である。)

$$(3.2) \quad \begin{cases} \sigma_J^{JJ'} \sigma_K^{KK'} \varepsilon_{JK} \varepsilon_{J'K'} = \delta_{JJ'} \\ \sigma_J^{JJ'} \sigma_{JJ'}^i = \delta_J^i \end{cases}$$

但しここで上添数と下添数に同じ大文字が現われた時は、それに関する和をとり、また

$$(\varepsilon_{JK}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\varepsilon_{J'K'}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

局所座標で表現したテンサーが  $(X_a^{ij})$  であれば、対応するスピノル  $X^{II'JJ'}_{KK'}$  は

$$(3.3) \quad X^{II'JJ'}_{KK'} = X_a^{ij} \sigma_i^{II'} \sigma_j^{JJ'} \sigma_{KK'}^a,$$

で与えられる。ここで再び和の記号を省いた。以下特に断らない限り、Einsteinの記法を使う。

さて(3.3)では正確には  $X^{I_0 I'_0 J_0 J'_0}_{K_0 K'_0}$  とでも書くべきであるが記号が繁雑になるのでこの略記法を使う。IとI'の"I"は違っていることに注意してほしい。

また  $X^{II'JJ'}_{KK'}$  は  $\wedge \otimes \bar{\wedge} \otimes \wedge \otimes \bar{\wedge} \otimes \wedge^* \otimes \bar{\wedge}^*$  の切断(の局所座標による表現)である。

一般型のテンソルに対しても(3.3)と同様に変換式が使われる。テンソルに対応するスピノルは必ずII'のように"'"のつかない添数とつく添数とが対になって現われていることに注

意しておく。スピノルの複素共役は

$$\overline{\xi^A} = \xi^{A'}, \quad \overline{X^{I_0 I_1}} = X^{I_0' I_1'}$$

などのように書かれる。右辺の添数で“'”が入れ替わったのは  $\wedge$  と  $\overline{\wedge}$  とが複素共役で入れ替わったからである。(3.3)よりすぐ分かることであるが、実テンソルに対応するスピノルはエルミットのになっている。即ち

$$\overline{X^{I_1' I_0' J_1' J_0'}}_{K_1' K_0'} = X^{I_0 I_1 J_0 J_1}_{K_0 K_1}.$$

逆にスピノルからテンサーに移行するには(3.2)を使って(3.3)を逆に解けばよく

$$(3.4) \quad X^{IJ}_R = \sigma^{IJ}_{II'} \sigma^{JJ'} \sigma_R^{KK'} X^{II' JJ'}_{KK'}$$

となる。更にスピノルの添数の上げ下げを

$$(3.5) \quad X^A_B = X^{AC} \varepsilon_{CB}, \quad X^A_{B'} = X^{AC'} \varepsilon_{C'B'} \\ X_A{}^B = X_{ADC} \varepsilon^{DB}, \quad X_A{}^{B'} = X_{AD'C} \varepsilon^{D'B'}$$

などと定める。ここで

$$(\varepsilon^{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\varepsilon^{A'B'}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$(\varepsilon_{AB})$   $(\varepsilon_{A'B'})$  などには歪対正であるので(3.5)で和をとる時の  $\varepsilon$  の添数の順序に注意されたい。

さて(3.2)の条件も満足するエルミット行列を与える。Minkowski空間では上の座標を使って

$$(3.6) \quad \begin{cases} (\sigma_0^{AA'}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (\sigma_1^{AA'}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ (\sigma_2^{AA'}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (\sigma_3^{AA'}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} \\ -\sqrt{1} & 0 \end{pmatrix} \\ (\sigma_i^{AA'}) = (\sigma_i^{AA'}) \end{cases}$$

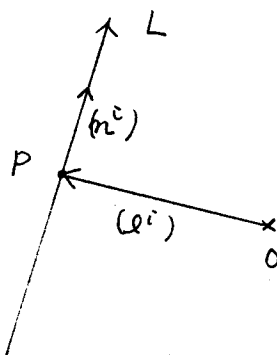
が条件を満足している。  $SL(2, \mathbb{C})$  でエルミット共役をとってやれば、他にも条件 (3.2) を満足する行列が作られる。また局所 Minkowski の時にも局所的に上の行列から条件 (3.2) を満足する行列が構成できる。

さて以上の準備のもとで、Minkowski 空間  $M$  の零測地線をスピノルを使って表示してやろう。上述の様に  $M$  の原点を定め座標  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  を導入する。また距離テンソルはこの座標で

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と表されているとする。

$L$  を  $M$  の零測地線とし、 $P$  を  $L$  上の任意の点、 $(n^i)$  は未来方向の  $L$  の方向ベクトル、 $\overrightarrow{OP} =$



$(l^i)$  とおく。  $(l^i), (n^j)$  より定まる Plücker 座標  $m^{ij} = l^i n^j - l^j n^i$  を考えると,  $L$  は  $(n^i, m^{ij})$  によって一意的に定まることが分かる。 (3.3) に従って  $(l^i), (n^i), (m^{ij})$  に対応するスピノルを  $\lambda^{II'}, m^{II'JJ'}$  と書くことにする。

補題 1. 1)  $\lambda^J$  なるスピノルが存在して

$$n^{JJ'} = \lambda^J \bar{\lambda}^{J'}$$

2)  $\mu_{A'} = -\sqrt{1} \lambda^A \delta_{AA'}$  とおくと

$$m^{JJ'KK'} = \sqrt{1} \varepsilon^{JK} \mu^{(J'} \bar{\lambda}^{K')} - \sqrt{1} \bar{\mu}^{(J} \lambda^{K)} \varepsilon^{J'K'}$$

但し  $\mu^{(J'} \bar{\lambda}^{K')} = \frac{1}{2}(\mu^{J'} \bar{\lambda}^{K'} + \mu^{K'} \bar{\lambda}^{J'})$  を意味する。

証明) 1) は

$$(n^i) \text{ の内積} = 0 \iff \det(n^{JJ'}) = 0 \iff n^{JJ'} = \lambda^J \mu^{J'}$$

