

Subdiagonal 環のある構造について

新潟大 自然科学 吉 国興 (Guoxing Ji)

新潟大 自然科学 大和田智義 (Tomoyoshi Ohwada)

新潟大 理学部 斎藤 吉助 (Kichi-Suke Saito)

1 序論

自己共役でない作用素環の構造の研究は、現在までに、不変部分空間の問題や正規でない作用素の構造の研究と関連して、今までに多くの研究者によってなされてきた。その中で、1960 年代後半に、作用素環の解析性の研究として Arveson [1] により導入された subdiagonal 環の概念は、弱*-ディリクレ環の非可換版であるばかりでなく、Helson-Lowdenslager [4] による行列値解析関数により生成される部分環に関する研究の一般化でもある。また、Loebl-Muhly [11]、河村-富山 [9] は von Neumann 環上の flow により定義されるスペクトル部分空間の理論から、系統的な subdiagonal 環の例を与えた。又、subdiagonal 環の構造として不変部分空間の構造理論、分解定理、極大性など今までに多くの結果が示されている (cf., [1], [12], [13], [16]-[20], etc.)。ここでは、subdiagonal 環の極大性について焦点を絞って、最近の結果 (特に [6] を中心として) を紹介する事を目的とする。まず、subdiagonal 環の定義から始めよう。

$\mathcal{M}$ を可分なヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 環とする。 Φ を $\mathcal{M}$ から von Neumann 部分環 $\mathfrak{D}$ の上への faithful normal expectation として、 $\mathfrak{A}$ を $\mathcal{M}$ の部分環とする。このとき、 $\mathfrak{A}$ が Φ に関する $\mathcal{M}$ の subdiagonal 環であるとは、次の条件 (1)~(3) を満たすときをいう。

(1) $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^* = \mathfrak{D}$ 、($\mathfrak{D}$ を $\mathfrak{A}$ の diagonal という)

(2) Φ は $\mathfrak{A}$ 上乗法的、

(3) $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^*$ は $\mathcal{M}$ において σ -弱稠密である。

更に、 $\mathfrak{A}$ が maximal subdiagonal 環であるとは、 $\mathcal{M}$ の Φ に関する subdiagonal 環の中で極大であるときをいう。

[1] における subdiagonal 環の定義で $\mathfrak{A}$ を σ -弱閉とは仮定していないが、 $\mathfrak{A}$ の σ -弱閉包はまた、 Φ に関する subdiagonal 環であるので、以後 subdiagonal 環は σ -弱閉と仮定することにする。

一方、nest 環は、作用素の triangular form の研究のため Ringrose [14] により導入された。Nest 環の構造についてはこれまでに多くの結果が得られているが、それらは Davidson の Nest algebras [2] によくまとめられているので、そちらを参考にしてもらいたい。

さて、subdiagonal 環に関する興味深い問題の一つに maximality、すなわち、

全ての σ -弱閉な subdiagonal 環は subdiagonal 環として maximal であるか？

という問題がある。2節で subdiagonal 環の幾つかの例を挙げるが、それらは全て maximal subdiagonal 環であり、今のところこの問題は完全には解けていない (cf., Exel [3])。そこで、3節では von Neumann 環のモジュラー自己同型群に関して maximal subdiagonal 環が不変であることを示し、この不変性と maximality の関係を考察する。更に、4節ではこの結果の応用として $B(\mathcal{H})$ の subdiagonal 環はいつも atomic nest 環になることや、factor を diagonal に持つ $B(\mathcal{H})$ の subdiagonal 環は存在しないことを示す。

2 subdiagonal 環の例と maximality

ここでは、良く知られている subdiagonal 環の例を幾つか紹介し、その後、subdiagonal 環の maximality の問題にも触れる。

例 1 $\mathcal{M}$ を行列環 M_n とし、 $\mathfrak{A}$ を上三角行列全体とすれば、*diagonal* $\mathfrak{D}$ は対角行列全体であるので、 Φ を

$$\Phi((a_{ij})_{n \times n}) = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

と定義すれば、 Φ は $\mathfrak{D}$ への *expectation* となる。このとき、 $\mathfrak{A}$ は Φ に関する $\mathcal{M}$ の *subdiagonal* 環である。

