

Jackson の basic double hypergeometric series
 $\Upsilon_1(a; b; c; x, y; \lambda)$ およびその多変数化の contiguity
 relations について

日立製作所 堀内 恵美 (Emi Horiuchi)

今回対象とするのは次の級数である.

$$F(\alpha; \beta_1, \dots, \beta_n; \gamma; x_1, \dots, x_n) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n} \frac{[\alpha; \sum_{i=1}^n \nu_i] [\beta_1; \nu_1] \dots [\beta_n; \nu_n]}{[\gamma; \sum_{i=1}^n \nu_i] [1; \nu_1] \dots [1; \nu_n]} x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n} q^{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \nu_i(\nu_i-1)} \dots (0.1)$$

但し $[\alpha; \nu] \stackrel{\text{def}}{=} [\alpha] \cdot [\alpha+1] \dots [\alpha+\nu-1]$, $[\alpha] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1-q^\alpha}{1-q}$ とする.

又, T_i を変数 x_i を q 倍する作用素

$$T_i : f(x_1, \dots, x_n) \mapsto (T_i f)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, q x_i, \dots, x_n)$$

とし, q -差分作用素を $[0; i] = \frac{1-T_i}{1-q}$ で定義する. 更に $[0; i+\alpha] = \frac{1-q^\alpha T_i}{1-q}$ とおく.

(0.1) において $n=5$ の場合, すなわち 2 変数の場合を考えると

これは Jackson の basic double hypergeometric series

$$\Upsilon_1(a; b; c; x, y; \lambda) = \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{[a; m+n] [b; m]}{[c; m+n] [1; m] [1; n]} x^m y^n q^{\lambda n(n-1)}$$

で $\lambda = \frac{1}{2}$ としたものである.

(0.1) の contiguity relations を調べるのが目的である.

1. まず (0.1) に対する昇降演算子を求める.

以下, パラメータ $\alpha, \beta_p (4 \leq p \leq n-1), \gamma$ のかわりに 次の関係を満たす μ_i を用いることにする ([3], [4], [5], [6] 参照).

$$\begin{cases} \alpha = \mu_2 + 1 \\ \gamma = \mu_2 + \mu_3 + 2 \\ \beta_p = -\mu_p \quad (4 \leq p \leq n-1), \quad \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i = -2 \end{cases} \quad \dots (1.1)$$

(1.1) により α を 1 増やすことと μ_2 を 1 増やして μ_3 を 1 減らすことは同じ意味をもつ. 同様に β_i を 1 増やすことは μ_i を 1 増やして μ_i を 1 減らすことと, γ を 1 減らすことは μ_1 を 1 増やして μ_3 を 1 減らすことと同等である. 以下, μ_i を 1 増やして μ_i を 1 減らす作用素を C_{ij} と書く. まず次の作用素は容易に求めることができる. ここでは 1 つづ上下したパラメータは F の右の上下に書くことにする.

$$C_{23} \left[\sum_{i=4}^n \theta_i + \alpha \right] F = [\alpha] F^\alpha$$

$$C_{1p} - e^{-\beta_p} [\theta_p + \beta_p] F = [-\beta_p] F^{\beta_p} \quad (4 \leq p \leq n-1)$$

$$C_{13} - e^{1-\gamma} \left[\sum_{i=4}^n \theta_i + \gamma - 1 \right] F = [1-\gamma] F_\gamma$$

$$C_{2p} - e^{\gamma-\beta_p} x_p^{-1} [\theta_p] F = \frac{[\alpha][1-\beta_p]}{[1-\gamma]} F^{\alpha\beta_p\gamma} \quad (4 \leq p \leq n-1)$$

$$C_{2n} - e^\gamma T_n^{-1} x_n^{-1} [\theta_n] F = \frac{[\alpha]}{[1-\gamma]} F^{\alpha\gamma}$$

これらから (0.1) の満たす q -差分方程式を導くことができる.

$$\left\{ \left(\left[\sum_{i=4}^n \theta_i + \alpha \right] - T_n^{-1} x_n^{-1} [\theta_n] \left[\sum_{i=4}^n \theta_i + \gamma - 1 \right] \right) F(x_4, \dots, x_n) = 0 \quad \dots (1.2) \right.$$

$$\left. \left(\left[\sum_{i=4}^n \theta_i + \alpha \right] [\theta_p + \beta_p] - x_p^{-1} [\theta_p] \left[\sum_{i=4}^n \theta_i + \gamma - 1 \right] \right) F(x_4, \dots, x_n) = 0 \quad \dots (1.3) \right.$$

(4 ≤ p ≤ n-1)

この方程式を用いて α を 1 減らす作用素を求めてみる.