かつ  $(n^{JJ'})$  はエルミットより  $\mu^{J'} = \bar{\lambda}^J$  が出る。

2) は単純だが少々長い計算が必要なので略す。 □

この補題より  $(n^j), (n^{j*})$  はスピノル  $\lambda^A$ ,  $\mu_{A'}$  より一意的に定まる。また  $(n^j)$  に対して  $\lambda^j$  は絶対値 1 の複素数倍だけの不定性がある。更に  $(n^j)$  自身正の実数倍だけの不定性があり、この時  $\lambda^A$  は  $\mathbb{C}^*$  の元をかきうるだけの不定性がある。

る。また  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  によって  $\lambda^A$  が  $\alpha \lambda^A$  と変わると、 $\mu_A$  は定義によって  $\alpha \mu_A$  に変わる。かくして零測地線  $L$  に対して  $(\lambda^0, \lambda^1, \mu_0, \mu_1) \bmod \mathbb{C}^*$  は一意的に定まる。<sup>\*</sup>  $(n^j) \neq 0$  であるから  $(\lambda^0, \lambda^1) \neq (0, 0)$  従って  $L$  に対して  $(\lambda^0 : \lambda^1 : \mu_0, \mu_1) \in \mathbb{P}(\mathbb{C})$  が一意的に定まり、これは  $M$  の零測地線全体から  $\mathbb{P}(\mathbb{C})$  の中への単射を与えている。 $M$  の零測地線全体は実 5 次元のパラメータを持ち、 $\mathbb{P}(\mathbb{C})$  は実 6 次元だから、この写像は全射ではない。この像を特徴づけてみよう。

$(\ell^j)$  は実ベクトルであるから  $(\ell_{AA'})$  はエルミット行列。 $\mu_A$  の定義より

$$\lambda^A \bar{\mu}_A = \sqrt{t} \lambda^A (\bar{\lambda}^{A'} \bar{\ell}_{A'A}) = \sqrt{t} \lambda^A \ell_{AA'} \bar{\lambda}^{A'}$$

は純虚数である。従って零測地線  $L$  に対応するスピノルの対  $(\lambda^0, \lambda^1, \mu_0, \mu_1)$  は

$$(3.7) \quad \operatorname{Re} \lambda^A \bar{\mu}_A = 0$$

を満足する。逆も次の形で成立する。

補題 2.  $(\lambda^A, \mu_A)$  が  $\operatorname{Re} \lambda^A \bar{\mu}_A = 0$  を満足し、

$(\lambda_A) \neq 0$  であれば  $(\lambda^A, \mu_A)$  に対応する零測地

<sup>\*</sup>  $\mu_A$  が点  $P$  の取り方によらないことは容易に分かる。

線が存在する。

証明) もし  $\lambda^B \bar{\mu}_B \neq 0$  であれば

$$l_{AA'} = \sqrt{\lambda^B \bar{\mu}_B}^{-1} \bar{\mu}_A \mu_{A'}$$

とおくと  $(l_{AA'})$  はエルミット行列。従って (3.4) によって  $(l_{AA'})$  に対応する  $M$  のベクトル  $(l^i)$  が定まり,  $\overrightarrow{OP} = (l^i)$  として点  $P$  が定まる。この時点  $P$  を通り,  $n_{JJ'} = \lambda_J \bar{\lambda}_{J'}$  に対応するベクトル  $(n^i)$  を未来方向に持つ零測地線  $L$  が定まる。これが求めるものである。もし  $\lambda^A \bar{\mu}_A = 0$  であれば  $\nu_A$  なるスピノルに対して

$$l_{AA'} = \lambda_A \bar{\nu}_{A'} + \nu_A \bar{\lambda}_{A'}$$

とおくと  $-\sqrt{\lambda^A \nu_A} l_{AA'} = -\sqrt{\lambda^A \nu_A} \bar{\lambda}_{A'}$  となる。

この時  $\mu_{A'} = -\sqrt{\lambda^A \nu_A} \bar{\lambda}_{A'}$  なるように  $\nu_A$  をとることができる。あとは上と同じ。□

零測地線  $L$  に対して

$$L^0 = \lambda^0, L^1 = \lambda^1, L^2 = \mu_{0'}, L^3 = \mu_{1'}$$

とおく。これは  $\mathbb{C}^*$  を法として一意的に定まる。

補題 1, 2 より  $L$  が  $M$  の零測地線であれば

$(L^0 : L^1) \neq (0 : 0)$ 。また  $L^{(4)} = (\lambda^0 : \lambda^1 : 0 : 0)$  全体

は原点を通る零測地線全体を表わしている。

このことから  $(L) = (0:0:\mu_0:\mu_1)$  も無限遠点を通る零測地線全体と考えたくなる。これは  $M$  (正確には  $\bar{M}$ ) の等角変換を考えると自然に証明できる。これについては後述する。

かくして等角的にコンパクト化された Minkowski 空間  $\bar{M}$  の零測地線全体と  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  の点  $(\lambda^0:\lambda^1:\mu_0:\mu_1)$  で (3.7) を満足するものが 1 対 1 に対応することが分かった。零測地線全体が分かれば  $\bar{M}$  の点を復原できる。  $\bar{M}$  の点  $\delta$  には  $\delta$  を頂点とする零錐が対応し、零錐は  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  の射影直線に対応しているからである。(  $(\lambda^0:\lambda^1:0:0)$  が  $O$  を頂点とする零錐であることを注意せよ。) 従って次の定理が得られた。

定理 1 1)  $\bar{M}$  の零測地線  $L$  に対して  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  の点  $(L) = (\lambda^0:\lambda^1:\mu_0:\mu_1)$  が一意的に定まり、この座標は関係式 (3.7) を満足する。この対応は  $\bar{M}$  の零測地線と (3.7) で定義される  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  の部分集合  $N$  との間の全単射を与えている。

2)  $\bar{M}$  の各点  $\delta$  に対して  $N$  に含まれる  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  の射影直線が一意的に定まり、この対応によ

て  $\bar{M}$  と  $\{G \subset N \mid G \text{ は } \mathbb{P}(\mathbb{C}) \text{ の 射影直線}\}$  とが同型である。