例 2 $\mathcal{M}$ を $L^\infty(\mathbb{T})$ ($\mathbb{T}$ は 単位円) とし、 $\mathfrak{A}$ を $H^\infty(\mathbb{T})$ とする。 Φ を

$$\Phi(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta$$

とすれば、 $\mathfrak{A}$ は Φ に関する $\mathcal{M}$ の *subdiagonal* 環である。

例 3 (Loebl-Muhly [11], 河村-富山 [9], etc.) $\mathcal{M}$ を *von Neumann* 環とし、 $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を $\mathcal{M}$ の *flow* つまり σ -弱連続な一径数自己同型群とする。任意の $X \in \mathcal{M}$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対して、

$$\alpha(f)X = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \alpha_t(X) dt$$

とし、

$$Z(f) = \{t \in \mathbb{R} \mid \hat{f}(t) = 0\} \quad \left(\text{ここで } \hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-its} f(s) ds \right)$$

としたとき、*Arveson* スペクトルを

$$Sp_\alpha(X) = \bigcap \{Z(f) \mid f \in L^1(\mathbb{R}), \alpha(f)X = 0\}$$

で定義する。このとき

$$H^\infty(\alpha) = \{X \in \mathcal{M} : Sp_\alpha(X) \subseteq [0, \infty)\}$$

によりスペクトル部分空間を定義すれば、 $H^\infty(\alpha)$ は $\mathcal{M}$ の σ -弱閉部分環でありその *diagonal* $\mathfrak{D}$ は $\mathcal{M}$ の $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ に関する不動点環になっている。このとき、 $\mathcal{M}$ が α -finite (i.e., $\mathcal{M}$ から $\mathcal{M}^\alpha$ の上への faithful normal expectation が存在する) なら、 $H^\infty(\alpha)$ は *subdiagonal* 環である。

この結果の特別な場合として McAsey-Muhly-斎藤 [12] による解析的接合積の概念が導入されている。

例 4 (McAsey-Muhly-斎藤 [12]) $\mathfrak{D}$ をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の *von Neumann* 環とし、 α を $\mathfrak{D}$ の $*$ -自己同型写像としたとき、任意の $X \in \mathfrak{D}$ に対して

$$(\pi_\alpha(X)\xi)(n) = \alpha^{-n}(X)\xi(n), \quad (S\xi)(n) = \xi(n-1), \quad \xi \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathcal{H}), \quad n \in \mathbb{Z}$$

により $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathcal{H})$ 上の作用素を定義し、 $\pi_\alpha(\mathfrak{D}) = \{\pi_\alpha(x) \mid x \in \mathfrak{D}\}$ とおく。このとき、 $\pi_\alpha(\mathfrak{D})$ と S により生成された *von Neumann* 環を、 $\mathfrak{D}$ の α に関する接合積といい、 $\mathfrak{D} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ とかく。また、 $\mathfrak{D} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ の σ -弱閉部分環 $\overline{\text{alg}\{\pi_\alpha(\mathfrak{D}), S\}}^{\sigma-w}$ を解析的接合積といい $\mathfrak{D} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_+$ とかく。 $\{\beta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を $\{\alpha^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の双対作用、すなわち $(V_t\xi)(n) = e^{2\pi i n t}\xi(n)$, ($\xi \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathcal{H})$) により与えられるユニタリ作用素 V_t に対して、 $\beta_t(X) = V_t X V_t^*$, ($X \in \mathfrak{D} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$) とすれば

$$\varepsilon(X) = \int_0^1 \beta_t(X) dt, \quad X \in \mathfrak{D} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$$

は $\mathfrak{D} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ から $\mathfrak{D}$ への $\{\beta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ -不変な *faithful normal expectation* になる。このとき、 $\mathfrak{D} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_+$ は $\mathfrak{D}$ を *diagonal* に持つ、 $\mathfrak{D} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ の ε に関する *subdiagonal* 環になる。

次に、*subdiagonal* 環の maximality について考えることにする。まず maximality を考えるとき、Arveson により与えられた次の結果は重要である。

定理 2.1 (Arveson [1]) $\mathfrak{A}$ を Φ に関する *subdiagonal* 環とし、 $\mathfrak{A}_0 = \{X \in \mathfrak{A} : \Phi(X) = 0\}$ とする。このとき $\mathfrak{A}_m = \{X \in \mathfrak{M} : \Phi(\mathfrak{A}X\mathfrak{A}_0) = \Phi(\mathfrak{A}_0X\mathfrak{A}) = 0\}$ とすれば、 $\mathfrak{A}_m$ は $\mathfrak{A}$ を含む Φ に関する $\mathfrak{M}$ の *maximal subdiagonal* 環である。

