

非可換量子渦の衝突とラング渦形成ダイナミクス

東京大学 大学院総合文化研究科 小林 未知数¹

(2009年11月17日受理)

本記事では2本の非可換量子渦の衝突ダイナミクスにおける研究について報告する。2本の量子渦の衝突ダイナミクスとして、つなぎ換えがよく知られているが、非可換量子渦の場合に、つなぎ換えや通り抜けのダイナミクスが幾何学的に禁止され、渦と渦の間にラング渦と呼ばれる新しい量子渦が作られることを明らかにする。さらにこのような非可換量子渦が、ラング渦形成のダイナミクスを含めてスピンの2・スピノール・ボース・アインシュタイン凝縮体で実現することを解説する。

1 イントロダクション

量子渦は超流動系におけるメイントピックの1つであり、その理論的な予言 [1]、そして実験で観測されて以来 [2]、非常に長い歴史を持ち、今でも多くの研究者の研究対象となっている。量子渦は量子化された超流動速度場の循環を持っており、例えばスカラー・ボース・アインシュタイン凝縮体 (BEC) の場合、その循環は h/M の整数倍である。ここで h はプランク定数、 M は構成原子の質量である。量子化された循環は超流動⁴He [2]、超流動³He [3]、冷却原子 BEC [4, 5] 等で観測されている。

量子渦の本質はオーダーパラメーターの位相欠陥として存在することであり、オーダーパラメーターの幾何学的な構造から決まるトポロジカルチャージによって特徴づけられる。量子渦のトポロジカルチャージは、量子渦を1周する閉経路に沿ってオーダーパラメーターがどのように変化したかによって定義される。例えば、スカラー BEC の場合、オーダーパラメーターマニフォールドは $U(1)$ であり、量子渦を1周する閉経路に沿って $U(1)$ の位相が 2π の整数倍だけ変化する。その結果、トポロジカルチャージは整数、つまり可換群の元で特徴づけられる。これは量子渦の循環が h/M の整数倍となることに対応している。多成分 BEC の場合、離散スピン・ゲージ対称性により h/M の分数倍の循環を持つ場合がある。例として、超流動³He [6] やスピン1・スピノール BEC [7-9] における半整数量子渦が挙げられる。さらに興味深いトポロジカルチャージを持った量子渦として、本記事のメイントピックである非可換量子渦がある。例えば、スピノール BEC の場合には、量子渦を1周する閉経路に沿った $U(1)$ の位相変化以外にスピンの $SO(3)$ 回転がある。

¹E-mail: michikaz@jiro.c.u-tokyo.ac.jp

$SO(3)$ は非可換群なので、量子渦のトポロジカルチャージが $SO(3)$ の非可換な部分群の元として表されることがあり、そのような量子渦が非可換量子渦として定義される。

量子渦のこのような幾何学的特徴を最も反映するのが、量子渦の衝突ダイナミクスである。 $U(1)$ の量子渦の場合、2本の量子渦が衝突すると、通常はつなぎ換えを起こすことが知られている。量子渦のつなぎ換えダイナミクスは超流動⁴Heにおいて理論的に詳しく解析されており [10–12]、固体水素を用いた量子渦の可視化実験において観測された [13]。また特異な場合として、第1種超伝導体における磁束量子のように、お互いが引力相互作用をする $U(1)$ 量子渦 [14, 15] や2成分 BEC [16] ($U(1) \times U(1)$ 量子渦) の場合に、衝突する2本をつなぐ新たな量子渦が現れることが理論的に予言されている。梯子の段のような構造をしていることから、このような量子渦をラング渦と呼ぶことにする。

非可換量子渦の場合に、この状況が劇的に変化する。非可換量子渦の衝突はまず Poenaru と Toulouse によって研究され [17]、その後 Mermin によって研究された [18]。これらの研究から2本の量子渦の衝突によってラング渦が作られることが予言されているが、本研究によって、お互いに非可換なトポロジカルチャージを持った2本の量子渦において、つなぎ換えや通り抜けが幾何学的に禁止され、ラング渦の形成のみが許されることを示す。またトポロジカルチャージの可換・非可換によって決定的に異なるダイナミクスとして、量子渦の絡み目の幾何学的安定性があり、可換なトポロジカルチャージを持った量子渦2本で絡み目を作った場合、これらは必ずほどくことができるのに対し、非可換な場合にはほどけないことを示す。

さらに本研究ではこのような非可換量子渦の衝突ダイナミクスが、スピン2・スピノール BEC の cyclic 相において実現可能であることを明らかにする [19]。実際にこの相のトポロジカルチャージは非可換な正四面体回転群によって表される。

本記事はこれら一連の非可換量子渦における研究結果について、2章構成で解説する。第2章ではホモトピー理論を用いた非可換量子渦の定義と、非可換量子渦の衝突ダイナミクスの代数的な描像について説明する。第3章ではスピン2・スピノール・BEC とその非可換量子渦について議論し、衝突ダイナミクスの数値シミュレーションを紹介する。

2 非可換量子渦とその衝突ダイナミクス

本章ではまず、ホモトピーを用いた量子渦のトポロジカルチャージ、そして非可換量子渦の定義を行う。厳密なホモトピーの議論は専門書を参考していただくとし、ここでは量子渦の議論に必要な必要最小限の部分のみ議論する。その後に量子渦の衝突ダイナミクスについて議論する。

2.1 オーダーパラメーターマニフォールド

量子渦は液体ヘリウムの超流動相や冷却原子気体のボース・アインシュタイン凝縮相のような、転移温度以下で対称性が破れる相において存在することができる。ここでリー群 G を自由エネルギー

ギーを不変に保つ変換操作の集合とし、 H を相転移後の系を記述するオーダーパラメーター ψ を不変に保つ変換操作の集合

$$H = \{h \in G \mid h\psi = \psi\} \quad (1)$$

であるとする。例えば、超流動 ^4He や s 波超伝導、スカラー BEC の場合、オーダーパラメーターは $\psi = |\psi|e^{i\phi}$ で記述される。ここで ϕ はオーダーパラメーターの位相になるが、 $U(1)$ のゲージ変換 $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$ に対して自由エネルギーは変化しないので $G \simeq U(1)$ となり、オーダーパラメーターを不変に保つ変換は恒等変換のみなので $H = \{1\}$ である。相転移後の系の取りうる可能な状態は G の元となるが、式 (1) より、いくつかの元は集合 H に相当する分だけ等価である。その結果、等価であるものを除いて系が本当に取りうる状態は、オーダーパラメーターマニフォールドと呼ばれる商空間

$$\frac{G}{H} \quad (2)$$

に限られることになる。

2.2 量子渦のトポロジカルチャージ

次にホモトピー理論を用いた量子渦のトポロジカルチャージを議論する。

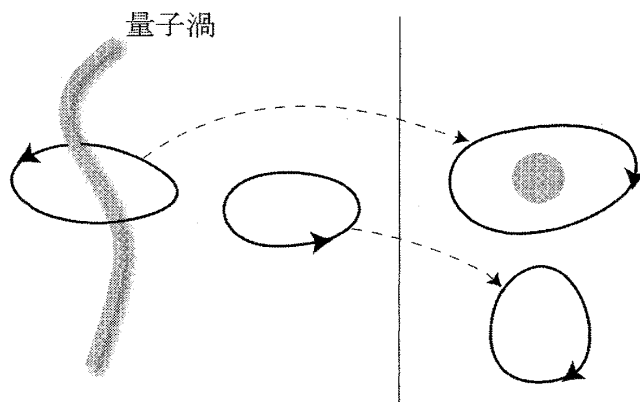


図 1: 実空間上のループ (左) と、対応するオーダーパラメーターマニフォールド上のループ (右)。量子渦を囲まないループは連続変形によって 1 点に収束させることができ、量子渦を囲むループは収束させることができない。

系があるオーダーパラメーター ψ で記述されたとする。実空間上に閉じたループを考え、その各点 $\mathbf{r}$ にオーダーパラメーター ψ を対応させたとする。ただし $\mathbf{r}$ の変化に対して ψ が連続的に変化するとする。そうすると、実空間上のループに対応してオーダーパラメーターマニフォールド上にループが描かれる (図 1)。オーダーパラメーターマニフォールド内のある 2 つのループが連続変形によってお互いに一致させることができるとき、この 2 つのループをホモトピー同値であるという。このループを変形させて 1 点に収束させることができるとき、対応する実空間上のループは渦を囲まないが、もしも 1 点に収束させることができないならば、対応する実空間上のループは渦を囲んでいることになる。また異なる 2 本の渦が同じトポロジカルチャージを持っていると

き、それらの渦に対応するオーダーパラメーターマニフォールド中の2つのループはホモトピー同値であり、異なるトポロジカルチャージを持っていれば、オーダーパラメーターマニフォールド中の2つのループはホモトピー同値でない。このようにして量子渦のトポロジカルチャージを定義することができる。

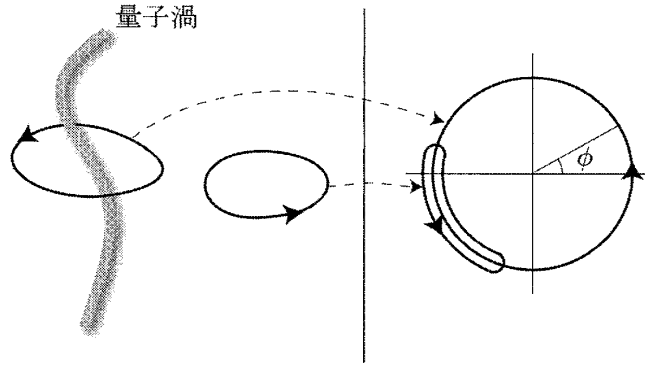


図 2: $G/H \simeq U(1)$ における実空間上のループ (左) と、対応するオーダーパラメーターマニフォールド上のループ (右)。量子渦はオーダーパラメーターマニフォールドを何週したかで特徴付けられ、 $\pi_1(G/H) \simeq \pi_1(U(1)) \simeq \mathbb{Z}$ で記述される。

ここで2つの例を考える。最も簡単な例としてオーダーパラメーターが任意を実数を取れる、つまり $G/H \simeq \mathbb{R}$ であるとする。実数 $\mathbb{R}$ は数直線で表すことができるため、実空間上のループに対応するオーダーパラメーターマニフォールド上のループは線分となり、任意の線分は1点に収束させることができるため、量子渦は存在しない。次に簡単な例として、前節で議論した $\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|e^{i\phi(\mathbf{r})}$ で与えられる複素スカラーのオーダーパラメーター、つまり $G/H \simeq U(1)$ の場合を考える。位相 $\phi = 0$ と $\phi = 2\pi$ は同じオーダーパラメーターを与えるため、 $G/H \simeq \mathbb{R}$ の場合とは異なって、 $G/H \simeq U(1)$ はオーダーパラメーターマニフォールド中でループとなる。整数 $n \neq 0$ としてこのループを n 週した経路は一点に収束させることができないため、そのような経路に対応して量子渦が存在する (図 2)。結局、量子渦のトポロジカルチャージは、量子渦を囲む実空間上のループに対して、対応するオーダーパラメーターマニフォールドのループを何週したかで与えられることになる。つまり量子渦のトポロジカルチャージは整数 n で特徴付けられる。また、実空間上のループ内に量子渦が2本あり、それぞれのトポロジカルチャージを n_1, n_2 とすると、このループに対応してオーダーパラメーターマニフォールドでは $n_1 + n_2$ 週することになる。これはそれぞれ n_1 と n_2 のトポロジカルチャージを持つ量子渦2本と $n_1 + n_2$ のトポロジカルチャージを持つ量子渦1本とが同じ状態であることを意味し、つまり n_1 と n_2 の渦が合体して $n_1 + n_2$ の渦になることを意味する。このようにして量子渦の合体・分裂を議論することもできる。

結局、量子渦のトポロジカルチャージは、実空間上のループからオーダーパラメーターマニフォールドへの写像によって定義されることになる。これは第1ホモトピー群 π_1 に対応し、上記2つの

例は

$$\pi_1(\mathbb{R}) \simeq 1 \quad (3)$$

$$\pi_1(U(1)) \simeq \mathbb{Z} \quad (4)$$

と表現される。ここで記号 $\simeq$ は同型という意味で用いる。つまり π_1 はオーダーパラメーターマニフォールド上のホモトピー同値でないループの集合である。また $\pi_1(G/H)$ の2つの元を A, B としたとき、その積によって作られる元 $C = AB$ があるが、これはトポロジカルチャージ A と B の渦が合体して C の渦になることを意味している。

G が連結しており ($\pi_0(G) \simeq 1$)、また単連結である ($\pi_1(G) \simeq 1$) であるとする、次のことがいえる。

$$\pi_1(G/H) \simeq \pi_0(H) \quad (5)$$

ここで π_0 は第0ホモトピー群と呼ばれ連続変形できる元をすべてホモトピー同値であるとしたときの集合である。よって、もし H が離散群であれば $\pi_0(H) \simeq H$ である。