座標を使ってこの定理を書換えてみよう。

$T = \mathbb{C}^4$ , 座標を  $(z^0, z^1, z^2, z^3)$  とする。 $2\operatorname{Re} \lambda^A \bar{\mu}_A$  に対応する式は

$$z^0 \bar{z}^2 + z^1 \bar{z}^3 + z^2 \bar{z}^0 + z^3 \bar{z}^1$$

となる。そこでエルミット形式  $\Phi$  を

$$(3.8) \quad \Phi(z, w) = z^0 \bar{w}^2 + z^1 \bar{w}^3 + z^2 \bar{w}^0 + z^3 \bar{w}^1$$

と定めると, 符号は  $(++--)$  となる。定理 1

りは  $N = \{T \text{ の 1次元部分空間 } R \mid \Phi|_R \equiv 0\}$  が  $\bar{M}$  の零測地線と 1対1 の対応があることで, これはまさに §2 の定理 3 に他ならない。

また  $\{G \subset N \mid G \text{ は } \mathbb{P}(\mathbb{C}) \text{ の 射影直線}\} \simeq$

$$\{\Gamma \subset T \mid \Gamma \text{ は } T \text{ の 2次元部分空間, } \Phi|_\Gamma \equiv 0\}$$

なる同型があるから, 定理 1, 2) は §2 の定理 2 に他ならない。かくして twistor 空間  $T$  の物理的意味は明瞭になった。 $(\lambda^0, \lambda^1, \mu_0, \mu_1) \in T$  の時  $(\lambda^0, \lambda^1)$  は運動量に  $(\mu_0, \mu_1)$  は角運動量に対応したスピノルと見なすことができる。

#### §4 複素 Minkowski 空間

前節の定理 1, 2) をヒントにして コンパクト化された Minkowski 空間  $\bar{M}$  の複素化を  $\mathbb{P}(\mathbb{C})$  の中の射影直線全体の作るグラスマン多様体  $G_1(\mathbb{P}(\mathbb{C}))$  (もしくは  $G_{2,4}(\mathbb{C})$ :  $\bar{M}$  内の 2 次元部分空間全体の作るグラスマン多様体) であると考え、これを  $M_{\mathbb{C}}$  と記す。  $M_{\mathbb{C}}$  は  $P(\wedge^2 T)$  の 2 次超曲面として実現でき、座標をうまくとって (1.1) の形をしているとしてよい。従って  $M_{\mathbb{C}}$  は自然に  $\bar{M}$  の複素化と考えられる。また  $F=F_2$  を  $\bar{M}$  の 1 次元部分空間, 2 次元部分空間の作る旗多様体とすると

$$(4.1) \quad \begin{array}{ccc} & F & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ & & \downarrow \end{array}$$

$$\mathbb{P}_3(\mathbb{C}) \xrightarrow{\pi} M_{\mathbb{C}}$$

なる自然な写像が定義できて、 $\pi$  なる代数的対応が存在する。次の補題は明らか。

補題 1. 1)  $p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  に対して  $\pi(p) = \beta(\alpha^{-1}(p))$  は  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  と同型

2)  $q \in M_{\mathbb{C}}$  に対して  $\pi^{-1}(q) = \alpha(\beta^{-1}(q)) \simeq \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$

さて twistor 空間  $T$  は

$$T^+ = \{z \in T \mid \Re(z, z) > 0\}, \quad T^- = \{z \in T \mid \Re(z, z) < 0\}$$

$$T^0 = \{z \in T \mid \Re(z, z) = 0\}$$

の 3 部分に互いに交わらないように分割できる。 $T^+$  の元を正 twistor,  $T^0$  の元を零 twistor などと呼ぶことにする。これらの  $P_3(\mathbb{C})$  への像 (但し  $T^0$  の時は  $T^0 - \{0\}$  の像) を  $P_3^+$ ,  $P_3^-$ ,  $N = P_3^0$  と書くことにする。また  $M_{\mathbb{C}}$  の部分集合を

$$M_{\mathbb{C}}^+ = \{g \in M_{\mathbb{C}} \mid g \text{ に対応する } T \text{ の 2 次元部分空間上で } \Re \text{ は 正定値}\}$$

$$M_{\mathbb{C}}^0 = \{g \in M_{\mathbb{C}} \mid g \text{ に対応する } T \text{ の 2 次元部分空間上で } \Re \text{ は 恒等的に } 0\}$$

と定義する。 $M_{\mathbb{C}}^-$  も同様に定義できる。 $M_{\mathbb{C}}^+, M_{\mathbb{C}}^0$  では  $M_{\mathbb{C}}$  全体を覆うことはできない。また  $M_{\mathbb{C}}^0 = \bar{M}$  である。 $F^+ = \beta^{-1}(M_{\mathbb{C}}^+)$ ,  $F^0 = \beta^{-1}(M_{\mathbb{C}}^0)$  とおくと (4.1) の代数的対応より

$$(4.2) \quad \begin{array}{ccc} F^+ & & \\ \swarrow \alpha & \searrow \beta & \\ P_3^+ & \xrightarrow{\tau^+} & M_{\mathbb{C}}^+ \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F^0 & & \\ \swarrow \alpha & \searrow \beta & \\ N & \xrightarrow{\tau_0} & \bar{M} \end{array}$$

なる対応を得る。

定理 1 . 1)  $\mathbb{P}_3^+$  は複素 4 次元の射影直線の族を含み,  $M_{\mathbb{C}}^+$  がそれらのパラメータ空間である

2)  $M_{\mathbb{C}}^+$  は  $\{Z \in M_2(\mathbb{C}) \mid \frac{1}{2\sqrt{4}}(Z - {}^t\bar{Z}) > 0\}$  と正則同型であり, 従って  $I_{2,2}$  型の有界対称領域

$\{Z \in M_2(\mathbb{C}) \mid I_2 - {}^t\bar{Z}Z > 0\}$  と正則同型である.

3)  $M = \{Z \in M_2(\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{Z} = Z\}$  とおくと  $M$  は  $M_{\mathbb{C}}^+$  の境界成分の一つであり,  $\Pi$  の中の稠密開集合である. また  $M$  は Minkowski 空間と同型である.

