

ω の高さをもつ closed 1-complex

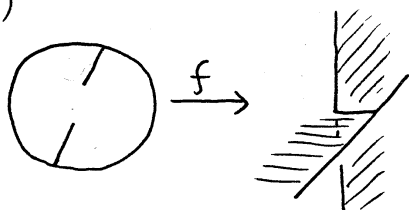
東 世 犬 小林一章 (Kazuaki Kobayashi)

ハンドル体の中の ω の高さをもつ closed 1-complex の性質を記述します.

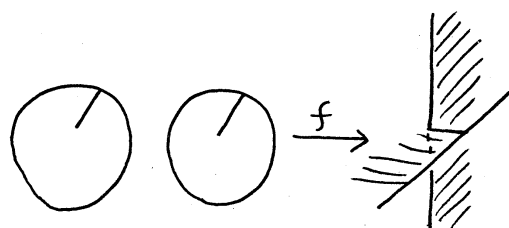
K をコンパクト, 向きづけ可能な 3 次元多様体 M^3 の中の closed 1-complex とする. K が M^3 で 0-contractible とは次の性質をもつ 2-complex L と PL-map $f: L \rightarrow M^3$ が存在する事である. 即ち ① L の 1-骨格 $L^{(1)}$ の部分複体 $\tilde{K}$ で K と単体的に同型となるものがある. ② $|L - \tilde{K}|$ は有限 2-球体の非交和 ③ L は 1 葉にカラプシブル ; $f(\tilde{K}) = K$ かつ $f|_{\tilde{K}}$ は埋め込みになっている. 更に f の特異点集合 $\overline{\{x \in L \mid \#f^{-1}(x) \geq 2\}}$ は次の 3 つのタイプのものから成るとしておく ([5] 参照)

I. Clasp singularities

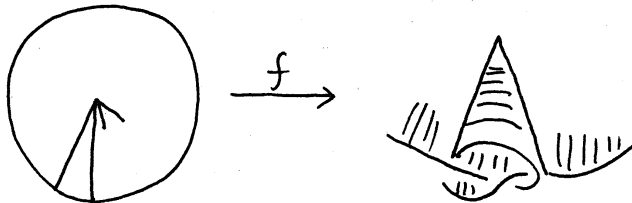
(a)



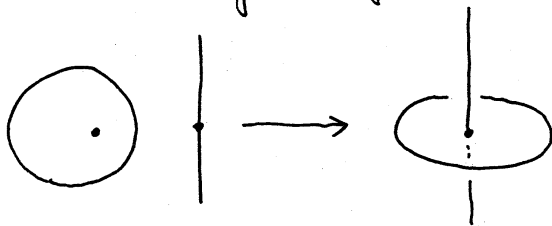
(b)



II. Branch point singularity



III Isolated singularity



V を種数, $g(V)$, が n のハンドル体とする。 $D_1^2, \dots, D_n^2$ を V にプロパーに埋め込まれた 2-球体としたとき $\{D_1^2, \dots, D_n^2\}$ が V の meridian ball system とは $\partial(V - \bigcup_{i=1}^n \text{int}(D_i^2))$ が 1 つの 3-球体となる時を言う。 meridian ball system に含まれる 2-球体を meridian ball という。

K をハンドル体 V に含まれている closed 1-complex とする。 K が V で geometrically essential とは V の任意の meridian ball が K と交わる時をいう。

K を向きづけ可能なコンパクト多様体 M^3 の中の closed 1-complex とし, V は K を含んでいるハンドル体とする。 V のスパインを $sp(V)$ とかく (ただし $sp(V)$ は常に closed 1-complex とし特に V が 3-球体の時は $sp(V)$ は 1 点とする。) 次の ①, ②, ③ の条件をみたすとき $sp(V) < K$ とかく。

① K は V のどんなスパインにもならない ② K は V で geometrically essential ③ V は K を含むハンドル体で①, ②を満たすもののうち種数が最小.

注. 定義より K が 1 葉なら $sp(V) < K$ となるハンドル体 V はない.