2.3 非可換量子渦の定義

上記のオーダーパラメーターマニフォールドと量子渦のトポロジカルチャージの定義より、以下の3種類の非可換量子渦の定義が存在する。

1. G が非可換群のときに存在する量子渦
2. H が非可換群のときに存在する量子渦
3. $\pi_1(G/H)$ が非可換群のときに存在する量子渦

1. が最も広い定義であり、3. の定義は2. の定義に、2. の定義は1. の定義に含まれる。通常、非可換量子渦という場合、2. の定義であることが最も多いが、本記事では非可換量子渦の定義に3. を用いる。これは量子渦のトポロジカルチャージが非可換群を用いて表されることを意味しており、量子渦の幾何学的な非可換性を最も顕著に表した定義であるといえる。

注意しておかなければならないことは、 $\pi_1(G/H)$ が非可換となる場合、量子渦のトポロジカルチャージは実空間上で量子渦を囲むループの始点に依存し、 $\pi_1(G/H)$ の共役類の間で変化しうるということである²。これを簡単に見るために、図3のような渦とその周りを回る経路を考える。ループ $P_1(u) : u \rightarrow v \rightarrow u' \rightarrow u$ は渦 A を囲んでおり、オーダーパラメーターマニフォールド上で1点に収束できないループへの写像になるとし、トポロジカルチャージ $a \in \pi_1(G/H)$ を与えるとする。次に閉じていない経路 $s \rightarrow u$ を考える。この経路は閉じていないので、オーダーパラメーターマニフォールドへの写像はループとはならない。ここで $s \rightarrow u$ の一部分がオーダーパラメーターマニフォールド上のループへの写像になったとし、ループへの写像となる部分 $s \rightarrow t$ と残りの

²これはオーダーパラメーターマニフォールド G/H が 1-simple でないということを意味する。

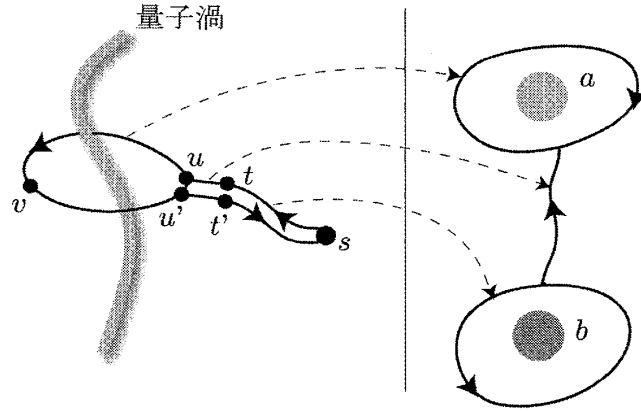


図 3: 非可換量子渦を囲む実空間上の経路 (左) と、対応するオーダーパラメーターマニフォールド上の経路 (右)。渦を囲むループ $P_1(u) : u \rightarrow v \rightarrow u' \rightarrow u$ はトポロジカルチャージ a を与えるオーダーパラメーターマニフォールド上のループに対応し、ある閉じていない経路 $s \rightarrow t$ (あるいは $t' \rightarrow s$ がトポロジカルチャージ b を与えるオーダーパラメーターマニフォールド上のループに対応する。経路 $t \rightarrow u$ および $u' \rightarrow t'$ はオーダーパラメーターマニフォールドにおいて連続変形により 1 点に収束できる経路である。

部分 $t \rightarrow u$ とに経路を分ける。つまり経路 $t \rightarrow u$ は 1 点に収束できるとする。経路 $s \rightarrow t$ がトポロジカルチャージ $b \in \pi_1(G/H)$ を与えるとすれば、経路 $t' \rightarrow s$ はトポロジカルチャージ b^{-1} を与えるので、渦を囲むループ $P_2(s) : s \rightarrow t \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow u' \rightarrow t' \rightarrow s$ はトポロジカルチャージ $b^{-1}ab$ を与える。一方、 $P_2(s)$ と始点だけを変えたループ $P_2(u) : u \rightarrow v \rightarrow u' \rightarrow t' \rightarrow s \rightarrow t \rightarrow u$ はトポロジカルチャージは $bb^{-1}a = a$ を与え、これはループ $P_1(u)$ が与えるものと等しい。 $\pi_1(G/H)$ が可換群であれば $b^{-1}ab = a$ となり、渦のトポロジカルチャージは渦を囲む 2 つの経路で同じであるが、 $\pi_1(G/H)$ が非可換群で、かつ a と b が非可換であれば $b^{-1}ab$ と a は同じ共役類の中の異なる元となり、したがってトポロジカルチャージがループの始点の取り方で異なる。この例からも分かるように、渦を囲む実空間上のループの一部がオーダーパラメーターマニフォールドのあるループへの写像を作った場合に、与えるトポロジカルチャージがループの始点に依存することを意味している。

2.4 量子渦の衝突

次に量子渦の衝突について幾何学的な考察を行う。まず図 4(a) のような衝突する 2 本の量子渦を考える。前節でみたとおり、量子渦のトポロジカルチャージは渦を囲むループによって与えられるが、ここでは 4 本のループ a, b, c, d を考え、ループ a, b がそれぞれトポロジカルチャージ A, B を与えるとする。図 4(a) のようにそれぞれのループの始点を固定したとき、ループ a と c はお互いに連続変形を通して幾何学的に同一視できる。その結果ループ c もトポロジカルチャージ A を与えることになる。一方、ループ b と d は連続変形を通して幾何学的に同一視できない。ループ d は図 4(a)-(d) のような連続変形を通して最終的に図 4(d) の経路に変形することができる。よってループ d は B の共役類である ABA^{-1} のトポロジカルチャージを与えることになる。 $\pi_1(G/H)$

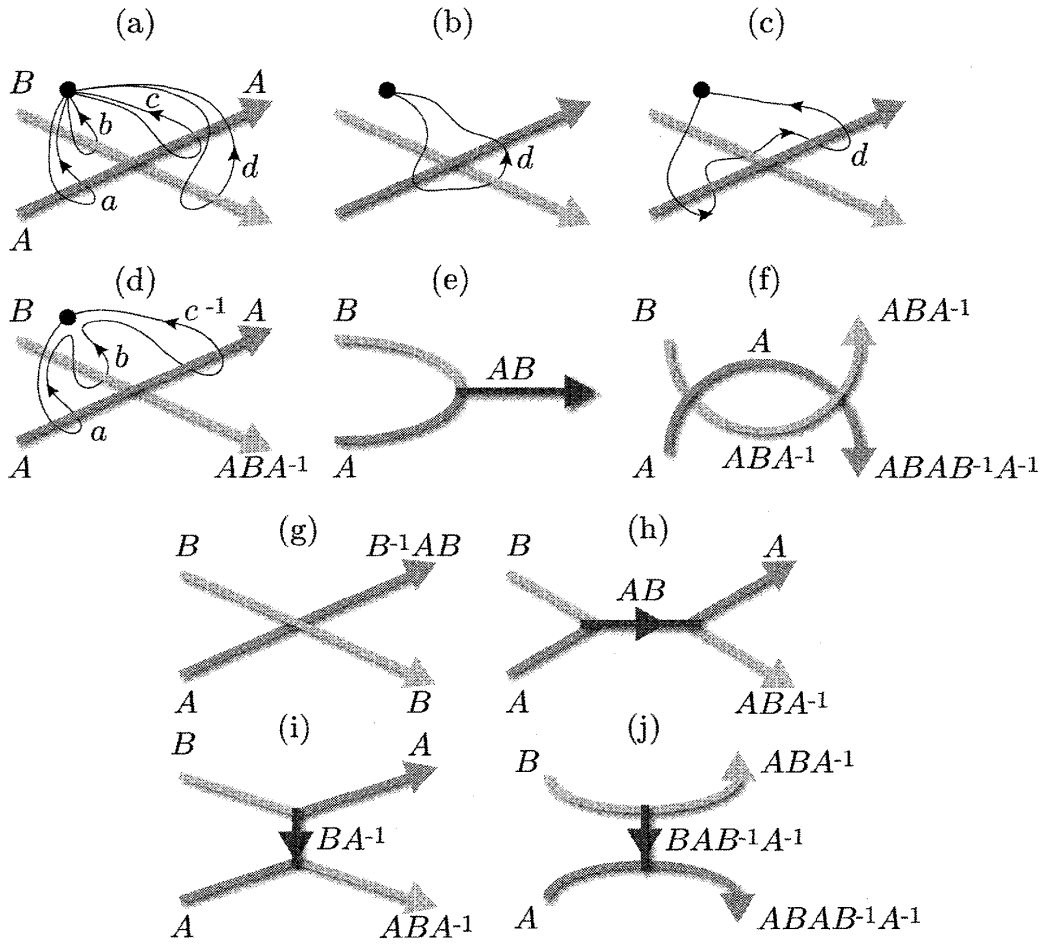


図 4: (a) : 2 本の衝突する渦と渦を囲む 4 つの経路。ここで A, B は経路 a, b に対応するトポロジカルチャージ。(a)-(d) : (a) における経路 d の連続変形。(d) : 経路 a, b, c, d によって与えられる量子渦のトポロジカルチャージ。(e) : 三叉路型の量子渦の接合。(f) : 絡み目を作った 2 本の量子渦。(g)-(i) : (d) からの衝突後に起こりうるパターン。(g) : 通り抜け。(h) : ラング渦形成 (トポロジカルチャージ AB)。 (i) ラング渦形成 (トポロジカルチャージ BA^{-1})。 (j) : 絡み目を作った量子渦からの衝突後にできるトポロジカルチャージ $BAB^{-1}A^{-1}$ のラング渦

が非可換群となる非可換量子渦で、かつ A と B が非可換なときには、経路 b と d は同じ量子渦を囲んでいるにもかかわらず、異なるトポロジカルチャージを与えることとなる。ここから分かるように、ループの始点を固定したときに 1 本の量子渦のトポロジカルチャージは場所によって共役類の中で変化することになる。同様に、三叉路型の量子渦の接合部分や絡み目を作った量子渦に対して、それぞれ図 4(e)、図 4(f) のようにトポロジカルチャージを与えることができる。

図 4(d) にあるような 2 本の量子渦が衝突した場合、図 4(g)-(i) に示されるような 3 つの可能性が考えられる。図 4(g) は通り抜けを、図 4(h) はトポロジカルチャージ AB のラング渦形成、図 4(i) はトポロジカルチャージ BA^{-1} のラング渦形成を示している。ここで考えられるいくつかの量子渦について、起こりうる可能性を議論する。

2.4.1 2本の量子渦が同じトポロジカルチャージ $A = B$ を持つ場合

この場合、2本の渦のトポロジカルチャージは当然可換である。トポロジカルには図 4(g)-(i) のどのダイナミクスも可能であるが、図 4(i) の場合に形成されるラング渦は $BA^{-1} = AA^{-1} = 1$ となり、これはラング渦が消滅することを意味する。結局衝突前と衝突後で渦のつなぎ換えが起こっていることを意味する。つなぎ換え以外の可能性として、まず図 4(h) のような $AB = A^2$ のラング渦を形成することを考えると、例えば $U(1)$ 量子渦の場合には巻き数が倍のラング渦ができることを意味し、通常はエネルギー的に損である。また図 4(g) のような通り抜けも、2本の量子渦が重なった瞬間に巻き数が倍の渦ができるので、起こりにくいと考えられる。したがって、この場合にはつなぎ換えが最も起こりやすいと考えられる。ただし非常に特別な場合に図 4(h) のような A^2 のラング渦が形成されることが理論的に予言されている [14, 15]。第1種超伝導体の磁束量子は引力相互作用となり、渦ができるだけ合体して大きな巻き数を持った量子渦ができる。この場合、衝突角度や衝突速度などのパラメーターに依存して、つなぎ換えかラング渦形成のどちらかが起こる。

2.4.2 2本の量子渦がお互いに可換でかつ異なるトポロジカルチャージ $A \neq B$, $AB = BA$ を持つ場合

この場合図 4(h)-(i) はどちらもラング渦形成となる。図 4(g) の通り抜けとラング渦形成を比較した場合、ラング渦の形成は通常、全渦糸長を伸ばすことになり、エネルギー的に損である。したがって、この場合には図 4(g) の通り抜けが最もよく起こる。ただし、先ほどの場合のように A と B のトポロジカルチャージを持った量子渦が引力相互作用をする場合に、やはり衝突のパラメーターに依存してラング渦が形成されうる。2成分のオーダーパラメーター、つまり $U(1) \times U(1)$ のオーダーパラメーターマニフォールドに対する量子渦において、ラング渦の形成が議論されている [16]。

2.4.3 2本の量子渦がお互いに非可換なトポロジカルチャージ $AB \neq BA$ を持つ場合

この場合、図 4(g) の通り抜けは禁止される。なぜなら通り抜け前の図 4(d) と通り抜け後の図 4(g) とは、量子渦が異なるトポロジカルチャージを持つことになり、お互いに異なる状態だからである。したがって可能性としてラング渦形成のみが許される。つまり可換なトポロジカルチャージを持つ量子渦の衝突とは異なって、ラング渦が安定に形成されることになる。