この定理より、*subdiagonal* 環 $\mathfrak{A}$ が maximal である事を示すには $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_m$ を示せばよいことになる。先にも述べたように、ここに挙げた全ての例は、*maximal subdiagonal* 環であり、今のところ maximal でない σ -弱閉 *subdiagonal* 環の例は見つかっていない。そこで Arveson により、次の conjecture が提唱された。

Conjecture 1 (Arveson) 全ての $(\sigma$ -弱閉) *subdiagonal* 環は *maximal* であるか？

この conjecture に対して、次の結果が得られている。 $\mathfrak{A}$ を Φ に関する $\mathcal{M}$ の *subdiagonal* 環とする。このとき、亀井 [8] により、*antisymmetric* な *finite subdiagonal* 環 $\mathfrak{A}$ は *maximal* であることを示した。ここで、*antisymmetric* とは、*diagonal* がスカラーの場合をいい、*finite subdiagonal* 環とは、 $\tau \circ \Phi = \tau$ を満たす *faithful normal finite trace* τ が存在するときをいう。また、Exel [3] において *finite subdiagonal* 環 $\mathfrak{A}$ はいつも *maximal* であることが示された。しかし、一般の *von Neumann* 環の場合はまだ解決されていない。

3 Subdiagonal 環の σ_t^ϕ -invariance

finite subdiagonal 環を考えたとき、定義より明らかに $\mathcal{M}$ は *finite von Neumann* 環であるが、一般の場合はこのような *faithful normal finite trace* が存在するとは限らない。しかし、ヒルベルト空間が可分であるので、条件 $\phi \circ \Phi = \phi$ を満たす *faithful normal state* ϕ はいつも存在する。よって、富田-竹崎理論より ϕ に関して $\mathcal{M}$ のモジュラー自己同型群 $\{\sigma_t^\phi\}_{t \in \mathbb{R}}$ が考えられる。 ϕ が *faithful normal finite trace* のとき ϕ に関する $\{\sigma_t^\phi\}_{t \in \mathbb{R}}$ はいつも自明であるので問題にならないが、一般の場合にはモジュラー自己同型群と *subdiagonal* 環について、次の結果を得た。

定理 3.1 $\mathcal{M}$ を *von Neumann* 環、 $\{\sigma_t^\phi\}_{t \in \mathbb{R}}$ を ϕ に関する $\mathcal{M}$ のモジュラー自己同型群とする。このとき *maximal subdiagonal* 環 $\mathfrak{A}$ は $\{\sigma_t^\phi\}_{t \in \mathbb{R}}$ -invariant である。すなわち $\sigma_t^\phi(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$ ($\forall t \in \mathbb{R}$) が成り立つ。

この定理の証明は、GNS 表現から得られる $\mathcal{M}$ の *cyclic, separating vector* ξ_0 に対して、 $\mathcal{H}_1 = [\mathfrak{A}_0 \xi_0]$, $\mathcal{H}_2 = [\mathfrak{D} \xi_0]$, $\mathcal{H}_3 = [\mathfrak{A}_0^* \xi_0]$ とおくと、

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3, \quad \mathcal{D}\mathcal{H}_i \subset \mathcal{H}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\mathfrak{A}_0(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2) \subset \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \quad \mathfrak{A}_0^*(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3) \subset \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3$$

が成り立つので、まず次の補題が得られる。

補題 3.2

$$\mathfrak{D} = \left\{ D \in \mathcal{M} \mid D = \begin{pmatrix} D_{11} & & 0 \\ & D_{22} & \\ 0 & & D_{33} \end{pmatrix} \right\}$$

かつ

$$\mathfrak{A}_0 = \left\{ X \in \mathcal{M} \mid X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ & 0 & X_{23} \\ 0 & & X_{33} \end{pmatrix} \right\}$$

証明

$$\mathcal{B} = \left\{ D \in \mathcal{M} \mid D = \begin{pmatrix} D_{11} & & 0 \\ & D_{22} & \\ 0 & & D_{33} \end{pmatrix} \right\}$$

かつ

$$\mathfrak{C} = \left\{ X \in \mathcal{M} \mid X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ & 0 & X_{23} \\ 0 & & X_{33} \end{pmatrix} \right\}$$

とおく。このとき明らかに $\mathfrak{D} \subset \mathcal{B}$ かつ $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{C}$ が成り立つ。仮に、 $D \in \mathcal{B}$ とすれば、 $\Phi(D) \in \mathcal{B}$ より

$$\Phi(D) = \begin{pmatrix} V_{11} & & 0 \\ & V_{22} & \\ 0 & & V_{33} \end{pmatrix}。$$