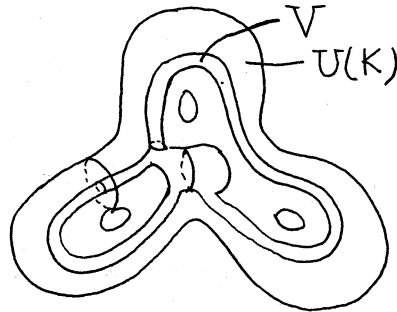
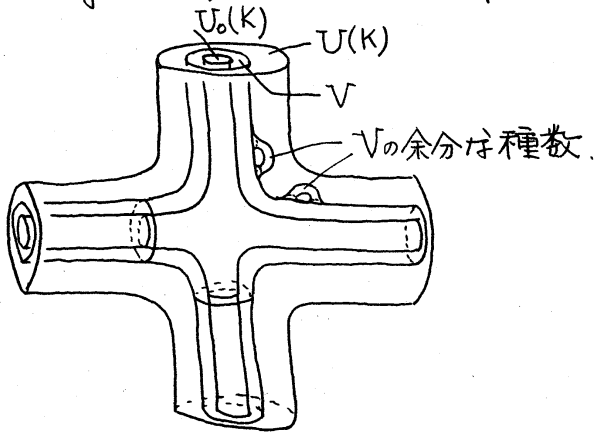
Lemma 1. K を向きづけ可能なコンパクト多様体 M^3 内の closed 1-complex とする. V が K を含む M^3 内のハンドル体で, $sp(V) < K$ なら $K \subset V \subset U(K)$ となる K の正則近傍 $U(K)$ は存在しない.

証. もし結論のような $U(K)$ が存在すると $K \subset U_0(K) \subset V \subset U(K)$ となるようなハンドル体の列が存在する. 今 $\tilde{K} = sp(V)$ とおくと $\tilde{K} < K$ だから K は $V = U(\tilde{K})$ で geometrically essential

もし $U(K)$ の meridian ball D^2 で $D^2 \cap V = \tilde{D}_1^2 \cup \dots \cup \tilde{D}_p^2$ ($p \geq 2$) ($\tilde{D}_i^2$ は V の meridian balls) とすると K は V で geom. essential だから $D^2 \cap U_0(K) = \tilde{D}_1^2 \cup \dots \cup \tilde{D}_q^2$ ($q \geq p$) ($\tilde{D}_i^2$ は $U_0(K)$ の meridian balls) これは D^2 が $U(K)$ の meridian ball で

$U(K) - U_0(K) \cong \partial U(K) \times I$ に矛盾. 従って $\{D_1^2, \dots, D_n^2\}$ を $U(K)$ の meridian ball system とすると全ての i について $D_i^2 \cap sp(V) = 1$ 葉 となる. そこで $U_0(K) \subset V \subset U(K)$ の位置関係は次頁の左図のようになり V に余分な genus があると K は V で geometrically essential でなくなる. また右図のように

$g(V) < g(U(K))$ となると $K \not\subset V$ となり, いずれも矛盾.



$\therefore \partial U_0(K) // \partial V // \partial U(K)$ となり $K = sp(V)$ in $U(K)$ となる。
これは $sp(V) = \tilde{K} < K$ の条件①に矛盾. 故に $K \subset V \subset U(K)$
となる正則近傍 $U(K)$ は存在しない。』

定義 V を 3次元多様体 M^3 内のハンドル体で K を V に含める closed 1-complex とする。 $sp(V) < K$ のとき $K_{n-1} = sp(V)$ とかく。 K_{n-1} を含むハンドル体 V_{n-1} で $sp(V_{n-1}) < K_{n-1}$ のとき $K_{n-2} = sp(V_{n-1})$ とかく。 以下同様に順次 K_i を作り K_i を含むハンドル体 V_i で $sp(V_i) < K_i$ のとき $K_{i-1} = sp(V_i)$ とおく。 このようにして $K \equiv K_n$ から $K_{n-1}, \dots, K_1, K_0$ を作ったとき

$K_0 < K_1 < \dots < K_{n-1} < K_n = K$ とかく。 従って $K_0 < \dots < K_n = K$ とかいたとき, あらかじめ $(n+1)$ 個の closed 1-complexes, $K_0, K_1, \dots, K_n$ が与えられているのではない。 K のみを与えられていて $K_{n-1}, \dots, K_1, K_0$ は $K_0 < K_1 < \dots < K_n = K$ となるように上の方法で作ったものとする。