4)  $M$  は  $M_{\mathbb{C}}$  内の実解析的部分多様体で  $S^1 \times S^3$  と微分同相

5)  $N$  は  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  内の実解析的部分多様体であり  $S^2 \times S^3$  と微分同相

6)  $\rho: F^+ \rightarrow M_{\mathbb{C}}^+$  は自明な  $\mathbb{R}$  束と同型. 即ち

$$f: F^+ \cong \mathbb{R} \times M_{\mathbb{C}}^+$$

$$\begin{array}{ccc} & \searrow \rho & \swarrow \rho \\ & M_{\mathbb{C}} & \end{array}$$

が可換となる正則同型写像が存在する.

証明)  $T = \mathbb{C}^4$  上のエルミット形式  $\mathbb{H}$  は (3.8) で与えられているとする. 座標  $(Z^0, Z^1, Z^2, Z^3)$  によって

$$\begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$$

なる行列で表現されていることになる。ここでこの行列のかわりに、行列

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{A} I_2 \\ -\sqrt{A} I_2 & 0 \end{pmatrix}$$

で表現されるエルミット形式  $\mathfrak{H}_1$  を考えると、 $T$  の 1 次変換によって  $\mathfrak{H}$  は  $\mathfrak{H}_1$  に移る。従って  $\mathfrak{H}_1$  で考えてもよい。この時

$$M_2(\mathbb{C}) \ni Z = \begin{pmatrix} z^{11} & z^{12} \\ z^{21} & z^{22} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} Z \\ I_2 \end{pmatrix} \text{ の列ベクトルで張られる } T \text{ の 2 次元部分空間 } A(Z)$$

によって  $A: M_2(\mathbb{C}) \longrightarrow M_{\mathbb{C}}$  なる写像が作られ、これは  $M_{\mathbb{C}}$  の 1 つのアファイン座標を与えている。この時  $\mathfrak{H}_1|_{A(Z)} > 0$  なる条件は

$$\frac{1}{2\sqrt{A}}(Z - {}^t\bar{Z}) > 0$$

なる条件と同値であることはすぐ分かる。

また  $\frac{1}{2\sqrt{A}}(Z - {}^t\bar{Z}) = 0$  が  $I_{2,2}$  型の対称領域の境界成分であることも容易に分かる。4) は 5) で示しており、5) も容易。6) は  $M_{\mathbb{C}}^+$  の定義と 2) より直ちに出来る。りは定義より明らか。□

さて上の証明中に使った写像  $A$  を使って、  
 $M_C^A = A(M_2(\mathbb{C}))$  と置こう。  $M_C^A$  は  $M_C$  のアフィン開  
 集合であり  $M_C^+$ ,  $M$  を含んでいる。またエルミ  
 ット形式として上の  $\Phi$  を使う。

$G = \{ g \in SL(T) \mid \Phi_1(gu, gv) = \Phi_1(u, v), \forall u, v \in T \}$   
 とおくと  $G$  は  $SU(2, 2)$  と同型である。以下  $G$  を  
 $SU(2, 2)$  と同一視する。  $g \in SU(2, 2)$  は

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_2 \quad \begin{aligned} A^* \bar{B} &= B^* \bar{A}, & C^* \bar{D} &= D^* \bar{C} \\ A^* \bar{D} - B^* \bar{C} &= I_2 \end{aligned}$$

と書ける。また

$$g \begin{bmatrix} Z \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} AZ+B \\ CZ+D \end{pmatrix}$$

となり、  $\det(CZ+D) \neq 0$  である  $Z \in M_2(\mathbb{C})$  に対して

$$(4.1) \quad Z \longmapsto (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$$

なる変換を引き起す。特に

$$G \supset \widetilde{P} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \right\}$$

なる部分群を考えると、  $\widetilde{P}$  は  $M_C^A$  の解析的自  
 己同型を引き起す。  $M_C^A$  のアフィン座標では、

$$(4.2) \quad Z \longmapsto AZ^* \bar{A} + B$$

と書くことができる。特にこの変換を  $M$  に制  
 限し、  $B$  を  $B^* \bar{B} = B$  なる条件をつけると、これ

は  $M$  から  $M$  への自己同型を引き起す。

$$M \ni Z \longrightarrow AZ^t \bar{A} \in M, \quad A \in SL(2, \mathbb{C})$$

は §3 の冒頭で述べたように，狭義ローレンツ変換に他ならず，変換 (4.2) は  $A \in SL(2, \mathbb{C})$ ,  ${}^t \bar{B} = B$  の時，狭義ポアンカレ変換に他ならない。従って

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & {}^t \bar{A} \end{pmatrix} \mid A \in SL(2, \mathbb{C}), B = {}^t \bar{B} \right\} \subset \tilde{P}$$

は狭義ポアンカレ群の被覆群である。 $M_{\mathbb{C}}^+$  の定義から明かなように  $P$  は  $M_{\mathbb{C}}^+$  上にも解析的自己同型群として作用している。

続いて  $M$  の等角変換群を考察しよう。この群はポアンカレ群及び変換

$$(4.3) \quad \begin{cases} x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \longmapsto (px^0, px^1, px^2, px^3), p \in \mathbb{R} \\ x \longmapsto -\frac{x}{\|x\|^2} \end{cases}$$

より生成されている。但しここで §3 で使った  $M$  の座標  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  を使用し， $\|x\|^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$  とする。(4.3) の第二の変換は零錐の部分では定義されていない。 $a^2 = p$  とすると (4.3) の第一の変換に対応するのは

$$\begin{pmatrix} aI_2 & 0 \\ 0 & a^{-1}I_2 \end{pmatrix}$$

であり,  $\widehat{P}/P$  は この変換の複素化になっている。  
 また (4.3) の第二の変換の一般化は

$$Z \longrightarrow -BZ^{-1}\bar{B}, \quad B \in GL(2, \mathbb{C})$$

となり, 行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ (-\bar{B})^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