(1.2) の両辺に左から $x_n T_n$ をかける.

$$(x_n T_n [\sum_{i=4}^n \theta_i + \alpha] - [\theta_n] [\sum_{i=4}^n \theta_i + \delta - 1]) F(x_4, \dots, x_n) = 0$$

ここで $[a+b]$ は $[a] + \varrho^a [b]$ 又は $\varrho^b [a] + [b]$ と書け、 $[\theta_i + A]$ も

$$[\theta_i] + T_i [A] \text{ 又は } \varrho^A [\theta_i] + T_i \text{ と書ける. 故て } [\sum_{i=4}^n \theta_i + \delta - 1] = \varrho^{\delta-\alpha-1} [\sum_{i=4}^n \theta_i + \alpha] + [\delta - \alpha - 1]$$

と書けるから

$$\{(x_n T_n - \varrho^{\delta-\alpha-1} [\theta_n]) [\sum_{i=4}^n \theta_i + \alpha] - [\theta_n] [\delta - \alpha - 1]\} F(x_4, \dots, x_n) = 0$$

となる. 両辺の左から $T_4 \cdots T_{n-1}$ をかけて式を得る.

$$\{(\varrho^{-1} T_4 \cdots T_n x_n - \varrho^{\delta-\alpha-1} T_4 \cdots T_{n-1} [\theta_n]) [\sum_{i=4}^n \theta_i + \alpha] - T_4 \cdots T_{n-1} [\theta_n] [\delta - \alpha - 1]\} F(x_4, \dots, x_n) = 0 \quad \dots (1.4)$$

(1.3) 式に左から x_p をかけて変形して

$$\{(x_p [\theta_p + \beta_p] - \varrho^{\delta-\alpha-1} T_p [\theta_p]) [\sum_{i=4}^n \theta_i + \alpha] - [\theta_p] [\delta - 1]\} F(x_4, \dots, x_n) = 0 \quad (4 \leq p \leq n-1) \quad \dots (1.5)$$

(1.4) と (1.5) に左から $T_4 \cdots T_{p-1}$ をかけて $p=4$ から $p=n-1$ までの和を

と T のもとに式を得る.

$$\{(\varrho^{-1} T_4 \cdots T_n x_n + \sum_{p=4}^{n-1} T_4 \cdots T_{p-1} x_p [\theta_p + \beta_p] - \varrho^{\delta-\alpha-1} [\sum_{i=4}^n \theta_i]) [\sum_{i=4}^n \theta_i + \alpha] - [\sum_{i=4}^n \theta_i] [\delta - \alpha - 1]\} F(x_4, \dots, x_n) = 0$$

$$[\sum_{i=4}^n \theta_i] = [\sum_{i=4}^n \theta_i + \alpha - \alpha] = \varrho^{-\alpha} [\sum_{i=4}^n \theta_i + \alpha] - \varrho^{-\alpha} [\alpha] \text{ を用いて}$$

$$\begin{aligned} (\varrho^{-1} T_4 \cdots T_n x_n + \sum_{p=4}^{n-1} T_4 \cdots T_{p-1} x_p [\theta_p + \beta_p] - \varrho^{\delta-\alpha-1} [\sum_{i=4}^n \theta_i] - \varrho^{-\alpha} [\delta - \alpha - 1]) [\sum_{i=4}^n \theta_i + \alpha] F(x_4, \dots, x_n) \\ = -\varrho^{-\alpha} [\delta - \alpha - 1] [\alpha] F(x_4, \dots, x_n) \quad \dots (1.7) \end{aligned}$$

$$[\sum_{i=4}^n \theta_i + \alpha] F(x_4, \dots, x_n) = [\alpha] F^\alpha(x_4, \dots, x_n) \text{ であつて、} T \text{ から (1.7) 式の}$$

両辺を $[\alpha]$ でわり、 α を 1 減らして目的の作用素を得る.

$$C_{32} (-\varrho^{\alpha-2} T_4 \cdots T_n x_n - \varrho^{\alpha-1} \sum_{p=4}^{n-1} T_4 \cdots T_{p-1} x_p [\theta_p + \beta_p] + \varrho^{\delta-1} [\sum_{i=4}^n \theta_i] + [\delta - \alpha]) F = [\delta - \alpha] F_\alpha$$

他の作用素も同様にして、場合により (1.2), (1.3) の compatibility

$$\begin{cases} (T_n^{-1} x_n^{-1} [\theta_n] [\theta_p + \beta_p] - x_p^{-1} [\theta_p]) F(x_4, \dots, x_n) = 0 \\ ([\theta_p + \beta_p] x_s^{-1} [\theta_s] - [\theta_s + \beta_s] x_p^{-1} [\theta_p]) F(x_4, \dots, x_n) = 0 \quad (4 \leq p, s \leq n-1) \end{cases}$$