いま、 $\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{D} + \mathfrak{A}_0^*$ は $\mathcal{M}$ で稠密より $\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_0^*$ は $\text{Ker}(\Phi)$ で稠密であるので、 P_2 を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}_2$ の上への射影作用素とすれば明らかに $P_2(X\xi_0) = \Phi(X)\xi_0$, ($X \in \mathcal{M}$) である。よって、全ての $X \in \text{Ker}(\Phi)$ に対して $P_2XP_2 = 0$ となる。また、 $D - \Phi(D) \in \text{Ker}(\Phi)$ より $D_{22} - V_{22} = P_2(D - \Phi(D))P_2 = 0$ であるので、

$$(D - \Phi(D))\xi_0 = (D_{22} - V_{22})\xi_0 = 0。$$

いま、 ξ_0 は $\mathcal{M}$ に対する separating vector であり、 $\xi_0 \in \mathcal{H}_2$ であるので、 $D = \Phi(D) \in \mathfrak{D}$ 。

故に $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}$ となる。

一方、任意の $X \in \mathfrak{C}$ に対して、 $\Phi(X) \in \mathfrak{D}$ であるので $\Phi(X)$ は

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} V_{11} & & 0 \\ & V_{22} & \\ 0 & & V_{33} \end{pmatrix}$$

と表される。よって、同様に $P_2(\Phi(X) - X)P_2 = V_{22} = 0$ となり $\Phi(X) = 0$ を得る。明らかに、 $\mathfrak{C}$ は $\mathfrak{D}$ の両側加群であるので $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{C}$ である。よって、 $\mathfrak{D} + \mathfrak{C}$ は $\mathfrak{A}$ を含む Φ に関する $\mathcal{M}$ の subdiagonal 環である。よって、 $\mathfrak{A}$ の maximality より $\mathfrak{A} = \mathfrak{D} + \mathfrak{C}$ となり $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{C}$ を得る。故に示された。 ■

モジュラー自己同型群を得るために、 $\mathcal{H}$ の $S_0\lambda\xi = \bar{\lambda}S_0\xi$, $\xi \in \mathcal{D}(S)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ の意味で反線形前閉作用素 S_0 を $S_0A\xi_0 = A^*\xi_0$ ($A \in \mathcal{M}$) で定義すれば、次の補題が成り立つ。

補題 3.3 S を S_0 の閉包とする。このとき、

$$S = \begin{pmatrix} & & S_3 \\ 0 & & \\ & S_2 & \\ S_1 & & 0 \end{pmatrix}$$

ここで、 S_i ($i = 1, 2, 3$) は $\mathfrak{F}_i$ を定義域とする閉作用素で次をみたす。

$$S_1\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_3, \quad S_2\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_2, \quad S_3\mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}_1$$

証明 $\{\mathfrak{A}_0\xi_0\} \oplus \{\mathfrak{D}\xi_0\} \oplus \{\mathfrak{A}_0^*\xi_0\} \subseteq \mathcal{D}(S)$ であるので、前閉作用素 V_0 を次のように定義する。

$$V_0(A + D + B^*)\xi_0 = (A^* + D^* + B)\xi_0, \quad A, B \in \mathfrak{A}_0, \quad D \in \mathfrak{D}.$$

このとき、 S_0 は V_0 の拡張であるので、 S は V_0 の閉包 V の拡張となる。また、 S のグラフ $G(S)$ は $\{X\xi_0 \oplus X^*\xi_0 : X \in \mathcal{M}\}$ であり、 $\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{D} + \mathfrak{A}_0^*$ は $\mathcal{M}$ で σ -弱稠密なので、すぐに $S = V$ が示される。

いま、任意の $\zeta \oplus S\zeta \in G(S)$ をとれば、 S は V_0 の閉包であったので $\mathfrak{A}_0$ の列 $\{A_n, B_n\}_{n=1}^\infty$ と $\mathfrak{D}$ の列 $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ が

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\| (A_n + D_n + B_n^*)\xi_0 - \zeta \|^2 + \| (A_n^* + D_n^* + B_n)\xi_0 - S\zeta \|^2) = 0$$