となる。即ち  $G = SU(2, 2)$  は 狭義等角変換群の複素群の複素化になっている。 $M_{\mathbb{C}}^A$  の“正則距離”を  $dx(dZ)$  と定義すると, これを  $M$  に制限したものは  $M$  のローレンツ距離となる。 $G$  は正則距離  $dx(dZ)$  に関して  $M_{\mathbb{C}}^A$  の等角変換群である。またこのことより  $\bar{M}$  上に  $M$  の等角変換群が推移的に作用することも容易に示される。

## §5 Maxwell の方程式

$M$  を Minkowski 空間,  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  を §3 でとった  $M$  の座標とする,  $x^1, x^2, x^3$  を空間の  $x, y, z$  座標とし,  $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$ ,  $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$  をこの座標で表現した電場及び磁場とする。歪対称行列  $(F_{ij})$  を

$$(5.1) \quad (F_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

と定義し

$$F = F_{ij} dx^i \wedge dx^j$$

とおく。さてローレンツ距離  $ds^2$  を

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

として  $*$ -作用素  $*$ :  $\bigwedge^p T^*M \longrightarrow \bigwedge^{4-p} T^*M$  を

$$\alpha = \alpha_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

$$(5.2) \quad (*\alpha)_{j_1 \dots j_{4-p}} = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \varepsilon_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_{4-p}} \alpha^{i_1 \dots i_p}$$

と定義する。但し

$$\varepsilon_{ijkl} = \text{sign} \begin{pmatrix} ijkl \\ 0123 \end{pmatrix},$$

$$\alpha^{i_1 \dots i_p} = g^{i_1 k_1} \dots g^{i_p k_p} \alpha_{k_1 \dots k_p}$$

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} = (g_{ij})^{-1}.$$

すると  $\Lambda^p T^*M$  に対して  $*^2 = (-1)^{p+1}$  となる。特に  
2 型式に対しては  $*^2 = -1$ 。そこで

$$(5.3) \quad \Lambda^2 T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \Lambda_+^2(M) \oplus \Lambda_-^2(M)$$

と  $*$  の固有空間に分解する。ここで  $\Lambda_+^2$  は固有値  $\sqrt{-1}$ ,  $\Lambda_-^2$  は固有値  $-\sqrt{-1}$  に対応する固有空間とする。簡単な計算によって次の補題を得る。

補題 1. 1) 真空中、電荷が存在しない時の  
Maxwell の方程式は

$$dF = 0$$

$$d*F = 0$$

となる。(電荷がある時は  $dF=0$ ,  $d*F=*J$  となる。但し  $J$  は 4 元電流を表す。)

2) (5.3) によって  $F = F_+ + F_-$  と直和分解すると、Maxwell の方程式は

$$dF_+ = 0, \quad dF_- = 0$$

と書ける。

この結果をスピノルの言葉を使って表現してみる。 $(F_{ij})$  は 2 階の共変テンソルであるから、(3.3) によって対応するスピノルを

$$F_{ab} \longleftrightarrow F_{AA'BB'}$$

と書くことにする。  $F_{ab} = -F_{ba}$  より

$$F_{BB'AA'} = -F_{AA'BB'}$$

従って

$$\begin{aligned} F_{AA'BB'} &= \frac{1}{2}(F_{AA'BB'} - F_{BB'AA'}) \\ &= \frac{1}{2}(F_{AA'BB'} - F_{BA'AB'} + F_{BA'AB'} - F_{BB'AA'}) \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{AB} F_{MA'} M_{B'} + \varepsilon_{A'B'} F_{BM'A} M') \end{aligned}$$

そこで

$$\varphi_{AB} = \frac{1}{2} F_{MA'} M_{B'}, \quad \psi_{A'B'} = \frac{1}{2} F_{MA'} M_{B'}$$

とおくと,

(5.3)  $F_{AA'BB'} = \varepsilon_{AB} \psi_{A'B'} + \varepsilon_{A'B'} \varphi_{AB}$ ,  $\psi_{A'B'} = \psi_{B'A'}$ ,  $\varphi_{AB} = \varphi_{BA}$   
 §3の記号を使うと  $F_{AA'BB'}$  は  $\Lambda^* \otimes \bar{\Lambda}^* \otimes \Lambda^* \otimes \bar{\Lambda}^*$  の切断を与えており,  $\varphi_{AB}$  は  $\Lambda^* \otimes \Lambda^*$ ,  $\psi_{A'B'}$  は  $\bar{\Lambda}^* \otimes \bar{\Lambda}^*$  の切断を与えている。一方これらの束には  $SL(2, \mathbb{C})$  が作用しているが (5.3) は  $SL(2, \mathbb{C})$  の既約表現への分解を与えている。

補題 2. 1)  $F$  が実型式であるための必要十分条件は  $\psi_{A'B'} = \overline{\varphi_{AB}}$ .

2)  $F$  が自己共役, 即ち  $*F = \sqrt{-1}F$  となるための必要十分条件は  $F = \varepsilon_{AB} \psi_{A'B'}$

3)  $F$  が自己反共役, 即ち  $*F = -\sqrt{-1}F$  となるた

めの必要かつ十分条件は  $F = \varepsilon_{A'B'} \varphi_{AB}$ .

1) は (3.3) より明か。2) は単純な長い計算で証明されるので証明は省す。

さて  $M$  のスピノル座標  $(x^{AA'})$  を (3.3) を使って

$$\begin{pmatrix} x^{00'} & x^{01'} \\ x^{10'} & x^{11'} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_0 + x_1 & x_2 + \sqrt{x_3} \\ x_2 - \sqrt{x_3} & x_0 - x_1 \end{pmatrix}$$

と定める。また

$$\nabla_{AA'} = \frac{\partial}{\partial x^{AA'}}, \quad \nabla^{AA'} = \frac{\partial}{\partial x_{AA'}} = \varepsilon^{BA} \varepsilon^{B'A'} \nabla_{BB'}$$

と定義する。

補題 3.  $dF^+ = 0$  は  $\nabla^{AA'} \psi_{A'B'} = 0$  と同値であり,  
 $dF^- = 0$  は  $\nabla^{AA'} \varphi_{AB} = 0$  と同値である。