を用いて求めることができる.

$$C_{3n} (\varrho^{2\delta-\alpha} T_n^{-1} x_n^{-1} [\theta_n] - \varrho^\delta) F = \frac{[1-\delta]}{[-\delta]} F^\delta$$

$$C_{pn} (1 - \varrho^{\beta_p-1} x_p T_n^{-1} x_n^{-1} [\theta_n]) F = F_{\beta_p} \quad (4 \leq p \leq n-1)$$

$$C_{p2} \left\{ \varrho^{-\delta} T_p^{-1} x_n + \varrho^{\alpha-\delta} T_p^{-1} \sum_{s=4}^{n-1} T_4 \cdots T_{s-1} x_s [\theta_s + \beta_s] + \varrho^{1-\delta} T_p^{-1} [\alpha-1] - \varrho^{1-\delta} T_n^{-1} T_p^{-1} \left[\sum_{i=4}^n \theta_i + \delta - 1 \right] \right\} F \\ = [1-\delta] F_{\alpha\beta_p\delta} \quad (4 \leq p \leq n-1)$$

$$C_{12} \left\{ \varrho^{\alpha-\delta-1} T_4 \cdots T_n x_n - \varrho^{1-\delta} \left[\sum_{i=4}^n \theta_i + \delta - 1 \right] + \varrho^{\alpha-\delta} \sum_{s=4}^{n-1} T_4 \cdots T_{s-1} x_s [\theta_s + \beta_s] \right\} F = [1-\delta] F_{\alpha\delta}$$

$$C_{3p} (\varrho^{\delta-\beta_p} [\theta_p + \beta_p] - \varrho^{2\delta-\alpha-\beta_p} x_p^{-1} [\theta_p]) F = \frac{[-\beta_p][1-\delta]}{[-\delta]} F^{\beta_p\delta} \quad (4 \leq p \leq n-1)$$

$$C_{ps} (\varrho^{-\delta} x_p T_p^{-1} \left[\sum_{i=4}^n \theta_i + \alpha \right] - \varrho^{1-\delta} T_p^{-1} \left[\sum_{i=4}^n \theta_i + \delta - 1 \right]) F = [1-\delta] F_{\beta_p\delta} \quad (4 \leq p \leq n-1)$$

$$C_{ps} (\varrho^{-\beta_s-1} x_p T_p^{-1} x_s^{-1} [\theta_s] - \varrho^{\beta_s} [\theta_s + \beta_s] T_p^{-1}) F = [-\beta_s] F_{\beta_p}^{\beta_s} \quad (4 \leq p \neq s \leq n-1)$$

2. ここで $\varrho=1$ の場合を考えてみる.

$\varrho=1$ の場合の昇降演算子間の関係 (contiguity relations) は

以下の通りである.

$$\left\{ \begin{array}{l} [C_{1t}, C_{tn}] = 1 \quad (2 \leq t \leq n-1) \\ [C_{it}, C_{tj}] = C_{ij} \quad \begin{array}{l} i < t < j \text{ かつ } (i, j) \neq (1, n) \\ \text{又は} \\ j < t < i \end{array} \\ [C_{ij}, C_{ji}] = \mu_i - \mu_j \\ \text{その他可換} \end{array} \right.$$

但し $[a, b] = ab - ba$.

第3式の右辺は $F(\alpha; \beta_4, \dots, \beta_{n-1}; \delta; x_4, \dots, x_n)$ に $(\mu_i - \mu_j)$ をかけるといふ作用素を表す. この作用素を H_{ij} と書くことにすると, H_{ij} と他の

作用素との交換関係は $[H_{ij}, C_{kl}] = (\delta_{ki} + \delta_{lj} - \delta_{kj} - \delta_{li}) C_{kl}$ である.

ここで次の形の $n \times n$ 行列全体の集合 $\mathcal{Q}$ を考える.

$$\mathcal{Q} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & m_{n-1,2} & \cdots & m_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \mid \sum_{i=2}^{n-1} m_{ii} = 0 \right\}$$

E_{ij} を行列単位とすると, $\mathcal{Q}$ の基底の $[a, b] = ab - ba$ に基づく交換関係は次の通りである.

$$\begin{cases} [E_{it}, E_{tj}] = E_{ij} & (t \neq i, j \text{ かつ } i \neq j) \\ [E_{i, i+t}, E_{i+t, i}] = E_{ii} - E_{i+t, i+t} \\ [E_{ii} - E_{i+t, i+t}, E_{kl}] = (\delta_{ki} + \delta_{l, i+t} - \delta_{k, i+t} - \delta_{li}) E_{kl} \\ \text{その他可換} \end{cases}$$

この交換関係から $\mathcal{Q}$ は $[a, b]$ に関して閉じており, リー環を構成していることがわかる. 又, $\mathcal{Q}$ の基底のうち, E_{im} はすべての元と可換, すなわち center である.