を満たすように存在する。よって、 P_i ($i = 1, 2, 3$) を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}_i$ の上への射影作用素とすれば、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\| A_n \xi_0 - P_1 \zeta \|^2 + \| D_n \xi_0 - P_2 \zeta \|^2 + \| B_n^* \xi_0 - P_3 \zeta \|^2 + \\ \| A_n^* \xi_0 - P_3 S\zeta \|^2 + \| D_n^* \xi_0 - P_2 S\zeta \|^2 + \| B_n \xi_0 - P_1 S\zeta \|^2) = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、 $P_i \zeta \oplus S P_i \zeta \in G(S)$ ($i=1, 2, 3$) かつ $P_i \mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(S)$ ($i=1, 2, 3$) より $\mathfrak{F}_i = P_i \mathcal{D}(S)$ とすれば $S\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_3$, $S\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_2$, $S\mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}_1$ となり示された。

■

この閉作用素 S により、モジュラー作用素 Δ は $\Delta = S^* S$ で与えられるので、補題 3.3 により、

$$\Delta = \begin{pmatrix} S_1^* S_1 & & 0 \\ & S_2^* S_2 & \\ 0 & & S_3^* S_3 \end{pmatrix}$$

である。よって、モジュラー自己同型群 $\{\sigma_t^\phi\}_{t \in \mathbb{R}}$ は

$$\sigma_t^\phi(X) = \Delta^{it} X \Delta^{-it} \quad (X \in \mathcal{M}, t \in \mathbb{R})$$

であるから、補題 3.2, 3.3 より $\sigma_t^\phi(\mathfrak{D}) = \mathfrak{D}$, $\sigma_t^\phi(\mathfrak{A}_0) = \mathfrak{A}_0$ となり $\sigma_t^\phi(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$ ($t \in \mathbb{R}$)。よって定理 3.1 が示される。

■

$\mathcal{M}^\phi$ を ϕ の centralizer すなわち、

$$\mathcal{M}^\phi = \{A \in \mathcal{M} \mid \phi(AB) = \phi(BA), \forall B \in \mathcal{M}\}$$

とすれば、 ϕ は M^ϕ 上の faithful normal finite trace となるので、 M^ϕ は finite von Neumann 環である。このとき、 M から M^ϕ の上への faithful normal expectation $\mathcal{E}$ が存在するので、次の系が得られる。

系 3.4 $\mathcal{E}(\mathfrak{A})$ は M^ϕ の $\phi|_{M^\phi}$ に関する finite maximal subdiagonal 環である。

証明 任意の $X \in M$ に対して、[10] の Theorem 1.2 より $\mathcal{E}(X)$ は $\{\sigma_t^\phi(X) \mid t \in \mathbb{R}\}$ の凸包の σ -弱閉包の元である。定理 3.1 より $\mathfrak{A}$ は σ_t^ϕ に関して不変であるので、 $\mathcal{E}(\mathfrak{A}_0) \subset \mathfrak{A}_0$ かつ $\mathcal{E}(\mathfrak{D}) \subset \mathfrak{D}$ を得る。このとき、明らかに $\mathcal{E}(\mathfrak{A})$ は M^ϕ の $\phi|_{M^\phi}$ に関する subdiagonal 環である。また、[7] の Proposition 9.2.14 より $\phi|_{M^\phi}$ は M^ϕ 上の faithful normal finite trace であるので $\mathcal{E}(\mathfrak{A})$ は M^ϕ の finite subdiagonal 環である。故に、[3] の Theorem 7 から $\mathcal{E}(\mathfrak{A})$ は M^ϕ の finite maximal subdiagonal 環である。よって示された。 ■

定理 2 は maximal subdiagonal 環なら $\{\sigma_t^\phi\}_{t \in \mathbb{R}}$ に関して不変である事を述べているが、これに関連して次の問題が生じる。

問題 1 $\{\sigma_t^\phi\}_{t \in \mathbb{R}}$ に関して不変でない subdiagonal 環が存在するか？

問題 2 $\phi \circ \Phi = \phi$ を満たす全ての ϕ に関して $\sigma_t^\phi(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$ ($t \in \mathbb{R}$) が成り立つなら、 $\mathfrak{A}$ は maximal か？

実際、問題 1 の例が見つければ、Conjecture 1 は否定的に解決されるが、いまのところこれらの問題は未解決である。

4 $B(\mathcal{H})$ の Subdiagonal 環

この章では、定理 3.1 の一つの応用として、 $B(\mathcal{H})$ の subdiagonal 環と nest 環の関係について論じる。

$\mathcal{N}$ が nest であるとは $\mathcal{N}$ が $\mathcal{H}$ の閉部分空間からなる全順序な閉束であるときをいう。特に $\mathcal{N}$ の任意の元 N に対して、 $N_- = \bigvee \{\mathfrak{M} \in \mathcal{N} \mid \mathfrak{M} \subsetneq N\}$ としたとき nest $\mathcal{N}$ が atomic であるとは、 $\mathcal{H} = \bigvee \{K \ominus N_- \mid K \in \mathcal{N}\}$ を満たすときをいう。nest $\mathcal{N}$ に対して、nest 環 $\text{alg}\mathcal{N}$ を

$$\text{alg}\mathcal{N} = \{T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \mid TN \subset N \ (\forall N \in \mathcal{N})\}$$