2.4.4 絡み目を作った量子渦の衝突

図 4(f) のようなお互いに絡み目を作った量子渦の衝突を考える。絡み目を作った量子渦の衝突は、トポロジカルチャージの可換・非可換の違いをより顕著に示す。図 4(j) は絡み目を作った量子渦からの衝突を表し、トポロジカルチャージ $BAB^{-1}A^{-1}$ のラング渦が形成される。 A と B が可換な場合には、 $BAB^{-1}A^{-1} = 1$ より、ラング渦は常に消滅し、非可換な場合にのみラング渦が

存在することとなる。その結果、可換なトポロジカルチャージを持っている量子渦の絡み目は必ずほどけるのに対し、非可換なトポロジカルチャージを持っている量子渦の絡み目必ずほどけない³。

2.5 非可換なトポロジカルチャージが議論されている物理系

次章でスピノール BEC における非可換量子渦とラング渦形成のダイナミクスを議論するが、ここでは他の物理系における、非可換なトポロジカルチャージを持つ位相欠陥について紹介する。

最初の例は宇宙論におけるコスミックストリングである。宇宙論におけるコスミックストリングの衝突ダイナミクスは、宇宙のコスミックストリングの数密度を決定する上で非常に重要である。いくつかの理論モデルにおいて、可換なコスミックストリングの衝突はつなぎ換えを引き起こし [20–26]、コスミックストリングの数密度を減らすことが示されている [20, 21]。これは現在の宇宙背景放射の観測結果と矛盾しない [27–30]。しかし非可換なトポロジカルチャージを持つコスミックストリングの場合⁴、つなぎ換えが一般的には起こらず、ラング状のコスミックストリングを介した大規模なネットワーク構造ができる。具体的に第 1 ホモトピー群が 3 次の置換群 $\pi_1(G/H) \simeq S_3$ となるようなコスミックストリングの数値シミュレーションが行われており、そのようなネットワーク構造が確認されている [31, 32]。また、このようなラング状のコスミックストリングが、ダークマターの候補であるかもしれないということが提唱されている [33]。

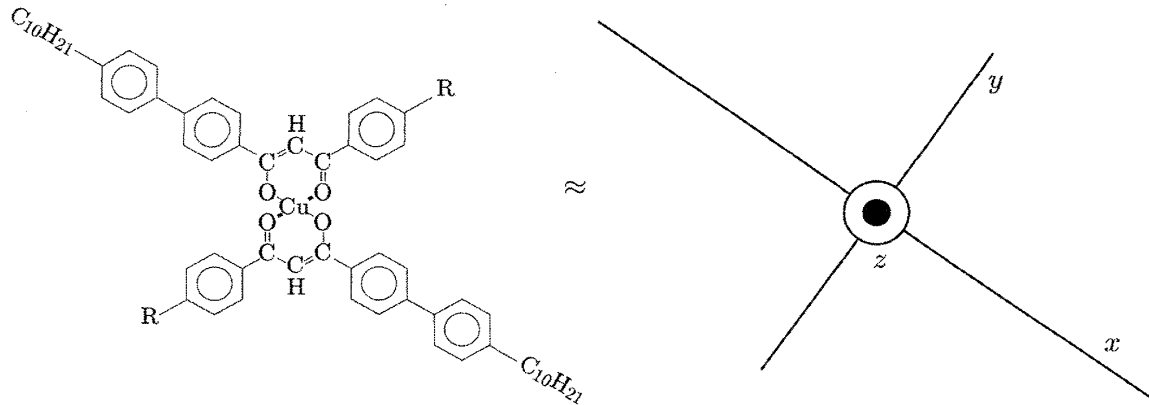


図 5: 2 軸性液晶分子の例 (左) とその長方形回転対称性 (右)。R は例えば OC_2H_5 など。

もう 1 つの例が 2 軸性液晶の 2 軸性相におけるディスクリネーションである [34, 35]。2 軸性相は図 5 のような 2 軸性液晶中において現れ、2 軸性を反映してオーダーパラメーターマニフォールドが $SO(3)/D_2$ となる [17, 18, 36, 37]。 $SO(3)$ は 3 次元の特殊直交群で、オイラー回転によって表現され、これは 2 軸性液晶分子を反映した 2 本の対称軸のオイラー回転を意味する。 $D_2 \simeq C_2 \times C_2$ は長方形回転群で、2 軸性液晶の長方形回転対称性を反映する。 $SO(3)$ は単連結ではなく、

$$\pi_1(SO(3)) \simeq \pi_1(SU(2)/\mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \quad (6)$$

³実際には非可換であっても同じ共役類に属している場合はほどける可能性があるが、本記事では議論しない。

⁴非可換コスミックストリングという言葉は、通常 2.3 節における非可換量子渦の定義 2. の意味で使われている。

である。ここで $SU(2)$ は 2 次の特異ユニタリー群であり、上式より $SO(3)$ とは 1 対 2 の関係にある。また $SU(2)$ は単連結である。したがって $\pi_1(SO(3)/D_2)$ を計算するために $SO(3)$ から $SU(2)$ への写像を考え、 $SO(3)$ の部分群である D_2 の写像先を考える。それを Q_8 と書くと

$$\pi_1(SO(3)/D_2) \simeq \pi_1(SU(2)/Q_8) \simeq Q_8 \quad (7)$$

となり、ディスクリネーションのトポロジカルチャージは群 Q_8 の元となる。 D_2 の元は 4 つあり、それを E, I_x, I_y, I_z と書く。また Q_8 の元は 8 つあり、 D_2 の元 E, I_x, I_y, I_z からの写像先を $\pm \mathcal{E}, \pm I_x, \pm I_y, \pm I_z$ と書く。この元の行列表現は

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_x = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad I_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_z = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad (8)$$

である。 Q_8 はクォータニオン群と呼ばれ、非可換群であるため、2 軸性相のディスクリネーションは非可換となることが期待される。多数のディスクリネーションの減衰メカニズムは、通常の可換なディスクリネーションと非可換なディスクリネーションで定性的に異なり、特に非可換なディスクリネーションだと減衰が非常に遅くなることが数値シミュレーションによって報告されている [38, 39]。

3 スピン 2・スピノール BEC における非可換量子渦

スピン自由度を持つスピノール BEC は、その内部自由度を反映した多彩なオーダーパラメーターマニフォールドを提供するほか、そのオーダーパラメーターマニフォールドを反映して、本記事で議論している量子渦のほかに、高次のホモトピーや相対ホモトピーで議論されるモノポールやスカーミオン（ジャンカーモノポール）、テクスチャなど、様々な位相欠陥が期待され注目を浴びている [40–42]。

本章ではスピン 2・スピノール BEC における cyclic 相において、前章で議論してきた非可換量子渦が実現されることを示す。そのためにまずスピン 2・スピノール BEC の理論 [43–51] について説明し、その基底状態の 1 つである cyclic 相を議論する。

3.1 スピン 2・スピノール BEC

3.1.1 ハミルトニアン

スピン 2 のボース系は 5 成分のボース場 $\hat{\Psi} = (\hat{\Psi}_2, \hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_0, \hat{\Psi}_{-1}, \hat{\Psi}_{-2})^T$ を用いて記述される。一般的なハミルトニアンは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \int d\mathbf{x} \hat{\Psi}_m^\dagger(\mathbf{x}) \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V^{\text{ext}}(\mathbf{x}) \right] \hat{\Psi}_m(\mathbf{x}) \\ & + \frac{1}{2} \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \hat{\Psi}_{m_1}^\dagger(\mathbf{x}_1) \hat{\Psi}_{m_2}^\dagger(\mathbf{x}_2) V_{m_1, m_2, m'_1, m'_2}^{\text{int}}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \hat{\Psi}_{m'_2}(\mathbf{x}_2) \hat{\Psi}_{m'_1}(\mathbf{x}_1) \end{aligned} \quad (9)$$

ここで M は原子の質量、 V^{ext} は外場、 V^{int} は粒子間相互作用を表し、 m, m_1, m_2, m'_1, m'_2 について $0, \pm 1, \pm 2$ の縮約をとる。後に議論するが、本記事では対象とする実際の物理系として希薄冷却原子気体によるスピノール BEC を考えることにする。原子間の双極子-双極子相互作用を無視すれば、原子間の相互作用の主な寄与は 2 体の s 波散乱のみとなる。この場合相互作用は

$$V_{m_1, m_2, m'_1, m'_2}^{\text{int}}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \frac{4\pi\hbar^2}{M} \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \sum_{S=0,2,4} \sum_{M=-S}^S a_S O_{m_1, m_2}^{S, M} \left(O_{m'_1, m'_2}^{S, M} \right)^* \quad (10)$$

となる。ここで a_S は 2 体相互作用する原子の全スピン S に対する s 波散乱長、 $O_{m_1, m_2}^{S, M}$ はクレブシューゴールドン係数である。式 (10) を式 (9) に代入すると

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \int d\mathbf{x} \hat{\Psi}_m^\dagger(\mathbf{x}) \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V^{\text{ext}}(\mathbf{x}) \right] \hat{\Psi}_m(\mathbf{x}) \\ & + \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \hat{N} \left[c_0 \hat{n}^2(\mathbf{x}) + c_1 \hat{\mathbf{F}}^2(\mathbf{x}) + c_2 \hat{A}_{20}^\dagger(\mathbf{x}) \hat{A}_{20}(\mathbf{x}) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

を得る。ここで

$$\hat{n}(\mathbf{x}) = \sum_{m=-2}^2 \hat{\Psi}_m^\dagger(\mathbf{x}) \hat{\Psi}_m(\mathbf{x}) \quad (12)$$

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \sum_{m, n=-2}^2 \mathbf{f}_{mn} \hat{\Psi}_m^\dagger(\mathbf{x}) \hat{\Psi}_n(\mathbf{x}) \quad (13)$$

$$\hat{A}_{20}(\mathbf{x}) = \left[2\hat{\Psi}_2(\mathbf{x})\hat{\Psi}_{-2}(\mathbf{x}) - 2\hat{\Psi}_1(\mathbf{x})\hat{\Psi}_{-1}(\mathbf{x}) + \hat{\Psi}_0^2(\mathbf{x}) \right] \quad (14)$$

はそれぞれ密度演算子、スピン密度演算子、シングレット・ペア演算子であり、 $\hat{N}[\dots]$ は正規順序積である。 $\mathbf{f}_{mn} = (f_{mn}^x, f_{mn}^y, f_{mn}^z)$ は 5×5 のスピン行列であり、

$$\begin{aligned} f^+ = & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f^z = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \\ f^x = & \frac{f^+ + (f^+)^T}{2}, \quad f^y = \frac{f^+ - (f^+)^T}{2i} \end{aligned} \quad (15)$$

を満たす。また係数 c_0, c_1, c_2 は

$$c_0 = \frac{4\pi\hbar^2}{M} \frac{4a_2 + 3a_4}{7}, \quad c_1 = \frac{4\pi\hbar^2}{M} \frac{a_4 - a_2}{7}, \quad c_2 = \frac{4\pi\hbar^2}{M} \frac{7a_0 - 10a_2 + 3a_4}{35} \quad (16)$$

で与えられる。

ここでスピン 2・スピノール BEC に対する平均場近似を行う。すべての原子が最低エネルギー状態にあるとすると、平均場ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H_{\text{mean}} = & \int d\mathbf{x} \left[\frac{\hbar^2}{2M} |\nabla \Psi_m(\mathbf{x})|^2 + V^{\text{ext}}(\mathbf{x}) n(\mathbf{x}) \right] \\ & + \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \left[c_0 n^2(\mathbf{x}) + c_1 \mathbf{F}^2(\mathbf{x}) + c_2 |A_{20}(\mathbf{x})|^2 \right] \end{aligned} \quad (17)$$

の形で得られる [47]。ここで

$$n(\mathbf{x}) = \sum_{m=-2}^2 |\Psi_m(\mathbf{x})|^2 \quad (18)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{m,n=-2}^2 \mathbf{f}_{mn} \Psi_m^*(\mathbf{x}) \Psi_n(\mathbf{x}) \quad (19)$$

$$A_{20}(\mathbf{x}) = \sum_{m=-2}^2 (-1)^m \Psi_m(\mathbf{x}) \Psi_{-m}(\mathbf{x}) \quad (20)$$

はそれぞれ密度、スピン密度、シングレットペア振幅密度である。実際の希薄冷却原子気体スピノール BEC では、 $V^{\text{ext}}(\mathbf{x})$ として光トラップと外部磁場による 1 次及び 2 次ゼーマン効果を考えなければならないが、ここでは簡単のためにそれらを見捨てる、さらに系が一様であることを仮定する。すると最終的にハミルトニアン密度

$$\frac{H_{\text{uniform}}}{V} = \frac{1}{2} (c_0 n^2 + c_1 \mathbf{F}^2 + c_2 |A_{20}|^2) \quad (21)$$