又, 特に集合 $I = \{E_{ii}, E_{im}, E_{im} \ (2 \leq i \leq n-1)\}$ を考えると.

これらの交換関係は

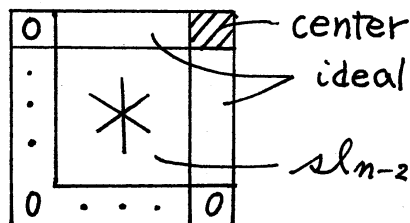
$$\begin{cases} [E_{1k}, E_{km}] = E_{1m} & (2 \leq k \leq n-1) \\ \text{その他可換} \end{cases}$$

である. $2(n-1)$ 個の生成元 $\{E_{ii}, E_{im}\}$ と上の関係式で生成される代数を $2(n-1)$ 個の生成元をもつ Heisenberg 代数と呼ぶ. $\mathcal{Q}$ の交換関係から I は $\mathcal{Q}$ のイデアルを構成していることがわかる.

$$\text{又, } e_i = E_{i+1, i+2}, f_i = E_{i+2, i+1}, h_i = H_{i+1, i+1} - H_{i+2, i+2} \quad (1 \leq i \leq n-2)$$

とおくとこれらは sl_{n-2} の関係式を満たす。

これらのことは視覚的に見ることもできる。



C_{ij} と E_{ij} を比べて $\hbar_i = \mu_i - \mu_{i+1}$ とおけば "contiguity relations" が $\mathcal{Q}$ の表現を構成していることがわかる。

3. (0.1) についての contiguity relations を計算した結果を述べる。

Theorem (0.1) に対する contiguity relations は次の通りである。

$$\left\{ \begin{array}{ll} [C_{1k}, C_{kn}]_g = 1 & (2 \leq k \leq n-1) \\ [C_{1k}, C_{kj}]_g = C_{ij} & \begin{array}{l} i < k < j \text{ かつ } (i, j) \neq (1, n) \\ \text{又は} \\ j < k < i \end{array} \\ [C_{ij}, C_{ji}] = g^{\mu_j} [\mu_i - \mu_j] \\ \text{その他 } [a, b] = ab - ba \text{ で可換} \end{array} \right.$$

但し $[a, b]_g = ab - gba$ 。

第3式の右辺は F に代入して $g^{\mu_j} [\mu_i - \mu_j]$ をかけるという作用素を表す。又、 $g^{H_{ij}} = g^{\mu_i - \mu_j}$ とすると $g^{H_{ij}}$ と C_{kl} との交換関係は $g^{H_{ij}} C_{kl} = g^{(\delta_{ki} + \delta_{l(i+1)} - \delta_{k(i+1)} - \delta_{li})} C_{kl} g^{H_{ij}}$ である。

集合 $I_g = \{C_{ii}, C_{in}, 1, 2 \leq i \leq n-1\}$ を考えるとこれらは次の関係式

を満たす.

$$\begin{cases} [C_{ii} C_{in}]_q = 1 & (2 \leq i \leq n) \\ \text{その他可換} \end{cases}$$

I_q は昇降演算子全体の非可換代数のイデアルであり, 1 は center である.

4. 参考文献

- [1] E. Horikawa, Contiguity relations for q -hypergeometric function and related quantum group, Proc. Japan Acad. Ser. A 68, (1992), 157-160.
- [2] M. Noumi, Quantum Grassmannians and q -hypergeometric series, CWI Quarterly 5 (1992), 293-307.
- [3] H. Kimura, Y. Haraoka, and K. Takano, The Generalized Confluent Hypergeometric Functions, Proc. Japan Acad. Ser. A 68 (1992) 280-295.
- [4] H. Kimura, Y. Haraoka, and K. Takano, On Confluences of the General Hypergeometric Systems, Proc. Japan Acad. Ser. A 69 (1993), 99-104.
- [5] Y. Haraoka and H. Kimura, Contiguity relations of Generalized Confluent Hypergeometric Systems, Proc. Japan Acad. Ser. A 69 (1993), 105-110.
- [6] H. Kimura, Y. Haraoka, and K. Takano, On Contiguity relations of the confluent Hypergeometric Systems, Proc. Japan Acad. Ser. A 70 (1994), 47-49.
- [7] F. H. Jackson, Basic Double Hypergeometric Functions (II), THE QUARTERLY JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol XV (1944), 49-.