により定義して、 $\mathfrak{D} = \text{alg}\mathcal{N} \cap (\text{alg}\mathcal{N})^*$ を nest 環 $\text{alg}\mathcal{N}$ の diagonal と呼ぶ。このとき nest $\mathcal{N}$ が atomic であることの同値条件として、次の結果はよく知られている。

定理 4.1 [2, Theorem 8.6] $\text{alg}\mathcal{N}$ を nest 環とし、 $\mathfrak{D}$ をその diagonal とする。このとき $\mathcal{N}$ が atomic nest であることと、 $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ から $\mathfrak{D}$ の上への faithful normal expectation Φ が存在することは同値である。

さらに、このとき $\text{alg}\mathcal{N}$ は Φ に関する $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ の subdiagonal 環になる。すなわち、atomic nest を持つ nest 環は subdiagonal 環であるが、ここでは逆の問題を考え次の結果を得た。

定理 4.2 $\mathfrak{A}$ を Φ に関する $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ の σ -弱閉な subdiagonal 環とすれば、ある atomic nest $\mathcal{N}$ が存在して、 $\mathfrak{A} = \text{alg}\mathcal{N}$ を満たす。

この定理の証明のために、少し準備が必要である。 $\mathfrak{A}$ を $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ の faithful normal expectation Φ に関する subdiagonal 環とする。 $\mathcal{H}$ は可分であったので、 $\phi \circ \Phi = \phi$ を満たす $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 上の faithful normal state ϕ が存在する。 ρ を $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ の canonical trace とすれば、[7] の Lemma 9.2.19 より positive contraction $K \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ が次の条件を満たすように存在する。

$I - K$: trace-class operator

$$\rho((I - K)A) = \phi(KA) = \phi(AK) \quad (A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})).$$

更に、 K と $I - K$ は共に単射的である。そこで $F = K^{-1}(I - K)$ とおけば [7] の Lemma 9.2.20 より、 $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ の ϕ に関するモジュラー自己同型群 $\{\sigma_t^\phi\}_{t \in \mathbb{R}}$ が次のように表される。

$$\sigma_t^\phi(X) = F^{it} X F^{-it} \quad (X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}), t \in \mathbb{R}).$$

$B(\mathcal{H})^\phi$ を $B(\mathcal{H})$ の ϕ に関する centralizer とすれば、[11] の Theorem 4.2.3 より $B(\mathcal{H})^\phi$ は $\{F\}$ の可換子環である。 $I - K$ は trace-class 正作用素であったので、

$$I - K = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \lambda_n P_n$$

と表せる。ここで、 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $I - K$ の異なる固有値、 P_n を λ_n に関する $I - K$ のスペクトル射影作用素とする。このとき $F = K^{-1}(I - K) = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \lambda_n(1 - \lambda_n)^{-1} P_n$ より、 $B(\mathcal{H})^\phi$ の次の分解をえる。

$$B(\mathcal{H})^\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathcal{M}_{k_n}.$$

ここで、 $k_n = \dim P_n \mathcal{H}$ とし、 $\mathcal{M}_{k_n}$ を $P_n \mathcal{H}$ 上の $k_n \times k_n$ 行列全体とする。いま、3節の後半の議論と同様に $B(\mathcal{H})$ から $B(\mathcal{H})^\phi$ の上への faithful normal expectation $\mathcal{E}$ が存在するので、次の命題を得る。

命題 4.3 $\mathfrak{D}$ の中に 次の条件を満たすランク 1 の射影作用素の族 $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在する。