Corollary 1. $K_0 < K_1 < \dots < K_n = K$ という列があると

$U(K_0) \supset U(K_1) \supset \dots \supset U(K_{n-1}) \supset U(K_n)$ をみたす正則近傍の列があり, それらについて $g(U(K_0)) \geq g(U(K_1)) \geq \dots \geq g(U(K_{n-1}))$ が成り立つ。

証). 前半の正則近傍の列の存在は $K_0 < K_1 < \dots < K_n = K$ の定義より明らか. 次に K_n は $U(K_{n-2})$ の中で geometrically essential である. 何故なら K_{n-1} は $U(K_{n-2})$ の中で geometrically essential だから $U(K_{n-2})$ の任意の meridian ball D^2 に対し $D^2 \cap U(K_{n-1}) = \tilde{D}_1^2 \cup \dots \cup \tilde{D}_p^2$ ($p \geq 1$) ($\tilde{D}_i^2$ は $U(K_{n-1})$ の meridian ball). また K_n は $U(K_{n-1})$ の中で geom. essential だから $K_n \cap \tilde{D}_i^2 \neq \emptyset$ for $1 \leq i \leq p$. $\therefore D^2 \cap K_n = \emptyset$ // 次にもし $K_n = \text{sp}(U(K_{n-2}))$ in $U(K_{n-2})$ なら $K_n \subset U(K_{n-1}) \subset U(K_{n-2})$ で $U(K_{n-2})$ は K_n のある正則近傍になっている。即ち $U(K_{n-2}) = \tilde{U}(K_n) \therefore K_n \subset U(K_{n-1}) \subset \tilde{U}(K_n)$ これは Lemma 1 に矛盾. $\therefore K_n \neq \text{sp}(U(K_{n-2}))$. 以上より K_{n-2} は $K_{n-2} < K_n$ となるための条件①, ② を満足している。そこでもし $g(U(K_{n-2})) < g(U(K_{n-1}))$ となると K_{n-1} は $K_{n-1} < K_n$ となるための③の条件を満足していない事になり矛盾。

$\therefore g(U(K_{n-2})) \geq g(U(K_{n-1}))$. 以下同様. $\square$

注). $g(U(K_n))$ の最小性はないので $g(U(K_n)) > g(U(K_{n-1}))$ という事はあり得る。

Corollary 2. M^3 内で $K_0 < K_1 < \dots < K_n = K$ で $U(K_0) \supset U(K_1) \supset \dots \supset U(K_n)$ としたとき $0 \leq k < j \leq n$ なる任意の k, j に対し $\partial U(K_k) // \partial U(K_j)$

証). $j = k+1$ のときは $K_k < K_{k+1}$ の条件①より $\partial U(K_k) \neq \partial U(K_{k+1})$.
 $j \geq k+2$ のとき $\partial U(K_k) \parallel \partial U(K_j)$ とすると $U(K_k) - \tilde{U}(K_j) \cong \partial U(K_k) \times I$
 I 即ち $U(K_k) = \tilde{U}(K_j)$ 故に $K_j \subset U(K_{j-1}) \subset U(K_k) = \tilde{U}(K_j)$
 これは Lemma 1 に矛盾. $\therefore \partial U(K_k) \neq \partial U(K_j)$ 』