を得る。ここで V は系の体積である。外部磁場の影響等に関しては、後で実験について議論するときに考察する。

3.1.2 オーダーパラメーターマニフォールドと基底状態

ハミルトニアン (21) を不変に保つ変換群 G を考える。まず初めに、BEC が安定である必要条件として斥力相互作用： $c_0 > 0$ を要請する。もし引力相互作用： $c_0 < 0$ だと、密度揺らぎが増大することによって系は崩壊する。まず、最も簡単な場合として $c_1 = c_2 = 0$ の場合を考える。その場合 5 成分スピノールの大きさを不変に保つ変換すべてということになり、 G はユニタリー群

$$U(5)_{g+s} \simeq \frac{U(1)_g \times SU(5)_s}{(\mathbb{Z}_5)_{g+s}} \quad (22)$$

となる。添え字の g と s は $U(1)$ ゲージとスピン回転の部分、という意味を表している。次に $c_1 \neq 0$ かつ $c_2 = 0$ の場合、スピノールの大きさを不変に保つ以外にスピン密度の大きさ $\mathbf{F}^2$ を不変に保たなければならない。これはスピン密度ベクトル $\mathbf{F}$ のオイラー回転であり、 G が $U(5)$ の部分群である $SO(3)$ を含んでいることを意味している。またこのオイラー回転とは別に、スピノール全体への $U(1)$ ゲージ変換の元で H_{uniform} は不変であり、最終的に $G \simeq U(1)_g \times SO(3)_s$ となる。 $c_1 = 0$ かつ $c_2 \neq 0$ の場合、 $|A_{20}|^2$ を不変に保たなければならない。詳しい解析は省略するが、これはある 5 次元空間中のベクトルの大きさを不変に保つ変換と関連付けられ、 G が $U(5)$ の部分群である $SO(5)$ を含んでいるということが分かる [52]。また先ほどと同様にスピノール全体への $U(1)$ ゲージ変換の元でやはり H_{uniform} は不変であり、最終的に $G \simeq U(1)_g \times SO(5)_s$ となる。また、この $SO(5)$ に属する回転には部分群として $\mathbf{F}^2$ を不変に保つ $SO(3)$ の回転を含んでおり、 $c_1 \neq 0$ かつ $c_2 \neq 0$ のときは $G \simeq U(1)_g \times SO(3)_s$ となる。 $G \simeq U(1)_g \times SO(3)_s$ は平均場 $\Psi_m(\mathbf{x})$ の存在による $U(1)$ ゲージ対称性の破れと、スピン量子化軸の向きに関する $SO(3)$ 対称性の破れを表している。

以後、オーダーパラメーターの対称性を分かりやすく見るために、まず密度で規格化されたスピノール $\zeta = (\zeta_2, \zeta_1, \zeta_0, \zeta_{-1}, \zeta_{-2})^T$

$$\Psi_m = \sqrt{n} \zeta_m, \quad (23)$$

$$\sum_{m=-2}^2 |\zeta_m|^2 = 1, \quad (24)$$

を定義し、さらに次のようなネマティックテンソルを導入する [43, 49]。まず規格化されたスピノール ζ をランク 2 の球面調和関数 $Y_{2,m}(\hat{n})$ で展開すると ($\hat{n}$ は単位ベクトル)、

$$\zeta^\Sigma(\hat{n}) \equiv \sum_m \zeta_m Y_{2,m}(\hat{n}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \hat{n}^T Q(\zeta) \hat{n} \quad (25)$$

が得られる。ここで

$$Q(\zeta) = \begin{pmatrix} \zeta_2 + \zeta_{-2} - \sqrt{2/3} \zeta_0 & i(\zeta_2 - \zeta_{-2}) & -\zeta_1 + \zeta_{-1} \\ i(\zeta_2 - \zeta_{-2}) & -\zeta_2 - \zeta_{-2} - \sqrt{2/3} \zeta_0 & -i(\zeta_1 + \zeta_{-1}) \\ -\zeta_1 + \zeta_{-1} & -i(\zeta_1 + \zeta_{-1}) & 2\sqrt{2/3} \zeta_0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

はトレースレス対称テンソルである。スピノール ζ のスピン空間における回転は $Q(\zeta)$ の回転と 1 対 1 で対応づけられる。

$$Q(e^{-i\alpha f^{(x,y,z)}} \zeta) = R_{\{x,y,z\}}(\alpha) Q(\zeta) R_{\{x,y,z\}}^T(\alpha) \quad (27)$$

ここで $R_{\{x,y,z\}}$ は x, y, z 軸周りの 3 次元回転行列である。したがって、スピノールの任意の回転はテンソル $Q(\zeta)$ の回転によって記述できる。これと $U(1)$ ゲージ変換を合わせて、任意の状態 $Q(\zeta)$ が回転軸 $\mathbf{e}$ 、回転角度 θ としたときの回転行列 $R(\mathbf{e}, \theta)$ と $U(1)$ ゲージ ϕ を用いて

$$\hat{T}[\phi, R(\mathbf{e}, \theta)] Q(\zeta) \equiv e^{i\phi} R(\mathbf{e}, \theta) Q(\zeta) R^T(\mathbf{e}, \theta) \quad (28)$$

と変換されたときに H_{uniform} は不変である。

次に、基底状態を計算する [43, 44, 47]。基底状態は H_{uniform} を最小化する ζ を見つけることによって得られる。得られる相と、具体的な ζ の形は以下ようになる。

1. ferromagnetic-1 相 : $c_1 < 0$ かつ $c_2 > 4c_1$

$$\zeta_{\text{fl}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q(\zeta_{\text{fl}}) = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

$Q(\zeta_{\text{fl}})$ を不変にする非自明な変換に $\hat{T}[2\phi, R(\hat{z}, \phi)]$ がある。これは、 z 軸周りのスピン回転と $U(1)$ ゲージ変換が等価であり、式 (1) の H が $H_{\text{fl}} \simeq U(1)_{g+s}$ であることを意味する。よってオーダーパラメーターマニフォールドは

$$\left(\frac{G}{H} \right)_{\text{fl}} \simeq \frac{U(1)_g \times SO(3)_s}{U(1)_{g+s}} \simeq SO(3)_{g+s} \quad (30)$$

となる。

2. uniaxial nematic 相 : $c_2 < 0$ かつ $c_1 > 0$

$$\zeta_{\text{un}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q(\zeta_{\text{un}}) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (31)$$

$Q(\zeta_{\text{un}})$ を不変にする非自明な変換に連続的な $\hat{T}[0, R(\hat{z}, \phi)]$ と離散的な $\hat{T}[0, R(a\hat{x} + b\hat{y}, \pi)]$ がある。これは、 z 軸周りの任意のスピン回転および xy 平面内にある軸周りの π のスピン回転において状態が不変であることを意味する。この2つの変換は、円柱回転群 D_∞ を形成し、 $H_{\text{un}} \simeq (D_\infty)_s$ となる。オーダーパラメーターマニフォールドは

$$\left(\frac{G}{H} \right)_{\text{un}} = \frac{U(1)_g \times SO(3)_s}{(D_\infty)_s} \simeq \frac{U(1)_g \times S^2_s}{(\mathbb{Z}_2)_s} \quad (32)$$

となる。

3. biaxial nematic 相 : $c_2 < 4c_1$ かつ $c_1 < 0$

$$\zeta_{\text{bn}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q(\zeta_{\text{bn}}) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

$Q(\zeta_{\text{bn}})$ を不変にする非自明な変換は全て離散的で、 $\hat{T}[0, R(\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}, \pi)]$, $\hat{T}[\pi, R(\hat{z}, \{\pi/2, 3\pi/2\})]$, $\hat{T}[\pi, R(\{\hat{x} \pm \hat{y}\}/\sqrt{2}, \pi)]$ の7個である。これらの変換は恒等変換と合わせて正方形回転群 D_4 を形成し、 $H_{\text{bn}} \simeq (D_4)_{g+s}$ であることを意味する。オーダーパラメーターマニフォールドは

$$\left(\frac{G}{H} \right)_{\text{bn}} \simeq \frac{U(1)_g \times SO(3)_s}{(D_4)_{g+s}} \quad (34)$$

となる。

4. cyclic 相 : $c_1 > 0$ かつ $c_2 > 0$

$$\zeta_{\text{c}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \quad Q(\zeta_{\text{c}}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} e^{2\pi i/3} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i/3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (35)$$

$Q(\zeta_{\text{c}})$ を不変にする非自明な変換は全て離散的で、 $\hat{T}[0, R(\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}, \pi)]$, $\hat{T}[2\pi/3, R(\{e_1, e_2, e_3, e_4\}, 2\pi/3) = \{C, R(\{\hat{z}, \hat{x}, \hat{y}\})C]$, $\hat{T}[-2\pi/3, R(\{e_1, e_2, e_3, e_4\}, -2\pi/3) = \{C^2, R(\{\hat{y}, \hat{z},$

$\hat{x}\})C^2]$ の 11 個である。ここで $e_1 = (\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})/\sqrt{3}$, $e_2 = (\hat{x} - \hat{y} - \hat{z})/\sqrt{3}$, $e_3 = (-\hat{x} + \hat{y} - \hat{z})/\sqrt{3}$, $e_4 = (-\hat{x} - \hat{y} + \hat{z})/\sqrt{3}$ および

$$R(e_1, 2\pi/3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv C \quad (36)$$

である。これらの変換は恒等変換と合わせて正 4 面体回転群 T を形成し、 $H_c \simeq (T)_{g+s}$ であることを意味する [19, 46, 50]。オーダーパラメーターマニフォールドは

$$\left(\frac{G}{H}\right)_c \simeq \frac{U(1)_g \times SO(3)_s}{T_{g+s}} \quad (37)$$

となる。

基底状態には現れないが、もう 1 つ特徴的な相がある。

5. ferromagnetic-2 相

$$\zeta_{f2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q(\zeta_{f2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i \\ -1 & -i & 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

$Q(\zeta_{f2})$ を不変にする非自明な変換に $\hat{T}[\phi, R(\hat{z}, \phi)]$ があり、ferromagnetic-1 相と同様に $H_{f2} \simeq U(1)_{g+s}$ である。よってオーダーパラメーターマニフォールドは

$$\left(\frac{G}{H}\right)_{f1} \simeq \frac{U(1)_g \times SO(3)_s}{U(1)_{g+s}} \simeq SO(3)_{g+s} \quad (39)$$

となり、これは ferromagnetic-1 相と同じである。ferromagnetic-2 のオーダーは、例えば渦芯などに現れる [19, 53, 54]。

	相互作用係数の範囲	H	F^2/n^2	$ A_{20} ^2/n^2$	$ A_{30} ^2/n^3$
ferromagnetic-1	$c_1 < 0, c_2 > 4c_1$	$U(1)_{g+s}$	4	0	0
ferromagnetic-2	基底状態には現れない	$U(1)_{g+s}$	1	0	0
uniaxial nematic	$c_1 > 0, c_2 < 0$	$(D_\infty)_s$	0	1	1
biaxial nematic	$c_1 < 0, c_2 < 4c_1$	$(D_4)_{g+s}$	0	1	0
cyclic	$c_1 > 0, c_2 > 0$	T_{g+s}	0	0	2

表 1: スピン 2・スピノール BEC におけるそれぞれの相の特徴

それぞれの相を特徴づけるパラメーターはスピン密度 F^2 、シングレットペア振幅密度 $|A_{20}|^2$ 、シングレットトリオ振幅密度 $|A_{30}|^2$ である。シングレットトリオ振幅密度は

$$A_{30} = \frac{3\sqrt{6}}{2}(\Psi_1^2\Psi_{-2} + \Psi_{-1}^2\Psi_2) + \Psi_0(\Psi_0^2 - 3\Psi_1\Psi_{-1} - 6\Psi_2\Psi_{-2}) \quad (40)$$

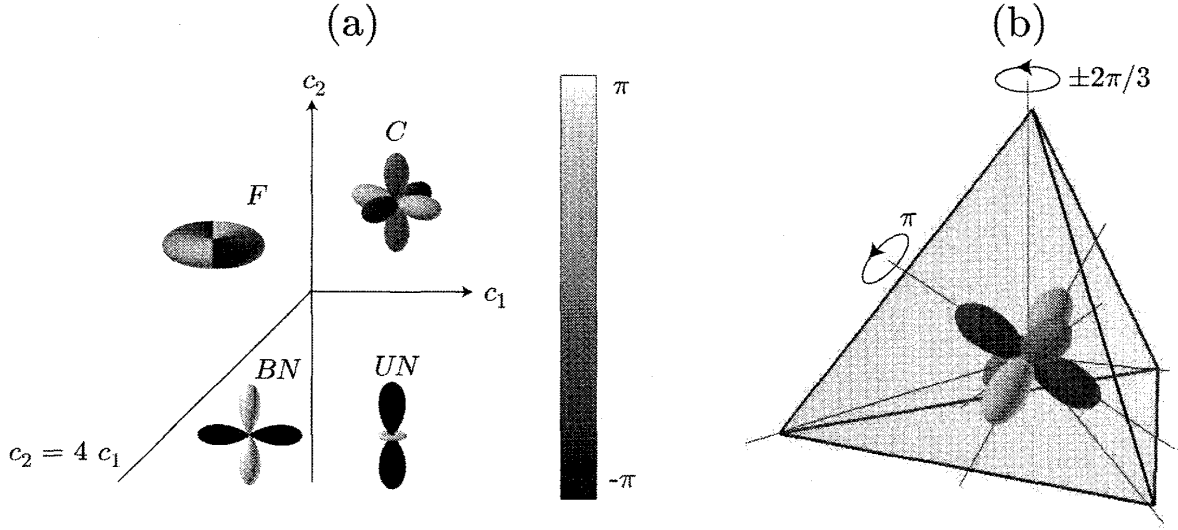


図 6: (a) : スピン 2・スピノール BEC の相図と $\zeta^\Sigma(\hat{n})$ の形 (形状は $|\zeta^\Sigma(\hat{n})|^2$ を表し、表面の色は $\zeta^\Sigma(\hat{n})$ の位相を表している)。また図中の F は ferromagnetic-1 相、 UN は uniaxial nematic 相、 BN は biaxial nematic 相、 C は cyclic 相を表す。(b) : 軸性トライアドと正四面体回転対称性との関係。