(証明)  $F^+ = F_{ab}^+ dx^a \wedge dx^b$  とすると、補題 2 より

$$F_{ab}^+ = \sigma_a^{AA'} \sigma_b^{BB'} \varepsilon_{AB} \psi_{A'B'}.$$

一方  $dF^+ = 0$  は

$$\frac{\partial F_{bc}^+}{\partial x^a} - \frac{\partial F_{ac}^+}{\partial x^b} + \frac{\partial F_{ab}^+}{\partial x^c} = 0$$

と書ける。従って

$$\begin{aligned} \sigma_b^{BB'} \sigma_c^{CC'} \varepsilon_{BC} \frac{\partial \psi_{B'C'}}{\partial x^a} - \sigma_a^{AA'} \sigma_c^{CC'} \varepsilon_{AC} \frac{\partial \psi_{A'C'}}{\partial x^b} \\ + \sigma_a^{AA'} \sigma_b^{BB'} \varepsilon_{AB} \frac{\partial \psi_{A'B'}}{\partial x^c} = 0 \end{aligned}$$

また  $x^{AA'} = \sigma_a^{AA'} x^a$  より  $\frac{\partial}{\partial x^a} = \sigma_a^{AA'} \frac{\partial}{\partial x^{AA'}}$  だから、

上式は

$$\sigma_a^{AA'} \sigma_b^{BB'} \sigma_c^{CC'} (\epsilon_{BC} \nabla_{AA'} \psi_{B'C'} - \epsilon_{AC} \nabla_{BB'} \psi_{A'C'} + \epsilon_{AB} \nabla_{CC'} \psi_{A'B'}) = 0$$

となり、これより

$$\epsilon_{BC} \nabla_{AA'} \psi_{B'C'} - \epsilon_{AC} \nabla_{BB'} \psi_{A'C'} + \epsilon_{AB} \nabla_{CC'} \psi_{A'B'} = 0$$

となる。A, B, C は 0, 1 のいずれかの値しかとらない。そこで  $A=B$ ,  $A \neq C$  と仮定しても一般性を失わない。従って  $\epsilon_{AC} = \pm 1$  より

$$\nabla_{AA'} \psi_{B'C'} - \nabla_{AB'} \psi_{A'C'} = 0.$$

この両辺に  $\epsilon^{CA} \epsilon^{A'B'}$  をかけて A, A', B' に関して和をとると

$$\nabla^{CB'} \psi_{B'C'} + \nabla^{CA'} \psi_{A'C'} = 2 \nabla^{CB'} \psi_{B'C'} = 0.$$

$\varphi_{AB}$  に関しても同様。 □

そこで一般に正の半正数  $s$  に対して

$$(5.4) \quad \begin{cases} \nabla^{AA'} \varphi_{AB \dots D} = 0 & \underbrace{\varphi_{AB \dots D}}_{2s} \text{ は添数に関して対称} \\ \nabla^{AA'} \psi_{A'B' \dots D'} = 0 & \underbrace{\psi_{A'B' \dots D'}}_{2s} \text{ は添数に関して対称} \end{cases}$$

なる方程式を考えることができる。これはスピンが  $s$  の 静止質量0の 粒子の古典的 (量子化されていない) 方程式と考えられる。  $s = 1/2$  の時が中性微子

に対応している。

さて方程式 (5.4) は

$$\nabla^{AA'} = \varepsilon^{AB} \varepsilon^{A'B'} \frac{\partial}{\partial z^{BB'}}$$

と考えることによって  $M_C^A$ , 従って特に  $M_C^+$  上の方程式と考えることができる。  $M_C^+$  上では現実的な意味も方程式の解は持っていないが, 解の  $M$  への何らかの意味での境界値は (5.4) の  $M$  上の解と考えられる。方程式

$$(5.5) \quad \nabla^{AA'} \psi_{A'B' \dots D'} = 0$$

を  $M_C^+$  上で考えると解を具体的に構成できることを以下に示す。即ち  $H$  を  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  上の超平面切断束とする時,  $H^1(\mathbb{P}_3^+, H^{-2s-2})$  の元よりこの方程式の解を構成できることを示そう。

そこで Kähler 空間  $T = \mathbb{C}^4$ , 及び座標  $(z^0, z^1, z^2, z^3)$ , 2次形式

$$\mathfrak{H}(z, \bar{z}) = z^0 \bar{z}^2 + z^1 \bar{z}^3 + z^2 \bar{z}^0 + z^3 \bar{z}^1$$

を考える。§3の考察より

$$(\lambda^A) = (\lambda^0, \lambda^1) = (z^0, z^1), \quad (\mu_{A'}) = (\mu_{0'}, \mu_{1'}) = (z^2, z^3)$$

なる記法を使うことにする。

$$\pi: T - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$$

を自然な写像とする時,  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  の開集合  $U$  に対して  $\hat{U} = \pi^{-1}(U)$  と書くことにする. また以下

$$\gamma = z^2 \frac{\partial}{\partial z^2}$$

と記号を固定する.  $\mathcal{E}^p(W)$  は  $W$  上の  $p$  次微分形式 ( $\mathbb{C}$  に値をとるとする) 全体とする.

補題 4.  $\pi^*$  によって  $\mathcal{E}^p(U)$  は

$$\{f \in \mathcal{E}^p(\hat{U}) \mid \gamma \lrcorner f = 0, \bar{\gamma} \lrcorner f = 0, \gamma \lrcorner df = 0, \bar{\gamma} \lrcorner df = 0\}$$

と同型である. ここで  $\lrcorner$  は内部積を表す.

複素多様体  $W$ ,  $W$  上の複素直線束  $L$  に対して  $\mathcal{E}^p(W) = H^0(W, \mathcal{E}^p_W)$ ,  $\mathcal{E}^p(W, L) = H^0(W, \mathcal{E}^p_W \otimes L)$  と定義する. すると上の補題と同様にして

$$\pi^*: \mathcal{E}^1(U) \cong \{f \in \mathcal{E}^1(\hat{U}) \mid \gamma \lrcorner f = 0, \gamma \lrcorner \partial f = 0\}$$

$$\pi^*: \mathcal{E}^p(U, H^m) \cong \{f \in \mathcal{E}^p(\hat{U}) \mid \gamma \lrcorner f = 0, \gamma \lrcorner \partial f = m f\}$$

が分かる. この同型によってこの両者を同一視する. さて

$$\theta = z^3 dz^4 - z^4 dz^3$$

とおくと,

$$\gamma \lrcorner \theta = 0, \quad \gamma \lrcorner \partial \theta = 2\theta$$

となり,  $\theta \in \mathcal{E}^1(\mathbb{P}_3, H)$  と考えることができる.