3次元多様体 M^3 に含まれる closed 1-complex K に対し

$K_0 < K_1 < \dots < K_n = K$ という列が存在し

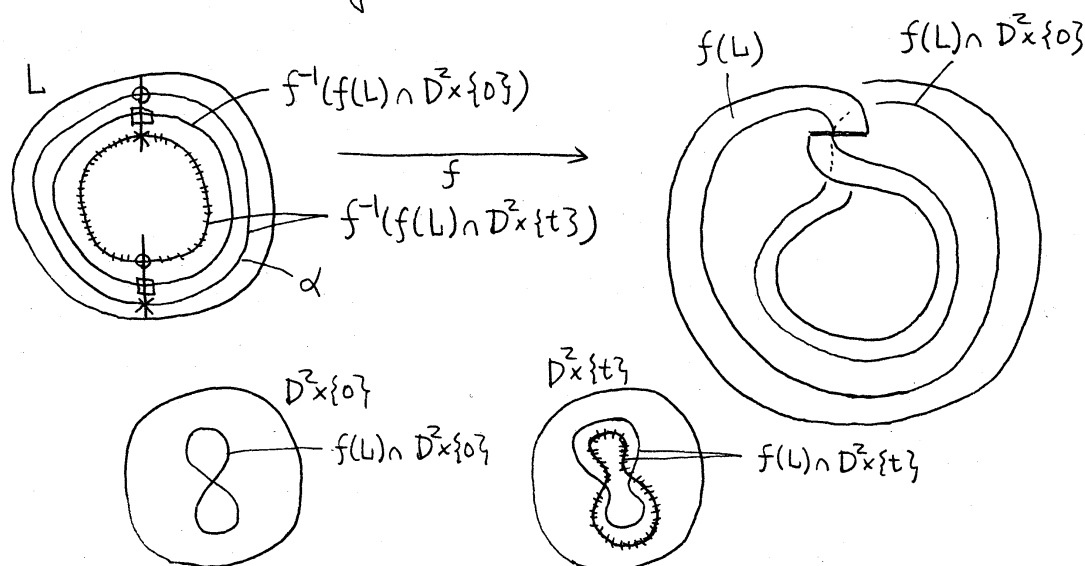
$\max\{n \mid n \text{ は上のような列の長さ}\} = m$ のとき K は M^3 で m の高さをもつ という。任意の自然数 m に対し K が M^3 で m の長さの列をもつとき, K は M^3 で ∞ の高さをもつ という。
 K から長さ有限の列 $\tilde{K} = K_0 < K_1 < \dots < K_n = K$ で到達する任意の $\tilde{K}$ が ∞ の高さをもつとき K は M^3 で ω の高さをもつ という。

Lemma 2 M^3 内に含まれる closed 1-complex K が M^3 で 0-contractible なら K を含む M^3 内のハンドル体 V で, K がその中で geom. essential かつ $K \neq \text{sp}(V)$ となるものがある。

証). K が 0-contractible だから, その定義より 2-complex L と PL-写像 $f: L \rightarrow M^3$ が存在する。 f の特異点集合は cusp singularity, branch point singularity, isolated singularity の3つの型であると仮定して良い。従って $f(L)$ は closed 1-complex をスパインにもち, よって $U(f(L))$ はハンドル体である。そこで K が $U(f(L))$ で geom. essential なら $f_1 = f$ とおく。 K が

$U(f(L))$ で geom. inessential なら $U(f(L))$ の meridian 2-ball D^2 で

$D^2 \cap K = \emptyset$ とするものがある。従って D^2 と f の isolated singularity の像は交わらない。また branch point singularity の 1 つの成分 C の像 $f(C)$ の正則近傍は 3-球体だから M^3 の ambient isotopy で $f(C) \cap D^2 = \emptyset$ と出来る。そこで以下 clasp singularity のみを考える。 $f(L^{(0)}) \cap D^2 = \emptyset$ としてよい。従って $f^{-1}(f(L) \cap D^2)$ の各成分は 単純閉曲線。更に meridian ball D^2 の collar を $D^2 \times [-1, 1]$ とし α を $f^{-1}(f(L) \cap D^2 \times \{t\})$ の 1 つの成分 (= 単純閉曲線) としたとき $f|_{\alpha} = \text{embedding}$ とする $t \in [-1, 1]$ が存在する。



$|L - \tilde{K}|$ は $|H|$ 2-球体の非交和だから 1 つの $|H|$ 2-球体 D_0^2 上で $f^{-1}(f(L) \cap D^2 \times \{t\})$ の outermost component α を取るとそれは D_0^2 上で 2-ball D_α^2 を張っている。また $f|_{\alpha}$ は埋め込みだから $f(\alpha)$ は $D^2 \times \{t\}$ 上で 2-球体 $\tilde{D}_\alpha^2$ を張っている。そこで写像 f を $\tilde{f}(D_\alpha^2) = \tilde{D}_\alpha^2$ とするよう変える。これによって $\tilde{f}(D_0^2) \cap D^2 \times \{t\}$