$$Q_i Q_j = 0 \ (\forall i \neq j), \quad \sum_{n=1}^{\infty} Q_n = I$$

証明 $\mathfrak{A}_m$ を定理 2.1 で定義した $\mathfrak{A}$ を含む $\mathcal{M}$ の maximal subdiagonal 環とし、 P_n を上で定義した射影作用素とする。まず始めに、 $P_n \in \mathcal{E}(\mathfrak{D}) \subset \mathfrak{D}$ を示す。系 3.4 より $\mathcal{E}(\mathfrak{A}_m)$ は diagonal $\mathcal{E}(\mathfrak{D})$ を持つ $B(\mathcal{H})^\phi$ の finite maximal subdiagonal 環であるから、 $\mathcal{H} = P_n \mathcal{H} \oplus P_n^\perp \mathcal{H}$ 上の可逆作用素 $X = 2P_n \oplus (I - P_n)$ を考えれば、[1] の Theorem 4.4.1 よりユニタリ作用素 $U \in B(\mathcal{H})^\phi$ と可逆作用素 $A \in \mathcal{E}(\mathfrak{A}_m) \cap \mathcal{E}(\mathfrak{A}_m)^{-1}$ が存在して、 $X = UA$ を満たす。 P_n は $B(\mathcal{H})^\phi \cap (B(\mathcal{H})^\phi)'$ の射影作用素であったので、 $\mathcal{H} = P_n \mathcal{H} \oplus P_n^\perp \mathcal{H}$ 上で $U = U_1 \oplus U_2$, $A = A_1 \oplus A_2$ と分解できる。このとき、明らかに $A_1 = 2U_1^*$, $A_2 = U_2^*$ である。よって、 $\sigma(A) = 2\sigma(U_1^*) \cup \sigma(U_2^*)$ より polynomial approximation theorem (cf., [15, Theorem 13.7]) から $P_n \in \mathcal{E}(\mathfrak{A}_m)$ となり $P_n \in \mathcal{E}(\mathfrak{D})$ を得る。故に、系 3.4 より $P_n \in \mathfrak{D}$ が示された。これより $P_n \mathcal{E}(\mathfrak{A}_m) P_n$ は $\mathcal{M}_{k_n}$ の subdiagonal 環であるから、[5] の Theorem 2.1 より、 $P_n \mathcal{E}(\mathfrak{A}_m) P_n$ は $\mathcal{M}_{k_n}$ の finite nest を持つ nest 環である。よって示された。 ■

このランク 1 の射影作用素を用いて、次の補題を得る。

補題 4.4 自明でない $\mathfrak{A}$ を不変にする部分空間が存在する。

証明 命題 4.3 より $\mathfrak{D}'$ は atomic である。よって、[1] の Theorem 6.2.1, 6.2.2 より $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の canonical trace ρ に対して $\rho \circ \Phi = \rho$ が成り立つ。系 4.3 よりランク 1 の射影作用素 $e \otimes e \in \mathfrak{D}$ が存在して、 $\{\mathfrak{A}_0 e\} \neq \{0\}$ を満たす。ここで、 $e \otimes e(x) = (x, e)e$, $\forall x \in \mathcal{H}$ 。よって $\mathfrak{M} = [\mathfrak{A}_0 e]$ とおけば、 $\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{A}$ -不変であり、 $T \in \mathfrak{A}_0$ に対して

$$(Te, e) = \rho(T(e \otimes e)) = \rho \circ \Phi(T(e \otimes e)) = 0$$

であるので、 $\mathfrak{M}$ は自明ではない。故に示された。 ■

定理 4.2 の証明 補題 4.4 と Zorn の補題から、 $\mathcal{H}$ の $\mathfrak{A}$ -不変な部分空間からなる maximal nest $\mathcal{N}$ が存在する。 $\mathcal{N} \subset \mathfrak{D}'$ と $\mathfrak{D}'$ は atomic であるので、nest $\mathcal{N}$ は atomic である。そこで $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathcal{N}$ の atom 全体とする。このとき $\mathcal{N}$ の maximality と補題 4.4 から $E_\lambda \mathcal{B}(\mathcal{H}) E_\lambda \subset \mathfrak{D}$ を得る。これより、 $\mathcal{N}' = \mathfrak{D}$ となり

$$\Phi(T) = \sum_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda T E_\lambda, \quad \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

よって、明らかに $\mathfrak{A} \subset \text{alg } \mathcal{N}$ となる。

逆に、 $T \in \text{alg } \mathcal{N}$ とすれば、 $A_\alpha, B_\alpha \in \mathfrak{A}$ が存在して $A_\alpha + B_\alpha^* \rightarrow T$ (σ -弱) を満たす。任意の $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対して、 $P_\lambda, P_\mu \in \mathcal{N}$ が存在して、 $E_\lambda = P_\lambda \ominus P_{\lambda-}$, $E_\mu = P_\mu \ominus P_{\mu-}$ を満たす。そこで、