$H^1(\mathbb{P}_3^+, H^{-n-2})$ ,  $n=2s$  を Dolbeault コホモロジー

$H_{\bar{\partial}}^{0,1}(\mathbb{P}_3^+, H^{-n-2})$  で表現する。  $f \in H_{\bar{\partial}}^{0,1}(\mathbb{P}_3^+, H^{-n-2})$  は  $T^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z\bar{z}) > 0\}$  上の  $(0,1)$  型の微分形式  $f$  で  $\bar{\partial}f = 0, \nabla \lrcorner f = 0, \gamma \lrcorner \partial f = -(n+2)f$  なるものと対応している。以下  $H_{\bar{\partial}}^{0,1}(\mathbb{P}_3^+, H^{-n-2})$  は  $T^+$  上のかかる型式として代表元をとる。

さて右図で  $\beta: F^+ \rightarrow M_{\mathbb{C}}^+$  は固有写像であり、 $\beta$  の各ファイバーは  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  であった。(§4 定理 1, 6)。

$$\begin{array}{ccc} & F^+ & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ \mathbb{P}_3^+ & \xrightarrow{\tau^+} & M_{\mathbb{C}}^+ \end{array}$$

$f \in H_{\bar{\partial}}^{0,1}(\mathbb{P}_3^+, H^{-n-2})$  に対して、 $\tau = \underbrace{M_A M_B \cdots M_D}_n f \wedge \theta$  を考えると、 $\tau$  は  $\bar{\partial}$ -閉  $(1,1)$  型の微分形式となり、

$\gamma \lrcorner \tau = 0, \nabla \lrcorner \tau = 0, \gamma \lrcorner d\tau = 0, \nabla \lrcorner d\tau = 0$  を満足する。従って  $\tau$  は  $\mathbb{P}_3^+$  上の  $(1,1)$  型の微分形式である。任意の点  $\delta \in M_{\mathbb{C}}^+$  に対して  $\tau^+(\delta) = \alpha \beta^{-1}(\delta)$  は  $\mathbb{P}_3^+$  の射影直線である。そこで

$$\rho_{A'B' \cdots D'}^{(1)}(\delta) = \int_{\tau^+(\delta)} M_A M_B \cdots M_D f \wedge \theta$$

を考えるとこれは  $M_{\mathbb{C}}^+$  上の対称スピノルを定める。すると次の定理が成立する。

定理 1.  $\varphi_{A'B' \dots D'}$  は  $M_C^+$  上 正則であり,  
 $A', B', \dots, D'$  に関して対称,かつ方程式

$$\nabla^{AA'} \varphi_{A'B' \dots D'} = 0$$

を  $M_C^+$  上で満足する。また  $\varphi_{A'B' \dots D'}$  は  $H_{\frac{3}{2}}^{0,1}(H_3^+, H^{(1,1)})$   
 のコホモロジー類にのみ依存する。

(証明).  $M_C^+ \subset M_C^A$  であるので, §4 定理 1 によ  
 って  $Z^{XX'}$  なる  $2 \times 2$  行列によって座標が与え  
 られる。 $\rho^{-1}(Z^{XX'})$  に対応する  $T$  の 2 次元部分  
 空間は  $\{(\lambda^X, \mu_{X'}) \in T \mid \lambda^X = \sqrt{t} Z^{XX'} \mu_{X'}\}$  であら  
 ることが, §4 定理 1 の証明より分かる。よこ  
 で, 次の図式を得る。

$$\begin{array}{ccccc} (\pi_{A'}, Z^{AA'}) \in \mathbb{C}^2 \times M_C^+ & \longrightarrow & F^+ \simeq P_1(\mathbb{C}) \times M_C^+ & \xrightarrow{\beta} & M_C^+ \\ \downarrow & & \downarrow \alpha & & \\ (\pi_{A'}, \pi_{A'}) \in T^+ & \xrightarrow{\pi} & P_3^+ & & \end{array}$$

$$I_{A'B' \dots D'} = \mu_{A'} \mu_{B'} \dots \mu_{D'} f \wedge \theta \quad \text{とおくと}$$

$$\varphi_{A'B' \dots D'}(Z^{XX'}) = \int_{P_1^+ \times Z^{XX'}} \alpha^* I_{A'B' \dots D'}(\mu_{X'}, Z^{XX'})$$

これが  $Z^{XX'}$  に関して正則であることは, 以下の  
 の議論と同様にできるので略する。

$$\frac{\partial}{\partial Z^{AA'}} \varphi_{\underbrace{B' \dots D'}_n}(Z^{AK}) = \int_{\mathbb{P}^1 \times Z^{AK}} \frac{\partial}{\partial Z^{AA'}} (\alpha_0^* I_{\underbrace{B' \dots D'}_n})(\mu_{A'}, Z^{AA'})$$

$$f = f_{M'} d\bar{\lambda}^{M'} + f^M d\bar{\mu}_M \text{ と書くと}$$

$$\alpha_0^* I_{B' \dots D'}(\mu_{A'}, Z^{AA'})$$

$$= \mu_{B'} \dots \mu_{D'} \{ f_{M'} d(\sqrt{-1} \bar{Z}^{MM'} \bar{\mu}_M) + f^M d\bar{\mu}_M \} \wedge \theta$$

従って

$$\frac{\partial}{\partial Z^{AA'}} (\alpha_0^* I_{B' \dots D'})(\mu_{A'}, Z^{AA'})$$

$$= -\mu_{B'} \dots \mu_{D'} \theta \wedge \left\{ \frac{\partial f_{M'}}{\partial \lambda^A} \frac{\partial \lambda^A}{\partial Z^{AA'}} d\bar{\lambda}^{M'} + \frac{\partial f^M}{\partial \lambda^A} \frac{\partial \lambda^A}{\partial Z^{AA'}} d\bar{\mu}_M \right\}$$