で定義される量である。表 1 にそれぞれの相に対するこれらの値をまとめてある [55]。

それぞれの相の対称性は式 (25) の $\zeta^\Sigma(\hat{n})$ の形からも推察することができる。図 6(a) は上で議論した相図と、対応する相における $\zeta^\Sigma(\hat{n})$ の形を示している。ferromagnetic-1 相では $\zeta^\Sigma(\hat{n})$ は円盤状で、かつ位相が円盤内で 4π 変化している。よって円盤に垂直な軸周りの回転と円盤への $U(1)$ ゲージ変換が等価であり、 $H_{fl} \simeq U(1)_{g+s}$ であることと対応している。uniaxial nematic 相と biaxial nematic 相の $\zeta^\Sigma(\hat{n})$ の形から、それぞれ円柱回転対称性 $H_{un} \simeq D_\infty$ 、正方形回転対称性 $H_{bn} \simeq D_4$ を持っているのは容易に想像できる。cyclic 相の $\zeta^\Sigma(\hat{n})$ は軸性トライアドの形をしているが、これが正四面体回転対称性を持っているのは図 6(b) から分かり、図中のトライアドを不変に保つ変換がトライアドを囲む正四面体を不変に保つ回転に 1 対 1 に対応している。

4 つの基底状態の中で $\pi_1(G/H)$ が非可換群となるのは biaxial nematic 相と cyclic 相である。しかし、平均場近似の範囲内において biaxial nematic 相は uniaxial nematic 相と縮退しており、この 2 つの相をつなぐ新しい自由度が存在する。Bogoliubov 近似の元で 2 つの相のゼロ点エネルギーを計算し比較すると、2 つの相の縮退がゼロ点エネルギーによって解け、 $c_1 = 0$ を境として 2 つの相のどちらかが安定となる [55, 56]。このように平均場近似の範囲内では biaxial nematic 相は扱いづらく、非可換量子渦を理論的に考察するための最も適当な相は cyclic 相である。

3.2 cyclic 相における非可換量子渦

式 (37) で与えられる cyclic 相のオーダーパラメーターマニフォールドから量子渦のトポロジカルチャージを計算する [19, 46, 50]。まず、 $SO(3)$ は単連結ではないので式 (7) のように $SO(3)$ か

ら $SU(2)$ への写像を考える。

$$\frac{U(1)_g \times SO(3)_s}{T_{g+s}} \simeq \frac{U(1)_g \times SU(2)_s}{T_{g+s}^*} \quad (41)$$

ここで T^* とは $SO(3)$ の部分群である正四面体回転群 T を $SU(2)$ の部分群へ写像したときにできる群であり、24 個の元がある。 ζ への作用を考える際にはネマティックテンソル $Q(\zeta)$ から新しい 4 階テンソル $\mathcal{Q}(\zeta) = Q(\zeta)\sigma \otimes \sigma$ を定義し、 $\mathcal{Q}$ への回転変換を $SU(2)$ における回転行列 $U(e, \theta)$ を用いて

$$e^{i\phi} U(e, \theta) \otimes U(e, \theta) \mathcal{Q}(\zeta) [U(e, \theta) \otimes U(e, \theta)]^\dagger \equiv \hat{T}[\phi, U(e, \theta)] \mathcal{Q}(\zeta) \quad (42)$$

とすればよい。

トポロジカルチャージは $\pi_1(U(1)_g \times SU(2)_s/T_{g+s}^*)$ を計算すればよく、 $\pi_1(U(1)) \simeq \mathbb{Z}$ と T_{g+s}^* の両方が寄与し、式 (42) の $\hat{T}$ を用いて記述できる。以下ではその中で 1 本だけで安定に存在できるものだけを取り上げる。渦を $\pi_1(U(1)_g \times SU(2)_s/T_{g+s}^*)$ の共役類で分類し（渦のトポロジカルチャージは渦を囲むループの始点に依存し、共役類の間で変化しうすることに注意）、実空間の z 方向に沿って量子渦が 1 本あったときの典型的な Ψ の円柱座標 (r, φ, z) による形、および循環を議論すると以下ようになる（以下に現れる関数 $f_{1,2,3}(r)$ は $f_{1,2,3}(r \rightarrow 0) = 0$, $f_{1,2,3}(r \rightarrow \infty) = 1$ を満たす）。

1. 0-1/2 量子渦

トポロジカルチャージは式 (8) の $\mathcal{I}_{x,y,z}$ を用いて $\hat{T}[0, \mathcal{I}_{x,y,z}]$ の 3 種類である。 Ψ の形は

$$\Psi(r, \varphi, z) = \hat{S} \frac{\sqrt{n}}{2} \begin{pmatrix} i f_1(r) e^{-i\varphi} \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ i f_1(r) e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad (43)$$

である。ここで $\hat{S}$ は一様な任意の $U(1)$ ゲージ変換および $SO(3)$ スピン回転である。質量流、スピン流に関する循環はそれぞれ

$$\kappa_m = \kappa \oint d\mathbf{x} \cdot \frac{\sum_m \text{Im}[(\nabla \Psi_m) \Psi_m^*]}{n} \quad (44)$$

$$\kappa_s^\mu = \kappa \oint d\mathbf{x} \cdot \frac{\sum_{m,n} \text{Im}[(\nabla \Psi_m) f_{mn}^\mu \Psi_{m'}^*]}{n} \quad (45)$$

で定義され、 $\kappa_m = 0$, $\kappa_s \equiv \sqrt{\kappa_s^{x2} + \kappa_s^{y2} + \kappa_s^{z2}} = \kappa/2$ に量子化される⁵。ここで $\kappa = h/M$ である。

⁵ スピン流は式 (43) のように量子渦を囲むループに沿ったスピン回転に対して、回転軸が変化しない場合にのみ量子化される。

2. 0-(-1/2) 量子渦

トポロジカルチャージは $\hat{T}[0, -\mathcal{I}_{x,y,z}]$ の3種類である。 Ψ の形は

$$\Psi(r, \varphi, z) = \hat{S} \frac{\sqrt{n}}{2} \begin{pmatrix} if_1(r)e^{i\varphi} \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ if_1(r)e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \quad (46)$$

である。循環は $\kappa_m = 0$, $\kappa_s = \kappa/2$ に量子化される。

3. 1/3-1/3 量子渦

トポロジカルチャージは $\hat{T}[2\pi/3, \{\mathcal{E}, -\mathcal{I}_{x,y,z}\}\mathcal{C}]$ の4種類である。ここで $\mathcal{C}$ は

$$\mathcal{C} \equiv U(\mathbf{e}_1, \pi/3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i & -1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix} \quad (47)$$

である。また cyclic 相のスピノール ζ_c を別の形

$$\zeta_c = \begin{pmatrix} i/2 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ i/2 \end{pmatrix} \rightarrow e^{i \cos^{-1}(1/\sqrt{3})f^y} e^{i\pi f^z/4} \begin{pmatrix} i/2 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ i/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (48)$$

に変形しておくと、渦に対する Ψ の形が対応して

$$\Psi(r, \varphi, z) = \hat{S} \sqrt{\frac{n}{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ f_2(r)e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad (49)$$

と、見やすい形になる。循環は $\kappa_m = \kappa/3$, $\kappa_s = \kappa/3$ に量子化される。

4. (-1/3)-(-1/3) 量子渦

トポロジカルチャージは $\hat{T}[-2\pi/3, -\{\mathcal{E}, \mathcal{I}_{x,y,z}\}\mathcal{C}^2]$ の4種類である。 Ψ の形は

$$\Psi(r, \varphi, z) = \hat{S} \sqrt{\frac{n}{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ f_2(r)e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \quad (50)$$

である。循環は $\kappa_m = -\kappa/3$, $\kappa_s = \kappa/3$ に量子化される。

5. $(-2/3)-1/3$ 量子渦

トポロジカルチャージは $\hat{T}[-4\pi/3, \{\mathcal{E}, -\mathcal{I}_{x,y,z}\}\mathcal{C}]$ の4種類である。 Ψ の形は

$$\Psi(r, \varphi, z) = \hat{S} \sqrt{\frac{n}{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}f_3(r)e^{-i\varphi} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (51)$$

である。循環は $\kappa_m = -2\kappa/3$, $\kappa_s = \kappa/3$ に量子化される。

 6. $2/3-(-1/3)$ 量子渦

トポロジカルチャージは $\hat{T}[4\pi/3, -\{\mathcal{E}, \mathcal{I}_{x,y,z}\}\mathcal{C}^2]$ の4種類である。 Ψ の形は

$$\Psi(r, \varphi, z) = \hat{S} \sqrt{\frac{n}{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}f_3(r)e^{i\varphi} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (52)$$

である。循環は $\kappa_m = 2\kappa/3$, $\kappa_s = \kappa/3$ に量子化される。

$\pi_1(U(1)_g \times SU(2)_s / T_{g+s}^*)$ で与えられる残りの渦は全て不安定で、上で与えられた渦へと分裂する。ここから分かるように T^* の24個の元の中で、安定に存在できる渦に対応するものは14個である⁶。

次に渦芯のオーダーパラメーターと、渦芯のサイズについて議論する。渦芯のオーダーパラメーターは $r \rightarrow 0$ を考えることにより、

 1. $0-1/2$ 量子渦および $0-(-1/2)$ 量子渦

$$\Psi(r \rightarrow 0, \varphi, z) = \hat{S} \frac{\sqrt{n}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{S} \sqrt{\frac{n}{2}} \zeta_{\text{un}} \quad (53)$$

 2. $1/3-1/3$ 量子渦および $(-1/3)-(-1/3)$ 量子渦

$$\Psi(r \rightarrow 0, \varphi, z) = \hat{S} \sqrt{\frac{n}{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{S} \sqrt{\frac{2n}{3}} \zeta_{\text{r2}} \quad (54)$$

⁶式 (43), (46), (49), (50), (51), (52) で与えられる Ψ の形は相互作用の係数 $c_{0,1,2}$ が同じオーダーであるときに成立する。この中の少なくともどれか1つが他よりもずっと大きい場合は状況が変化する [53]。

3. $(-2/3)-1/3$ 量子渦および $(2/3)-(-1/3)$ 量子渦

$$\Psi(r \rightarrow 0, \varphi, z) = \hat{S} \sqrt{\frac{n}{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hat{S} \sqrt{\frac{n}{3}} \zeta_{\Omega} \quad (55)$$

となり、渦芯のオーダーパラメーターとして uniaxial nematic、ferromagnetic-1、ferromagnetic-2 の3種類が現れる。

渦芯のサイズを議論する際には、渦芯に現れるオーダーパラメーターによるエネルギーの増加と渦によって引き起こされる運動エネルギーとの競合を考えればよい。渦芯のサイズを ξ 、渦芯近傍での $f_{1,2,3}(r)$ の振る舞いを $f_{1,2,3}(r \rightarrow 0) \sim r/\xi$ 、運動エネルギーを $\hbar^2 \sum_m |\Psi_m(r \rightarrow 0, \varphi, z)|^2 / 2M\xi^2$ と見積もることで