$= \emptyset$ となる。このように f を $\tilde{f}_1$ に変えて $\tilde{f}_1(L) \cap D^2 \times \{t\} = \emptyset$ と出来る。そして $\tilde{f}_1$ の特異点集合の型を再び piping technique を使って I, II, III のみにする。それを f_1 とすると f_1 は I, II, III のみの特異点集合をもち $f_1(L) \cap D^2 = \emptyset$. $U(f(L)) - \dot{U}(D^2)$ を V_0 とおく, K が V_0 で geom. essential なら $V = V_0$ とおく. またもし K が V_0 で inessential なら V_0 の meridian ball D^2 で $K \cap D^2 = \emptyset$ なるものがある。 $f_1(L) \cap D^2 \neq \emptyset$ なら上の方法と全く同じにして写像 f_1 を変えて f_2 とし $f_2(L) \cap D^2 = \emptyset$ と出来る。以下同様にして K を含むハンドル体 V と K が V で 0-contractible を表わす 2-complex L と写像 $f_L: L \rightarrow V$ が存在し, K は V で geom. essential (V が 3-ball となることもある). 従って K は V で 0-contractible, 一方 $sp(V)$ は V で 0-contractible ではない. $\therefore K \neq sp(V)$ in V . $\square$

Proposition 2. M^3 内の 0-contractible は任意の closed 1-complex K に対し, K を含む handlebody V で $sp(V) < K$ となるものがある。

証). Lemma 2 より K が 0-contractible なら K を含むハンドル体 V' で K が V' で geom. essential かつ $K \neq sp(V')$ となるものがある。そこでこれらの V' のうちで種数が最小のものを V とすればよい. $\square$

系. 単連結な 3 次元多様体 M^3 内の任意の closed 1-complex は ω の高さをもつ。

Lemma 3. V を種数 n のハンドル体とし, K を V 内の closed 1-complex とする。 $K_0 < K_1 < \dots < K_m = K$ in V という列があると次の性質をもつ V の meridian ball system $\{D_1^2, \dots, D_n^2\}$ がある。
 即ち $\bigcup_{i=1}^R D_i^2 \cap K_0 = \emptyset$ ($R \leq n$) かつ $V_0 \equiv V - \bigcup_{i=1}^R U(D_i^2)$ で K_0 が geom. essential として (a) $g(V_0) \geq g(U(K_0))$ または (b) $K_0 = sp(V_0)$. (ただし K_0 が V で geom. essential のときは $R=0$ で V_0 は全て V と理解する)。

証. $K_0 = sp(V_0)$ は結論の (b) の場合が起こる。そこで $K_0 \neq sp(V_0)$ とする。 K_0 が V_0 で geom. essential は条件より従う。そこで $sp(V_0)$ は $sp(V_0) < K_0$ の条件の ①, ② をみたす。従って条件 ③ 及び Lemma 1 の Cor. 1 より $g(V_0) \geq g(U(K_0))$. 即ち (a) が起る。

系. V を handlebody とし, K を V に含まれてゐる closed 1-complex とする。 $K_0 < K_1 < \dots < K_m = K$ in V という列があると $g(V) \geq g(U(K_0)) \geq \dots \geq g(U(K_{m-1}))$ が成り立つ。

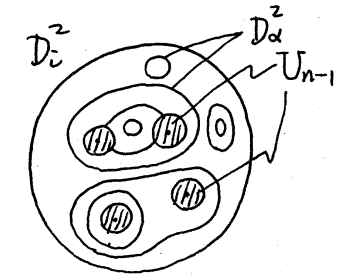
Theorem 1. V を種数 2 以下のハンドル体とし, K を V に含まれる closed 1-complex とする。 $K_0 < K_1 < \dots < K_n = K$ という列が存在したとすると (a) $i_{R*}: \pi_1(\partial U(K_R)) \longrightarrow \pi_1(V - U(K_{n-1}))$ が

$0 \leq k \leq n-1$ なる k に対し単射であるか, または (b) ある k に対し $U(K_k) \subset B^3 \subset V$ となる 3-ball B^3 がある. ($0 \leq k \leq n$).