かつ  $d\bar{\lambda}^{M'}|_{\tau^{-1}(Z^{AA'})} = -\sqrt{-1} \bar{Z}^{MM'} d\bar{\mu}_M$  であるので

$$\frac{\partial}{\partial Z^{AA'}} (\alpha_0^* I_{B' \dots D'})(\mu_{A'}, Z^{AA'})|_{\tau^{-1}(Z^{AA'})}$$

$$= -\sqrt{-1} \underbrace{\mu_{A'} \mu_{B'} \dots \mu_{D'}}_{n+1} \theta \wedge \left\{ \frac{\partial f_{M'}}{\partial \lambda^A} d\bar{\lambda}^{M'} + \frac{\partial f^M}{\partial \lambda^A} d\bar{\mu}_M \right\}|_{\tau^{-1}(Z^{AA'})}$$

この最後の式は  $A', B', \dots, D'$  に関して対称。従

って  $\frac{\partial}{\partial Z^{AA'}} \varphi_{B' \dots D'}$  は  $A', B', \dots, D'$  に関して対称である。従って,  $\varepsilon^{A'B'}$  は歪対称であるので

$$\varepsilon^{A'B'} \frac{\partial}{\partial Z^{AA'}} \varphi_{B' \dots D'} = 0$$

$$\nabla^{BB'} = \varepsilon^{AB} \varepsilon^{A'B'} \frac{\partial}{\partial Z^A}$$

であるので

$$\nabla^{BB'} \varphi_{B' \dots D'} = 0.$$

これが求める式であった。

次に  $\varphi_{B' \dots D'}$  が コホモロジイ類にのみ依然することを示す。そこで  $f = \bar{\partial} \rho$ ,  $\rho \in E^0(\mathbb{P}_3^+, H^{n-2})$  としよう。すると

$$\int_{\tau(p)} \mu_{B'} \dots \mu_{D'} f \wedge \theta = \int_{\mathbb{P}^1} \bar{\partial} (\mu_{B'} \dots \mu_{D'} \rho \wedge \theta)$$

$$= \int_{\mathbb{P}^1} d(\mu_{B'} \dots \mu_{D'} \rho \wedge \theta) = 0$$

但し ここで  $\mathbb{P}^1$  上で (2,0) 型式は 0 であることを使った。 □

以上によって方程式

$$\nabla^{AA'} \underbrace{\varphi_{A'B' \dots D'}}_n = 0$$

の  $M_G^+$  上の正則解ができた。これらの恒等的には 0 でないことは積分表示より容易にたしかめられる。実は  $M_G^+$  上の正則解はすべて上述の方法によって得られることが示されている。そのためには図式

$$\begin{array}{ccc} & F^+ & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ P_3^+ & & M_C^+ \end{array}$$

を使う。  $T_\alpha(F^+) \subset TF^+$  を  $\alpha$  の各ファイバーに接する接ベクトル全体の作る束とし、  $\pi_\alpha: T^*F^+ \longrightarrow T_\alpha^*$  を  $\alpha$  の双対よりできる自然射とする。 $d$  を  $T^*F^+$  の外微分作用素として  $d_\alpha = \pi_\alpha^* d$ , 即ち  $\alpha$  のファイバー方向に沿っての外微分とする。この時

$$d_\alpha: H_{\frac{0}{2}}^{0,1}(F^+, \alpha^* H^{-n-2}) \longrightarrow H_{\frac{0}{2}}^{0,1}(F^+, \alpha^* H^{-n-2} \otimes T_\alpha^*)$$

なる写像ができる。また  $\beta$  は  $P^1$  束であるので、

$V_m = R^1\beta_* \alpha^* H^{-n-2}$ ,  $V_m^\alpha = R^1\beta_*(\alpha^* H^{-n-2} \otimes T_\alpha^*)$  は共に  $M_C^+$  上のベクトル束であり、消滅定理によって

$$H_{\frac{0}{2}}^{0,1}(F^+, \alpha^* H^{-n-2}) \cong H^0(M_C^+, V_m)$$

$$H_{\frac{0}{2}}^{0,1}(F^+, \alpha^* H^{-n-2} \otimes T_\alpha^*) \cong H^0(M_C^+, V_m^\alpha)$$

が成立する。従って

$$\begin{array}{ccccc} & \alpha^* \nearrow & H_{\frac{0}{2}}^{0,1}(F^+, \alpha^* H^{-n-2}) & \xrightarrow{d_\alpha} & H_{\frac{0}{2}}^{0,1}(F^+, \alpha^* H^{-n-2} \otimes T_\alpha^*) \\ & & \downarrow \int & & \downarrow \int \\ H_{\frac{0}{2}}^{0,1}(P_3^+, H^{-n-2}) & \searrow & & \xrightarrow{\nabla_\alpha} & H^0(M_C^+, V_m^\alpha) \\ & & H^0(M_C^+, V_m) & & \end{array}$$

なる図式ができる。この時次の定理が成立す。

る。

定理 2. 1)  $V_m$  のファイバーは  $\mathbb{C}^2$  の  $m$  回対称積  $S^m(\mathbb{C}^2)$  である。

2)  $V_m^\lambda$  のファイバーは  $S^{m-1}(\mathbb{C}^2) \times \mathbb{C}^2$  である。

3) 1) により  $V_m \cong S^m(\Lambda^*)$  であるが, この時  $V_\lambda$  は スピン  $s = n/2$  の静止質量 0 の粒子に対する微分作用素 (5.5) である

$$4) \quad \text{Ker } d_\lambda = \text{Im } d^*$$

1) 2) 3) の証明は 単なる計算である。4) については論文 [4] を参照されたい。

### 文献

- [1] W. Kopyczyński & L.S. Woronowicz, Rep. Math. Physics 2, 35-51, (1971)
- [2] R. Penrose, Twistor algebra, J. Math. Physics 8, 345-366 (1967)
- [3] ————. Nonlinear gravitons and curved twistor theory, General Relativity and Gravitation 7, 31-51 (1976)
- [4] R.O. Wells, Jr. Complex manifolds and mathematical Physics. Bull. A.M.S に近刊予定,