1. $0-1/2$ 量子渦および $0-(-1/2)$ 量子渦

$$\xi = \sqrt{\frac{2\hbar^2}{Mc_2n}} \quad (56)$$

2. $1/3-1/3$ 量子渦および $(-1/3)-(-1/3)$ 量子渦

$$\xi = \sqrt{\frac{3\hbar^2}{2Mc_1n}} \quad (57)$$

3. $(-2/3)-1/3$ 量子渦および $(2/3)-(-1/3)$ 量子渦

$$\xi = \sqrt{\frac{3\hbar^2}{4Mc_1n}} \quad (58)$$

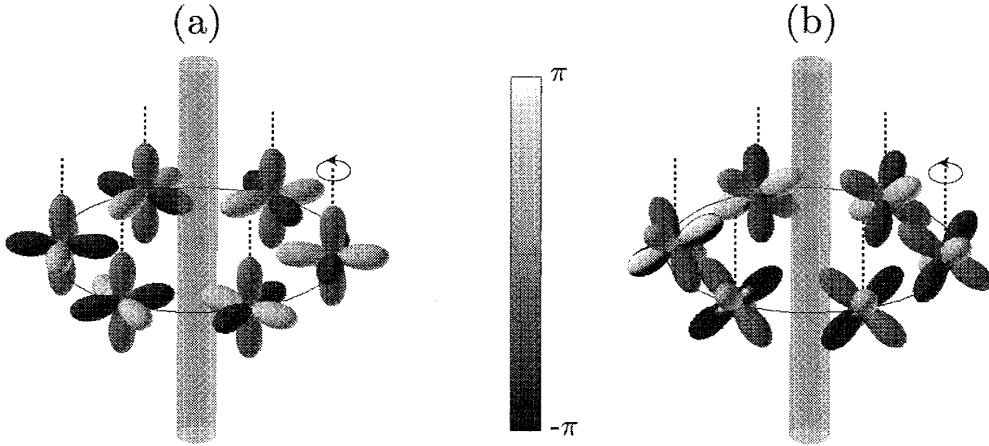
となり、渦芯の大きさは c_1 もしくは c_2 に依存する。

以上の議論をまとめたのが表2である。表では上での議論の他に渦と反渦の関係も示している。反渦は T^{-1} を計算することによって求められる。

次に量子渦の具体的なイメージを説明する。図6(b)が示しているように、cyclic相は正四面体回転対称性を持つ軸性トライアドによって特徴づけられ、cyclic相の量子渦を囲むループ周りにこの軸性トライアドが回転している。恒等変換以外で正四面体を不変に保つ回転は大きく分けて2種類あり、2辺の中点を結ぶ軸に沿った π 回転と重心と頂点を結ぶ軸に沿った $\pm 2\pi/3$ 回転である。前者の回転が $0-(\pm 1/2)$ 量子渦、後者の回転が残りの量子渦に対応する。例として $0-1/2$ 量子渦を

渦の種類	トポロジカルチャージ	κ_m/κ	κ_s/κ	渦芯	ξ	反渦
0-1/2	$T[0, \mathcal{I}_{x,y,z}]$	0	1/2	$\propto \zeta_{\text{un}}$	$\propto \sqrt{1/c_2}$	0-(-1/2)
0-(-1/2)	$T[0, -\mathcal{I}_{x,y,z}]$	0	1/2	$\propto \zeta_{\text{un}}$	$\propto \sqrt{1/c_2}$	0-1/2
1/3-1/3	$T[2\pi/3, \{\mathcal{E}, -\mathcal{I}_{x,y,z}\}\mathcal{C}]$	1/3	1/3	$\propto \zeta_{f2}$	$\propto \sqrt{1/c_1}$	(-1/3)-(-1/3)
(-1/3)-(-1/3)	$T[-2\pi/3, -\{\mathcal{E}, \mathcal{I}_{x,y,z}\}\mathcal{C}^2]$	-1/3	1/3	$\propto \zeta_{f2}$	$\propto \sqrt{1/c_1}$	1/3-1/3
(-2/3)-1/3	$T[-4\pi/3, \{\mathcal{E}, -\mathcal{I}_{x,y,z}\}\mathcal{C}]$	-2/3	1/3	$\propto \zeta_{f1}$	$\propto \sqrt{1/c_1}$	2/3-(-1/3)
2/3-(-1/3)	$T[-4\pi/3, -\{\mathcal{E}, \mathcal{I}_{x,y,z}\}\mathcal{C}^2]$	2/3	1/3	$\propto \zeta_{f1}$	$\propto \sqrt{1/c_1}$	(-2/3)-1/3

表 2: cyclic 相における安定な量子渦の共役類ごとの特徴


 図 7: 量子渦周りの $\zeta^\Sigma(\hat{n})$ のプロット。(a) : 0-1/2 量子渦 (式 (43))。 (b) : 1/3-1/3 量子渦 (式 (49))。図中の点線はトライアドの回転軸を表す。

考える。図 6(b) が示すように 2 辺の中点を結ぶ軸に沿った π 回転は、軸性トライアドのある軸周りの π 回転であり、この回転によって軸性トライアドは不変である。実際に式 (43) を用いて渦周りの $\zeta^\Sigma(\hat{n})$ をプロットしたものが図 7(a) である。同様に (1/3)-(-1/3) 量子渦を考えたとき、これは図 6(b) の正四面体の $2\pi/3$ 回転に対応する。この回転は軸性トライアドにおける 3 つの軸の中心方向、つまり 3 つの軸の方向をそれぞれ $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ としたときの $(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})/\sqrt{3}$ の方向を回転軸としたときの軸性トライアドの $2\pi/3$ 回転である。この回転によって 3 つの軸が入れ替わるが、3 つの軸はそれぞれ $2\pi/3$ だけ $U(1)$ の位相が異なっているため、トライアドの回転と同時に $2\pi/3$ だけゲージ変換を施すと軸性トライアドは不変となる。実際に式 (49) を用いて渦周りの $\zeta^\Sigma(\hat{n})$ をプロットしたものが図 7(b) である。

3.3 実験におけるスピン 2・スピノール BEC と cyclic 相

スピン 2・スピノール BEC は、光トラップ中の冷却原子気体において実現されている [57–61]。冷却原子気体では、内部自由度は超微細スピン $F = I + S$ によって実現される。ここで I は核スピン、 S は電子スピンである。スピン 2・スピノール BEC として、最もよく実験が行われているのは、冷却原子気体として比較的寿命の長い $F = 2$ ^{87}Rb ($I = 3/2, S = 1/2$) の BEC である。

現在、実験で得られている ^{87}Rb に関する相互作用の係数 (16) は $c_0/(4\pi\hbar^2 a_B/M) = 106 \pm 4$, $c_1/(4\pi\hbar^2 a_B/M) = 0.99 \pm 0.06$, $c_2/(4\pi\hbar^2 a_B/M) = -0.106 \pm 0.116$ であり [60]、基底状態として uniaxial nematic 相が予想されている (a_B はボア半径)。しかし、 c_2 のエラーバーは大きく、 $c_2 > 0$ 、つまり cyclic 相が基底状態となる可能性もまだ否定されていない。 c_2 のエラーバーの大きな要因として外部磁場による 2 次ゼーマン効果があり、磁場を小さくする必要がある [61]。

また、cyclic 相自体も磁場に非常に弱い。ここで磁場があることによって cyclic 相と競合しうものを考え、どれくらいの磁場以下で cyclic 相および非可換量子渦が実現するのかを考えてみる。以下の議論では基底状態として cyclic 相が実現しているとし、パラメーターは c_2 の最大エラーバー領域 $c_2/(4\pi\hbar^2 a_B/M) = 0.010$ であるとし、密度 n は典型的な値 $n = 2 \times 10^{20} \text{m}^{-3}$ を用いる。また、2 次ゼーマン効果によるエネルギーシフトは

$$-\frac{\mu_B^2 B^2}{4\Delta_{\text{hf}}} n \sum_{m=-2}^2 m^2 |\zeta_m|^2 \equiv -qn \sum_{m=-2}^2 m^2 |\zeta_m|^2 \quad (59)$$

で与えられる。ここで μ_B はボア磁子、 Δ_{hf} は $F=1$ と $F=2$ の間の超微細分裂、 B は磁場である。

1. biaxial nematic 相

磁場による 2 次ゼーマン効果は、biaxial nematic 相を誘起する。これは、cyclic 相における 2 次ゼーマン効果によるエネルギーシフトが $-2qn$ 、biaxial nematic 相におけるエネルギーシフトが最大で $-4qn$ になることから理解できる。相互作用によるエネルギー差 $c_2 n^2/2$ が 2 次ゼーマン効果によるエネルギー差と等しくなる磁場は

$$2qn = \frac{c_2 n^2}{2} \quad \rightarrow \quad B = \sqrt{\frac{c_2 n \Delta_{\text{hf}}}{\mu_B^2}} \quad (60)$$

で与えられ、約 23mG となる。

2. Q-cyclic 相

2 次ゼーマン効果があると、式 (35) で与えられる cyclic 相は有限のシングレットペア振幅を持った相（ここでは Q-cyclic 相と呼ぶことにする）へと壊れてしまう [47]。2 次ゼーマン効果の元で cyclic のオーダーパラメータである式 (35) の形は次のように変形される。

$$\zeta_{\text{qc}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \sin \chi \\ 0 \\ \sqrt{2} \cos \chi \\ 0 \\ i \sin \chi \end{pmatrix} \quad (61)$$

ここで χ は磁場の大きさ (q) によって決まり、

$$\cos^2 \chi = \frac{1}{2} + \frac{q}{nc_2} \quad (62)$$

である。図8で示すように、Q-cyclic相ではcyclic相の正四面体回転対称性 $H_c \simeq (T)_{g+s}$ が長方形回転対称性 $H_{qc} \simeq (D_2)_s$ へと落ちてしまい、 $1/3$ - $1/3$ 量子渦のようにトライアドが $\pm 2\pi/3$ 回転するような渦は存在できない。磁場中でQ-cyclic相とcyclic相のエネルギー差は $2q^2/c_2$ となるが [47]、cyclic相でのみ存在できる量子渦の運動エネルギーがこの値よりも大きいと、cyclic相で量子渦をつくるほうがエネルギー的に有利となる。例えば、 $1/3$ - $1/3$ 量子渦の運動エネルギーは $c_2 n^2/4$ となり、ここから

$$\frac{2q^2}{c_2} = \frac{c_2 n^2}{4} \rightarrow B = \sqrt{\frac{\sqrt{2} c_2 n \Delta_{\text{hf}}}{\mu_B^2}} \quad (63)$$

が得られ磁場は $B = 27\text{mG}$ となる。また磁場中でcyclic相を実現した場合、動的不安定性によりQ-cyclic相へ向かって系が時間発展するが、有限サイズ効果によって動的不安定性を抑えることができる。サイズ L のBECがあったときに

$$\frac{\pi^2 \hbar^2}{ML^2} = 2q \rightarrow B = \sqrt{\frac{2\pi^2 \hbar^2 \Delta_{\text{hf}}}{ML^2 \mu_B^2}} \quad (64)$$

よりも磁場が小さいと動的不安定性が起こらない。 $L = 100\mu\text{m}$ とすると磁場は $B = 28\text{mG}$ となる。

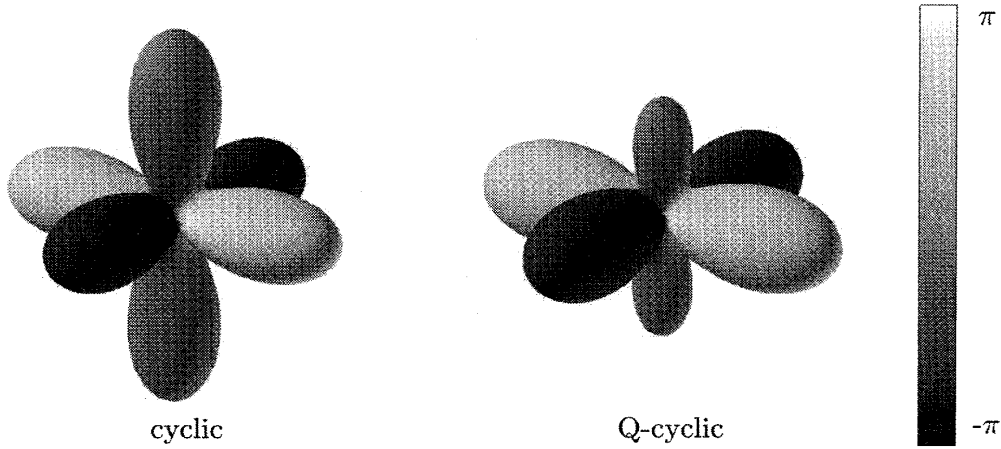


図 8: cyclic相とQ-cyclic相の $\zeta^\Sigma(\hat{n})$ の形

上記の結果から、cyclic相において非可換量子渦を実現するために最低でも 23mG まで磁場を抑える必要があると思われる⁷。

3.4 非可換量子渦の衝突シミュレーション

本節では、cyclic相における量子渦の衝突シミュレーションを行い、2章で議論されている幾何学的考察を再現することを示す [19]。特に衝突する量子渦のトポロジカルチャージが非可換のときに、ラング渦が形成されることを明らかにする。

⁷磁場を約 $1\mu\text{G}$ まで抑えたときに、スピンの量子化軸の向きに対する対称性が回復し、3つの粒子がシングレット3量体を形成して凝縮する状態が言われている [43]。この状態は1成分BECと同様に $U(1)$ 対称性のみが破れているので非可換量子渦は存在せず、したがって磁場はこの値よりも大きい必要があると思われる。

量子渦のダイナミクスを調べるために、凝縮体の時間発展を記述する Gross-Pitaevskii 方程式を導出する [47, 48]。Gross-Pitaevskii 方程式は式 (17) における平均場ハミルトニアン H_{mean} に対するハミルトン方程式 $i\hbar\partial\Psi_m/\partial t = \delta H_{\text{mean}}/\delta\Psi_m$ から求められ、 $V^{\text{ext}}(\mathbf{x})$ を無視すると最終的に