証). $k=n-1$ のとき (即ち $i_{n-1*}: \pi_1(\partial U_{n-1}) \rightarrow \pi_1(V - \mathring{U}_{n-1})$ のとき (ただし $U_{n-1} = U(K_{n-1})$). もし $\ker i_{n-1*} \neq (e)$ なら Loop Th. より, 次の条件を満たす単純閉曲線 α が ∂U_{n-1} 上に存在する. $\alpha \neq 0$ on ∂U_{n-1} かつ α は $V - \mathring{U}(K_{n-1})$ で特異点のない 2-ball D_α^2 を張る. 先ず $\alpha \sim 0$ on ∂U_{n-1} (null-homologous) で U_{n-1} で特異点のない 2-ball $\tilde{D}_\alpha^2$ を張るとき, $\Sigma^2 \equiv D_\alpha^2 \cup_\alpha \tilde{D}_\alpha^2$ とおくと $\Sigma^2 \cong S^2$ で $\Sigma^2 \subset V$. V はハンドル体だから Σ^2 は V で 3-ball B_α^3 を張る. $W \equiv U_{n-1} \cup B_\alpha^3$ はハンドル体で $\alpha \neq 0$ on ∂U_{n-1} だから $g(W) < g(U_{n-1})$. すると $K_n \cup K_{n-1} \subset W$. 従って $g(U_{n-1}) = 1$ なら $g(W) = 0$ i.e. $W \cong B^3$. 結論の (b) が起る. $g(V) \leq 2$ と Lemma 3 の系より $g(U_{n-1}) = 2$ 即ち W は solid torus と思ってよい. もし K_n が W で geom. inessential なら W の meridian ball D^2 で $D^2 \cap K_n = \emptyset$ となるものがある. $K_n \subset W - \mathring{U}(D^2) \cong B^3$ これは結論の (b) が起る. すると K_n は W で geom. essential とする. またもし $sp(W) = K_n$ in W なら W は K_n のある正則近傍 $\tilde{U}(K_n)$ となる. よって $K_n \subset U(K_{n-1}) \subset \tilde{U}(K_n) = W$ となり $K_{n-1} < K_n$ と Lemma 1 に矛盾. 従って $sp(W) \neq K_n$ in W . 故に $g(W) < g(U_{n-1})$ より $K_{n-1} < K_n$ となる事に矛盾. 次に $\alpha \neq 0$ on ∂U_{n-1} で α が U_{n-1} で特異点のない 2-ball $\tilde{D}_\alpha^2$ を張るとき, $\Sigma^2 = D_\alpha^2 \cup_\alpha \tilde{D}_\alpha^2$ とおくと $\Sigma^2 \cong S^2$ として $\alpha \neq 0$ on

∂U_{n-1} から U_{n-1} に含まれる単純閉曲線 β で U_{n-1} で null-homologous
 でなく, $\beta \cap \hat{D}_\alpha^2 = 1$ 点となるものがある. 従って $\beta \cap \Sigma^2 = 1$ 点
 これは $\pi_2(V) = 0$ となって矛盾. 従ってこの場合も起らない.

従って α は U_{n-1} で特異点のない 2-ball を張る事はない. 次に
 $\{D_1^2, D_2^2\}$ を V の meridian ball system とする ($q(V) = 1$ のときは
 $\{D_1^2\}$). K_{n-1} と $\bigcup_{i=1}^2 D_i^2$ とを transverse に交わるようにし且つ
 $K^{(0)} \cap \bigcup_{i=1}^2 D_i^2 = \emptyset$ となるようにする事により $\bigcup_{i=1}^2 D_i^2 \cap U_{n-1}$ は U_{n-1}
 の meridian balls, また $\bigcup_{i=1}^2 D_i^2 \cap D_\alpha^2 = \{\text{simple arcs}\} \cup \{\text{simple closed}$