$$\lambda < \mu \iff P_\lambda < P_\mu$$

により順序を定義すれば、 $\lambda > \mu$ のとき $T \in \text{alg } \mathcal{N}$ であるので、 $E_\lambda T E_\mu = 0$ となる。また、 $\lambda = \mu$ のときは、 $E_\lambda(A_\alpha + B_\alpha^*)E_\lambda \in \mathfrak{D}$ であるので、 $E_\lambda T E_\lambda \in \mathfrak{D} \subset \mathfrak{A}$ となる。 $\lambda < \mu$ のときは $E_\lambda B_\alpha^* E_\mu = 0$ であるから、 $E_\lambda T E_\mu \in \mathfrak{A}$ を得る。故に、 $T = \sum_{\lambda \leq \mu} E_\lambda T E_\mu \in \mathfrak{A}$ となり示された。 ■

最後に、最近、斎藤-綿谷 [19],[20] によって有限次元の因子環とその部分因子環 $\mathfrak{D}$ に対して、 $\mathfrak{D}$ を diagonal に持つ subdiagonal 環は存在しない事が示されている。いま、特に因子環を $B(\mathcal{H})$ で考えた場合、その部分因子環 $\mathfrak{D}$ を diagonal に持つ subdiagonal 環 $\mathfrak{A}$ が存在すれば、定理 4.2 より $\mathfrak{A}$ は atomic nest $\mathcal{N}$ を持つ nest 環になるので、nest $\mathcal{N}$ は $\mathcal{N} = \{0, \mathcal{H}\}$ となり、同様の結果を得ることができる。

系 4.5 $\mathfrak{D}$ を $B(\mathcal{H})$ の部分因子環とし $B(\mathcal{H})$ から $\mathfrak{D}$ の上への *faithful normal expectation* が存在するとする。このとき、 $\mathfrak{D}$ を diagonal に持つ subdiagonal 環は $B(\mathcal{H})$ を除いて存在しない。

参考文献

- [1] W. B. Arveson, *Analyticity in operator algebras*, Amer. J. Math., 89(1967), 587-642.
- [2] K. R. Davidson, *Nest algebras*, Pitman Research Notes in Math., 191(1988).
- [3] R. Exel, *Maximal subdiagonal algebras*, Amer. J. Math., 110(1988), 775-785.
- [4] H. Helson and D. Lowdenslager, *prediction theory and Fourier series in several variables*, Acta Math., 99(1958), 165-202.
- [5] G. Ji, T. Ohwada and K-S. Saito, *Triangular forms of subdiagonal algebras*, preprint.
- [6] G. Ji, T. Ohwada and K-S. Saito, *Certain structure of subdiagonal algebras*, preprint.
- [7] R. V. Kadison and J. R. Ringrose, *Fundamentals of the theory of operator algebras II*, Academic Press, 1986.
- [8] N. Kamei, *Simply invariant subspace theorems for antisymmetric finite subdiagonal algebras*, Tohoku Math. J., 21(1969), 467-473.
- [9] S. Kawamura and J. Tomiyama, *On subdiagonal algebras associated with flows in operator algebras*, J. Math. Soc. Japan, 29(1977), 73-90.
- [10] I. Kovacs and J. Szűcs, *Ergodic type theorems in von Neumann algebras*, Acta Sci. Math., 27(1966), 233-246.

- [11] R. Loebl and P. S. Muhly, *Analyticity and flows in von Neumann algebras*, J. Funct. Anal., 29(1978), 214-252.
- [12] M. McAsey, P. S. Muhly, K-S. Saito, *Non-selfadjoint crossed products (Invariant subspaces and maximality)*, Trans. Amer. Math. Soc., 248(1979), 381-409.
- [13] T. Nakazi and Y. Watatani, *Invariant subspace theorems for subdiagonal algebras*, preprint.
- [14] J. Ringrose, *On some algebras of operators*, Proc. London Math., 15(1965), 61-83.
- [15] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1987.
- [16] K-S. Saito, *A note on invariant subspaces for finite maximal subdiagonal algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., 77(1979), 348-352.
- [17] K-S. Saito, *Invariant subspaces for finite maximal subdiagonal algebras*, Pac. J. Math., 93(1981), 431-434.
- [18] K-S. Saito, *Generalized interpolation in finite maximal subdiagonal algebras*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 117(1995), 11-20.
- [19] K-S. Saito and Y. Watatani, *Subdiagonal algebras for subfactors*, J. Operator Theory, 31(1994), 311-317.
- [20] K-S. Saito and Y. Watatani, *Subdiagonal algebras for subfactors II*, Canad. Math. Bull., to appear.