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_{\pm 2}}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + c_0 n \pm 2c_1 F^z\right] \Psi_{\pm 2} + c_1 F^\mp \Psi_{\pm 1} + c_2 A_{20} \Psi_{\mp 2}^* \quad (65a)$$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_{\pm 1}}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + c_0 n \pm c_1 F^z\right] \Psi_{\pm 1} + c_1 \left[\frac{\sqrt{6}}{2} F^\mp \Psi_0 + F^\pm \Psi_{\pm 2}\right] - c_2 A_{20} \Psi_{\mp 1}^* \quad (65b)$$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_0}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + c_0 n\right] \Psi_0 + \frac{\sqrt{6}}{2} c_1 [F^- \Psi_{-1} + F^+ \Psi_1] + c_2 A_{20} \Psi_0^* \quad (65c)$$

となる。

量子渦の衝突シミュレーションは、 Ψ の量子渦解を初期状態として Gross-Pitaevskii 方程式 (65) を数値的に解くことによって行う [62]。シミュレーションはノイマン境界条件を課した立方体の中で行う。シミュレーションパラメーターは以下の設定で行う。

1. 相互作用係数 : $c_0 > 0$, $c_1/c_0 = c_2/c_0 = 0.5$
2. 立方体の大きさ : $\xi_0 \equiv \sqrt{\hbar^2/Mc_0 n}$ としたときの $(64\xi_0)^3$
3. 計算領域に対するグリッドの数 : 256^3

相互作用係数の値は cyclic 相と非可換量子渦が安定に存在できるようなものを採用した。この値は $F = 2$ ^{87}Rb BEC を考えた場合に現実的ではないが、本研究では非可換量子渦の衝突とそのトポロジカルな性質に集中して議論し、実験との整合性には注意を払わないことにする。またシミュレーションには 2 種類の初期状態を用意する。(I) : ねじれの位置にある 2 本の直線状の量子渦。(II) : 2 本の絡み目を作った量子渦。衝突する量子渦のトポロジカルチャージの組は次の 4 種類である。

1. $T[2\pi/3, C]$ (1/3-1/3 量子渦) と $T[2\pi/3, C]$ (1/3-1/3 量子渦) : 同じトポロジカルチャージ
2. $T[2\pi/3, C]$ (1/3-1/3 量子渦) と $T[4\pi/3, -C^2]$ (2/3-(-1/3) 量子渦) : 可換でかつ異なるトポロジカルチャージ
3. $T[2\pi/3, C]$ (1/3-1/3 量子渦) と $T[2\pi/3, -I_y C]$ (1/3-1/3 量子渦) : 非可換なトポロジカルチャージ
4. $T[2\pi/3, C]$ (1/3-1/3 量子渦) と $T[4\pi/3, -I_x C^2]$ (2/3-(-1/3) 量子渦) : 非可換なトポロジカルチャージ

以後、衝突の種類を (I)-1 (ねじれの位置にある直線状かつ同じトポロジカルチャージを持った 2 本の量子渦の衝突) のように表す。

図 9 は可換なトポロジカルチャージを持った量子渦の衝突である。トポロジカルチャージが同じ場合 ((I)-1) にはつなぎ換えが起こり (図 9(a)-(c))、異なる場合 ((I)-2) には通り抜けが起こる。

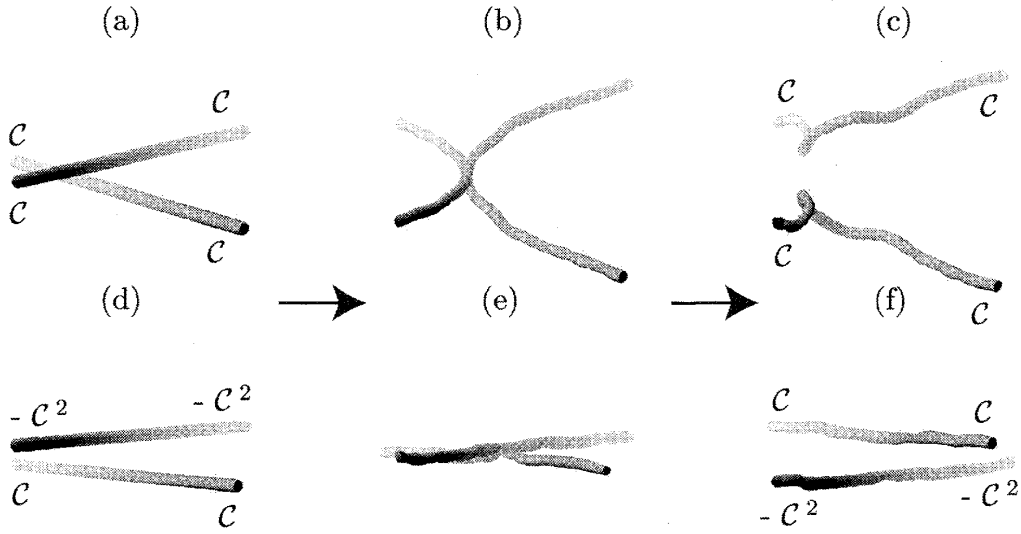


図 9: 可換なトポロジカルチャージを持った量子渦の衝突。(a)-(c) : (I)-1 (つなぎ換え)。(d)-(f) : (I)-2 (通り抜け)

ている (図 9(d)-(f))。図 9(c) と (f) はそれぞれ 1 章で議論した図 4(i) ($BA^{-1} = C(C)^{-1} = \mathcal{E}$) と図 4(g) に完全に対応している。

図 10 は非可換なトポロジカルチャージを持った量子渦の衝突である。図 10(c) と (f) のどちらも図 4(i) に対応しており、トポロジカルチャージの非可換性に依存してそれぞれ $0-(1/2)$ 量子渦 ($BA^{-1} = C(-I_y C)^{-1} = I_y$)、 $(-1/3)-(-1/3)$ 量子渦 ($BA^{-1} = C(-I_x C^2)^{-1} = -I_x C^2$) のラング渦が生成している。1 章で議論したように、お互いに可換なトポロジカルチャージを持つ量子渦の衝突によってラング渦ができるには第 1 種超伝導体の磁束量子のような渦間の引力相互作用が必要で、かつラング渦ができるか否かは衝突角度や衝突速度に非常に敏感であるが [14–16]、今回のような非可換なトポロジカルチャージを持つ量子渦が衝突した際には衝突角度などにまったく依存しない。このことは様々なトポロジカルチャージの組および衝突角度や衝突速度でシミュレーションを行い、確認している。

図 10 は絡み目を作った量子渦の衝突である。トポロジカルチャージが可換な場合 (図 11(a)-(c)) には図 9(d)-(f) 同様、渦の通り抜けが起こることによって絡み目がほどける。一方でトポロジカルチャージが非可換な場合 (図 11(d)-(f)) には、衝突によってラング渦が生成するため、絡み目がほどけない。図 11(f) は図 4(j) に対応しており、生成されたラング渦のトポロジカルチャージは $BAB^{-1}A^{-1} = (-I_y C)C(-I_y C)^{-1}(C)^{-1} = -I_x$ となり、 $0-(1/2)$ 量子渦となっている。

シミュレーションにおける量子渦の位置は、渦芯のオーダーパラメーターの構造から知ることができる。つまり $0-(\pm 1/2)$ 量子渦は渦芯が uniaxial nematic のオーダーに、その他の量子渦は渦芯が ferromagnetic-1 もしくは ferromagnetic-2 のオーダーになっていることから、前者の渦は渦芯に有限の $|A_{20}|^2$ が、後者の渦は渦芯に有限の F^2 が局在している。よってこれらの値を計算することで量子渦の位置が分かる⁸。量子渦のトポロジカルチャージは、量子渦から十分離れた位置で

⁸実験では phase-contrast imaging という方法を用いて、局所的な磁化を測定することができることが報告されて

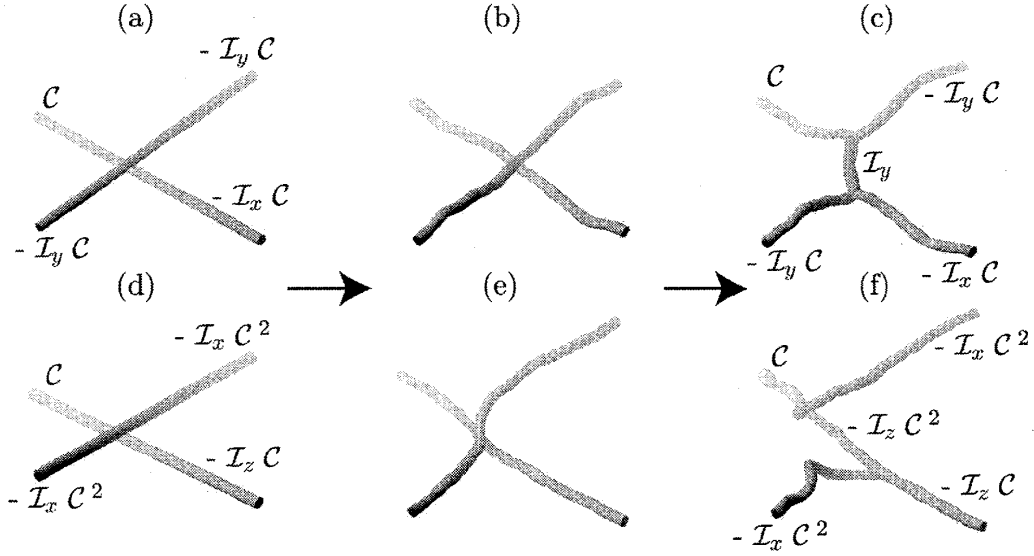


図 10: 非可換なトポロジカルチャージを持った量子渦の衝突。(a)-(c): (I)-3 (ラング渦 I_y)。 (d)-(f): (I)-4 (ラング渦 $-I_z C^2$)

量子渦を囲む経路をとり（経路の始点は常に固定）、経路に沿った Ψ の変化を調べることによって知ることができる。経路の始点を固定していてもトポロジカルチャージは時間とともに変化するので、実際にトポロジカルチャージを求める際には適当な一様の $U(1)$ ゲージ変換及び $SO(3)$ スピン回転を施すことで、トポロジカルチャージを調節している。渦の中心で Ψ は cyclic オーダーになっていないため、渦近傍ではオーダーパラメーターマニフォールドが式 (37) の形になっておらず、より大きな対称性 $G \simeq U(5)$ へと広がっていることを意味する。しかしシミュレーションの結果は、このことが量子渦の衝突における幾何学的な性質には何ら影響を及ぼしていないことを意味しており⁹、これは驚くべきことである。なぜなら現実の物理系において（ π_1 のみに限らず）ホモトピー理論によって分類される位相欠陥とそれらの幾何学的な相互作用を議論する際、上記のようにオーダーパラメーターマニフォールドが広がって、量子渦の非可換性などの幾何学的な性質が消えてしまうことがしばしば危惧されてきたからである。

4 まとめ

本記事の前半では第 1 ホモトピー群を用いた量子渦の定義および分類を解説し、そこから得られる非可換量子渦の定義およびその特徴について議論した。非可換量子渦はオーダーパラメーターマニフォールドにおける第 1 ホモトピー群が非可換群となるときに対応する量子渦として定義される。さらに非可換量子渦の幾何学的性質から導かれる非可換量子渦の衝突ダイナミクスについて議論した。非可換量子渦において、そのトポロジカルチャージが非可換な 2 本の渦が衝突する

いる [63]。この方法を用いれば、図 10(f) のラング渦は局所磁化の梯子構造として観測可能となるであろう。

⁹渦芯の大きさ ξ がシミュレーションを行う系のサイズ（実験の場合は BEC のサイズ）と同程度にまで広がっている場合は、影響を受ける。

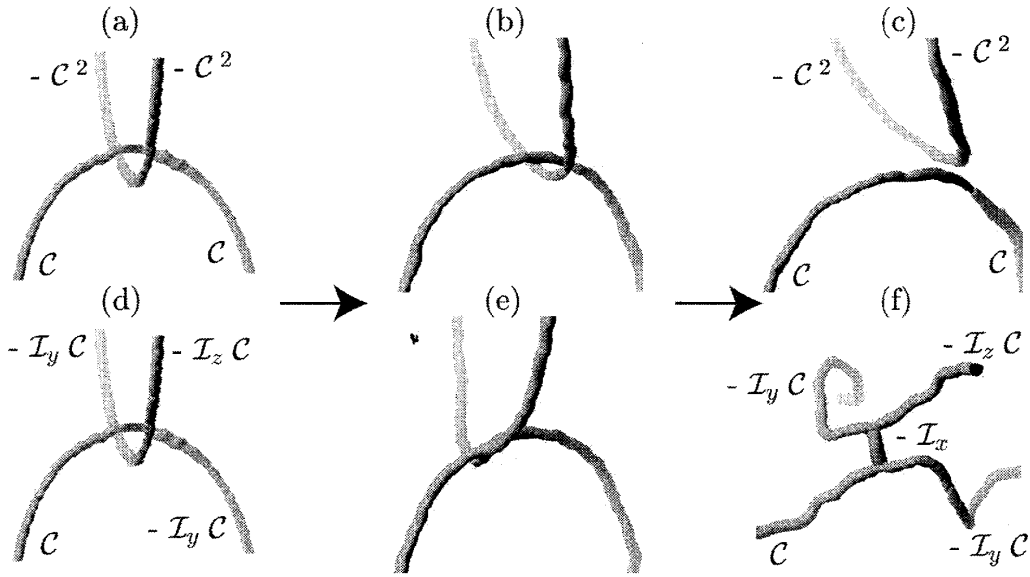


図 11: 絡み目を作った量子渦の衝突。(a)-(c) : (II)-2 (可換なトポロジカルチャージ)。(d)-(f) : (II)-3 (非可換なトポロジカルチャージ)