curves}. このうちで内部に U_{n-1} との交
 わりを含まない simple closed curves を

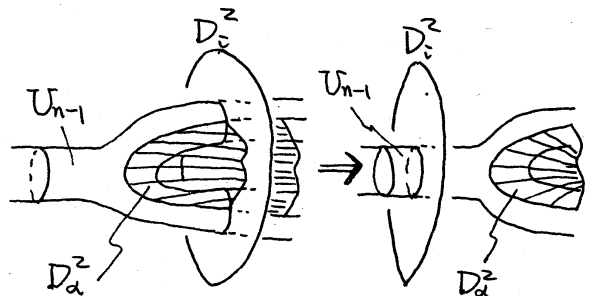
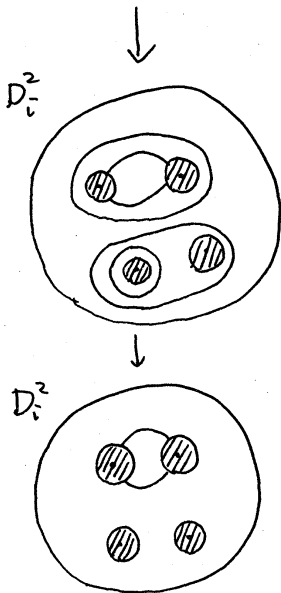
cut & glue で取り除く. 次に (D_i^2 上でみ

て) U_{n-1} との交わりを含む simple closed curve

のうちで最も内側から考えてこのような

simple closed curves は存在しない事がわか

る. 従って $D_\alpha^2 \cap \bigcup_{i=1}^2 D_i^2 = \{\text{simple arcs}\}$ となる.



D_α^2 上でみて最も外側のものから, それが張っている 2-ball
 を利用して D_i^2 を isotopy で動かして $D_i^2 \cap D_\alpha^2$ を取り除く. た

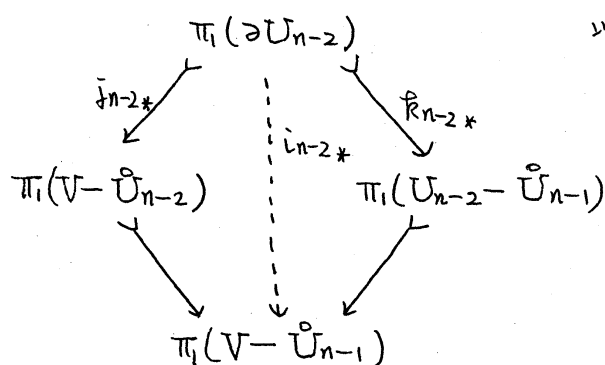
だし取り除いた結果 $D_i^2 \cap U_{n-1}$ が 2-balls でこれらの境界である circles が全て ∂U_{n-1} 上で null-homotopic でないようにしておく. 以上より $\bigcup_{i=1}^2 D_i^2 \cap U_{n-1}$ は 2-balls でその境界である circles は ∂U_{n-1} で null-homotopic でなく, $\bigcup_{i=1}^2 D_i^2 \cap D_\alpha^2 = \emptyset$ そこで U_{n-1} が D_1^2, D_2^2 で cut された後の $\alpha = \partial D_\alpha^2$ を含む成分を U_α とすると U_α は 3-ball $V_0 \equiv V - \dot{U}(D_1^2 \cup D_2^2)$ に埋め込まれた solid torus. $D_\alpha^2 \subset V_0 - \dot{U}_0$, $\therefore \partial U_0 = U_{n-1} - \dot{U}(D_1^2 \cup D_2^2)$. $\partial(U_\alpha \cup U(D_\alpha^2)) \cong S^2$

$\therefore U_\alpha \cup U(D_\alpha^2) \cong B^3$. $\therefore W \equiv U_{n-1} \cup U(D_\alpha^2)$ は種数 1 のハンドル体. ($\alpha \neq 0$ on ∂U_α . ①もし $\alpha \sim 0$ on ∂U_α なら U_α は solid torus だから α は U_α で 2-ball $\hat{D}_\alpha^2$ を張る事になり, 従って α は U_{n-1} で 2-ball を張る事になり, これは最初の段階で示した事に矛盾). $K_{n-1} \subset W$. また K_n は W で geom. essential としてよい. 何故ならもし K_n が W で inessential なら W の meridian 2-ball D^2 で $K_n \subset W - D^2$ となるものがあり $W - D^2 \cong B^3$ より (b) が起るから. またもし $K_n = sp(W)$ なら $K_n \subset U(K_{n-1}) \subset W = \tilde{U}(K_n)$ となり $K_{n-1} < K_n$ と Lemma 1 に矛盾. $\therefore K_n \neq sp(W)$. そして $g(W) < g(U_{n-1})$. これは K_{n-1} が $K_{n-1} < K_n$ の条件 ③ を満足していない事に矛盾.