とき、可換なトポロジカルチャージを持った渦の衝突とは異なり、つなぎ換えも通り抜けも幾何学的に禁止され、ラング渦と呼ばれる衝突する渦をつなぎ新しい渦が常に生成されるを明らかにした。さらに衝突する2本の渦が絡み目を作っている場合、ラング渦ができることによって絡み目がほどけなくなることを明らかにした。

後半では非可換量子渦が実現される系として、スピン2・スピノール BEC における cyclic 相を議論した。cyclic 相のオーダーパラメーターマニフォールドに対する第1ホモトピー群は、軸性トリアドが持つ非可換な正四面体回転群を用いて記述される。スピン2・スピノール BEC に対する Gross-Pitaevskii 方程式の数値シミュレーションを行うことによって、前半に議論した非可換量子渦の衝突ダイナミクスが実際に再現されることを明らかにした。

本記事では、スピン2・スピノール BEC という具体的な系に着目して非可換量子渦の研究を行ったが、ここで議論される結果は、非可換なトポロジカルチャージを持つ位相欠陥が実現されるあらゆる系に対して普遍的である。本研究が、液晶、コスミックストリング、内部自由度のある超伝導など、非可換なトポロジカルチャージを持つ位相欠陥が予想される系へのさらなる発展につながることを期待したい。

非可換量子渦が新しいパラダイムシフトを引き起こすであろうと考えられる重要な研究分野の1つが量子乱流である [64]。量子乱流は量子渦の複雑な配置およびダイナミクスによって実現される。量子乱流を理解するためのもっとも重要な鍵となるのが、量子渦のダイナミクス、特にそのカスケード過程であると一般的に信じられている。量子乱流中では、量子渦のつなぎ換えを通して大きなスケールの量子渦が小さなスケールへとカスケードする (リチャードソンカスケード)、そしてこのつなぎ換えがさらに量子渦上にケルビン波と呼ばれる波を励起し、そのケルビン波がさらに短い波長へとカスケードする (ケルビン波カスケード) という描像が指摘されており、こ

の2種類のカスケードが量子乱流の波数空間中における高波数へのエネルギーカスケードの原因となる。特にリチャードソンカスケードが起こる波数領域において、量子乱流と粘性流体乱流に統計的な類似性が発見され、非常に興味深い [65, 66]。いずれにせよ量子乱流中における量子渦の2種類のカスケード過程において、つなぎ換えのダイナミクスは非常に重要である。現在、量子乱流は超流動液体 ^4He 、 $^3\text{He-B}$ 、冷却原子気体スカラー BEC において実現されているが、これらの系では巻き数 ± 1 の量子渦のみが安定で、2本の量子渦は必ずつなぎ換えを起こす。もし非可換量子渦が実現されるような系で量子乱流が実現されるとどのようなことが予想されるだろうか？トポロジカルチャージが非可換な量子渦が衝突するとつなぎ換えが禁止され、代わりにラング渦によって量子渦が結合されることを本研究で明らかにした。つまり乱流中でこのようなことが起こり続けると、量子渦の大規模なネットワーク構造が起こりうることを期待され、その場合に従来の量子乱流とは全く異なった統計性が期待できるであろう¹⁰。この「非可換量子乱流」が量子乱流の新しい分野となるであろうことを期待しつつ本記事を終える。

謝辞

本記事で解説した非可換量子渦の研究は、慶応大学商学部日吉物理学教室の新田宗土氏、東京大学大学院理学系研究科の川口由紀氏、上田正仁氏との共同研究のもとに成り立ったもので、この場をお借りしてお礼申し上げたいと思います。

5 参考文献

参考文献

- [1] L. Onsager, *Nuovo Cimento*, **6**, Suppl. 2 (1949) 279.
- [2] W. F. Vinen, *Proc. Roy. Soc. A* **260** (1961) 218.
- [3] J. C. Davis, J. D. Close, R. Zieve, and R. E. Packard, *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991) 329.
- [4] K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, and J. Dalibard, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 806.
- [5] J. R. Abo-Shaeer, C. Raman, J. M. Vogels, and W. Ketterle, *Science* **292** (2001) 476.
- [6] G. E. Volovik, *Exotic Properties of Superfluid Helium 3* (World Scientific, Singapore, 1992).
- [7] U. Leonhardt and G. E. Volovik, *JETP Lett.* **72** (2000) 46.
- [8] F. Zhou, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 080401; F. Zhou and M. Snoek, *Ann. Phys. (N. Y.)* **308** (2003) 692.

¹⁰ (お互いに可換な) トポロジカルチャージの種類を増やし、つなぎ換えの他に通り抜けのダイナミクスを導入しても量子乱流の統計性にはほとんど影響を及ぼさないことが指摘されている [67]

- [9] A.-C. Ji, W. M. Liu, J. L. Song, and F. Zhou, Phys. Rev. Lett. **101** (2008) 010402.
- [10] J. Koplik and H. Levine, Phys. Rev. Lett. **71**, 1375 (1993); **76** (1996) 4745.
- [11] M. Leadbeater, T. Winiecki, D. C. Samuels, C. F. Barenghi and C. S. Adams, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 1410.
- [12] S. Ogawa, M. Tsubota and Y. Hattori, J. Phys. Soc. Jpn. **71** (2002) 813.
- [13] G. P. Bewley, M. S. Paoletti, K. R. Sreenivasan, D. P. Lathrop, Proc. Natl. Acad. Sci. **105** (2008) 13707.
- [14] P. Laguna and R. A. Matzner, Phys. Rev. Lett. **62** (1989) 1948.
- [15] L. M. A. Bettencourt and T. W. B. Kibble, Phys. Lett. B **332** (1994) 297; L. M. A. Bettencourt, P. Laguna, and R. A. Matzner, Phys. Rev. Lett. **78** (1997) 2066.
- [16] N. Bevis and P. M. Saffin, Phys. Rev. D **78** (2008) 023503.
- [17] V. Poenaru and G. Toulouse, J. Phys. (Paris) **38** (1977) 887.
- [18] N. D. Mermin, Rev. Mod. Phys. **51** (1979) 591.
- [19] M. Kobayashi, Y. Kawaguchi, M. Nitta, and M. Ueda, Phys. Rev. Lett. **103** (2009) 115301.
- [20] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1994).
- [21] M. B. Hindmarsh and T. W. B. Kibble, Rep. Prog. Phys. **58** (1995) 477.
- [22] A. Hanany and K. Hashimoto, J. High Energy Phys. **06** (2005) 021.
- [23] A. Achúcarro and R. de Putter, Phys. Rev. D **74** (2006) 121701(R).
- [24] P. Laguna, V. Natchu, R. A. Matzner and T. Vachaspati, Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 041602.
- [25] K. Hashimoto and D. Tong, J. Cosmol. Astropart. Phys. **09** (2005) 004.
- [26] M. Eto, K. Hashimoto, G. Marmorini, M. Nitta, K. Ohashi and W. Vinci, Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 091602.
- [27] N. Bevis, M. Hindmarsh and M. Kunz, Phys. Rev. D **70** (2004) 043508.
- [28] M. Wyman, L. Pogosian and I. Wasserman, Phys. Rev. D **72** (2005) 023513 [Erratum-ibid. D **73** (2006) 089905].
- [29] R. A. Battye, B. Garbrecht and A. Moss, JCAP **0609** (2006) 007.

- [30] N. Bevis, M. Hindmarsh, M. Kunz and J. Urrestilla, Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 021301.
- [31] D. Spergel and U. L. Pen, Astrophys. J. **491** (1997) L67.
- [32] P. McGraw, Phys. Rev. D **57** (1998) 3317.
- [33] M. Bucher and D. N. Spergel, Phys. Rev. D **60** (1999) 043505.
- [34] P. G. de Gennes and J. Prost *The Physics of Liquid Crystals* (Oxford Univ. Press, New York, 1995), 2nd ed.
- [35] S. Chandrasekhar, B. R. Ratna, B. K. Sadashiva, and V. N. Raja, Mol. Cryst. Liq. Cryst. **165** (1988) 123; S. Chandrasekhar, G. G. Nair, K. Praefcke, and D. Singer, Mol. Cryst. Liq. Cryst. **288** (1996) 7.
- [36] G. E. Volovik and V. P. Mineev, JETP **45** (1977) 1186.
- [37] D. J. Thouless, *Topological Quantum Numbers in Nonrelativistic Physics* (World Scientific, Singapore, 1988), Chap. 8.
- [38] M. Zapotocky, P. M. Goldbart, and N. Goldenfeld, Phys. Rev. E **51** (1995) 1216
- [39] N. V. Priezjev and R. A. Pelcovits, Phys. Rev. E **66** (2002) 051705.
- [40] J. Ruostekoski, J. R. Anglin, Phys. Rev. Lett. **91** (2003) 190402.
- [41] U. A. Jhawaja, H. Stoof, Nature **411** (2001) 918; U. A. Jhawaja, H. Stoof, Phys. Rev. A **64** (2001) 043612.
- [42] Y. Kawaguchi, M. Nitta, M. Ueda, Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 180403.
- [43] M. Koashi and M. Ueda, Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 1066; M. Ueda and M. Koashi, Phys. Rev. A **65** (2002) 063602.
- [44] C. V. Ciobanu, S.-K. Yip, and T.-L. Ho, Phys. Rev. A **61** (2000) 033607.
- [45] N. N. Klausen, J. L. Bohn and C. H. Greene, Phys. Rev. A **64** (2001) 053602.
- [46] H. Mäkelä, Y. Zhang and K.-A. Suominen, J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003) 8555; H. Mäkelä, J. Phys. A **39** (2006) 7423.
- [47] H. Saito and M. Ueda, Phys. Rev. A **72** (2005) 053628.
- [48] W. V. Pogosov, R. Kawate, T. Mizushima, and K. Machida, Phys. Rev. A **72** (2005) 063605.
- [49] F. Zhou and G. W. Semenoff, Phys. Rev. Lett **97** (2006) 180411.

- [50] G. W. Semenoff and F. Zhou, Phys. Rev. Lett **98** (2007) 100401.
- [51] R. Barnett, S. Mukerjee, and J. E. Moore, Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 240405.
- [52] S. Uchino, T. Otsuka, and M. Ueda, Phys. Rev. A **78** (2008) 023609.
- [53] M. Kobayashi, Y. Kawaguchi, and M. Ueda, arXiv:0907.3716.
- [54] J. A. M. Huhtamäki, T. P. Simula, M. Kobayashi, and K. Machida, Phys. Rev. A **80** (2009) 051601(R).
- [55] J. L. Song, G. W. Semenoff, and F. Zhou, Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 160408.
- [56] A. M. Turner, R. Barnett, E. Demler, and A. Vishwanath, Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 190404.
- [57] H. Schmaljohann, M. Erhard, J. Kronjäger, M. Kottke, S. van Staa, L. Cacciapuoti, J. J. Arlt, K. Bongs, and K. Sengstock, Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 040402.
- [58] M.-S. Chang, C. D. Hamley, M. D. Barrett, J. A. Sauer, K. M. Fortier, W. Zhang, L. You, and M. S. Chapman, Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 140403.
- [59] T. Kuwamoto, K. Araki, T. Eno, and T. Hirano, Phys. Rev. A **69** (2004) 063604.
- [60] A. Widera, F. Gerbier, S. Fölling, T. Gericke, O. Mandel, and I. Bloch, New J. Phys. **8** (2006) 152.
- [61] S. Tojo, T. Hayashi, T. Tanabe, T. Hirano, Y. Kawaguchi, H. Saito, and M. Ueda, Phys. Rev. A **80** (2009) 042704.
- [62] “<http://cat.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~michikaz/physics/collision/collision.html>”にて衝突ダイナミクスのアニメーションが見られる。
- [63] J. M. Higbie, L. E. Sadler, S. Inouye, A. P. Chikkatur, S. R. Leslie, K. L. Moore, V. Savalli, and D. M. Stamper-Kurn, Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 050401.
- [64] W. F. Vinen and J. J. Niemela, J. Low Temp. Phys. **128** (2002) 167; W. F. Vinen and R. J. Donnelly, Phys. Today **60**, No. 4 (2007) 43.
- [65] C. Nore, M. Abid, and M. E. Brachet, Phys. Rev. Lett. **78** (1997) 3896; C. Nore, M. Abid, and M. E. Brachet, Phys. Fluids **9** (1997) 2644.
- [66] M. Kobayashi and M. Tsubota, Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 065302; M. Kobayashi and M. Tsubota, J. Phys. Soc. Jpn. **74** (2005) 3248.
- [67] T. -L. Horng and S. -C. Gou (Private communication).