$$\therefore \text{ker } i_{n-1*} = \{e\}$$

次に $\pi_1(\partial U_{n-2}) \xrightarrow{i_{n-2*}} \pi_1(V - \dot{U}_{n-1})$ を考える. 上と全く同様にして $\pi_1(\partial U_{n-2}) \xrightarrow{j_{n-2*}} \pi_1(V - \dot{U}_{n-2})$ は単射であるか U_{n-2} を含む 3-ball B^3 が存在する. 後者の場合は (b) が起る事になる. $\therefore$

で j_{n-2*} が単射であると仮定する。 $k_{n-2*}: \pi_1(\partial U_{n-2}) \longrightarrow \pi_1(U_{n-2} - \mathring{U}_{n-1})$ が単射である事を示す。もし $\ker k_{n-2*} \neq (e)$ なら loop Th. より ∂U_{n-2} 上に次の性質をもつ単純閉曲線 α が存在する。即ち $\alpha \neq 0$ on ∂U_{n-2} 且 α は $U_{n-2} - \mathring{U}_{n-1}$ で特異点をもたない 2-ball D_α^2 を張る。もし $\alpha \neq 0$ on ∂U_{n-2} なら K_{n-1} は U_{n-2} で geom. inessential となり $K_{n-2} < K_{n-1}$ の条件 ② に反する。また $\alpha \sim 0$ on ∂U_{n-2} なら D_α^2 で U_{n-2} を cut すると U_{n-2} は 2 つのハンドル体 W_1, W_2 に分かれ $g(W_i) = 1$ かつ $K_{n-1} \subset W_1$ または $K_{n-1} \subset W_2$ ($g(V) = 1$ のときは $\alpha \sim 0$ on $\partial U(K_{n-2}) \Leftrightarrow \alpha \sim 0$ on $\partial U(K_{n-2})$ だからこの場合は起らない)。これは $g(U_{n-2})$ の最小性に矛盾。(またはこの場合も K_{n-1} は U_{n-2} で geom. inessential となり矛盾)。故に $k_{n-2*} =$ 単射である。従って次の diagram と van Kampen の定理より $i_{n-2*}: \pi_1(\partial U_{n-2}) \longrightarrow \pi_1(V - \mathring{U}_{n-1})$ は単射となる。



系 V を種数 2 以下のハンドル体とする。 K が V に含まれる closed 1-complex で ω の高さをもつなら K は V 内の 3-ball に含まれる。

証). K は w の高さをもつので $\tilde{K} < K$ となる任意の $\tilde{K}$ が ∞ の高さをもつ。今 $\tilde{K}$ を 1 つ固定すると $V - \dot{U}(\tilde{K})$ は irreducible だから Haken number $h(V - \dot{U}(\tilde{K})) < \infty$ がきまる。即ち $V - \dot{U}(\tilde{K})$ に含まれる disjoint, non-parallel incompressible surfaces の最大個数が $h(V - \dot{U}(\tilde{K}))$ (これは有限 [H. Th. 13.2])。 K は w の高さをもつから $h(V - \dot{U}(\tilde{K}))$ より大きな自然数 m に對し K は $K_0 < K_1 < \dots < K_m = \tilde{K} < K_{m+1} = K$ なる列をもつ。定理 1 より

$\pi_1(\partial U_k) \longrightarrow \pi_1(V - \dot{U}(\tilde{K}))$ ($0 \leq k \leq m$) が単射となるか、 U_k が 3-ball に含まれる。もし前者が起ると Lemma 1 の Cor. 2 から $\partial U(K_k) \not\subset \partial U(K_i)$ だから Haken number の定義に矛盾。故に U_k が 3-ball B^3 に含まれる。 $\exists U(K_0) \supset \exists U(K_1) \supset \dots \supset U(K_m)$ だから $U_k \subset B^3$ なら $K = K_m \subset B^3$ 』

参 考 文 献

[H] J. Hempel : 3-manifolds, Ann. Math. Study 86.

[S] N. Smythe : Handlebodies in 3-manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. 26 (1970) 534-538.