

ハウスドルフ次元とエントロピー

静岡大教養部 馬場 良和 (Yoshikazu Baba)

Billingsley [1] 以来, ハウスドルフ次元とエントロピーの関係が注意されているが, 本稿では, あるクラスの確率過程の ε -エントロピーと path のハウスドルフ次元について述べる。§1 では, 有限集合のエントロピーと無限集合の場合の ε -エントロピーについて, §2 では, 確率変数のエントロピーと ε -エントロピーについて述べる。§3 では, とくに, 1次元安定過程の ε -エントロピーと, その path のハウスドルフ次元について知られている結果を述べる。§4 では, 若干の関連事項について述べる。

§1. 集合のエントロピーと ε -エントロピー

E を有限集合としたとき, E のエントロピー $H(E)$ は,

$$H(E) = \log_2 N(E)$$

で定義される。ただし, $N(E)$ は E の濃度である。これは, E の元全体を同じ長さの 2 進数で符号化するのに要する符号の長さである。

E が無限集合の場合には, $H(E) = \infty$ となってしまうので, エントロピー無限大の集合のクラス分けを行いたい。 E を距離空間 X の全有界な部分集合, $\varepsilon > 0$ とする。 $N_\varepsilon(E)$ を E の, 直径 2ε 未満の集合による, covering の最小個数とするとき, E の ε -エントロピー $H_\varepsilon(E)$ は,

$$H_\varepsilon(E) = \log_2 N_\varepsilon(E)$$

で定義される。 $N_\varepsilon(E)$ は, E の要素を精度 ε 以内で区別するのに要する, E の最小有限部分集合の濃度である。 $\varepsilon \downarrow 0$ のとき, 一般に, $H_\varepsilon(E) \uparrow \infty$ であるが, この無限大への発散の order で集合 E を特徴づけようというのが, Kolmogorov [6] の idea であった。

典型的な発散の order としては, 次の 3 つがある。

(I) E が $\mathbb{R}^d$ の内点をもつ集合のとき

$$H_\varepsilon(E) = d \log_2 \frac{1}{\varepsilon} + o\left(\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

(II) E が解析関数のあるクラスのとき

$$H_\varepsilon(E) \asymp \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^2$$

(III) E が n -変数, C^p -級, p 次導関数 ($0 \leq p < \infty$) が α 次

Hölder 連続性をもつ関数のあるクラスのとき

$$H_\varepsilon(E) \asymp (1/\varepsilon)^{\frac{n}{p+\alpha}}$$

($\asymp$ は発散の order が同じであることを表わす)

(1) は $\log \frac{1}{\varepsilon}$, (2) は $(\log \frac{1}{\varepsilon})^\alpha$ ($\alpha > 1$), (3) は $(\frac{1}{\varepsilon})^q$ ($q > 0$) という無限大への発散の order をもつ。なお, 次の極限が存在するとき, それぞれを, E の metric dimension, functional dimension, metric order という。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{H_\varepsilon(E)}{\log \frac{1}{\varepsilon}} (\equiv dm(E)), \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log H_\varepsilon(E)}{\log \log \frac{1}{\varepsilon}} (\equiv df(E)), \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log H_\varepsilon(E)}{\log \frac{1}{\varepsilon}} (\equiv q(E))$$

(1), (2), (3) の場合には, それぞれ, $dm(E) = d$, $df(E) = 2$, $q(E) = \frac{n}{p+\alpha}$ となっている。

§2. 確率変数のエントロピーと ε -エントロピー

$X = X(\omega)$ が有限個の値しかとらない確率変数のとき, X のエントロピー $H(X)$ は,

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$$

で定義される。ここで, $p_i \equiv P(X(\omega) = x_i) \geq 0$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ である。このとき, $0 \leq H(X) \leq \log_2 n$ であり, $H(X) = \log_2 n$ となるのは, $p_i = \frac{1}{n}$ ($1 \leq i \leq n$) の場合だけである。このとき, $H(X)$ は §1 の場合のエントロピーに帰着する。

$Y = Y(\omega)$ を, 他の有限個の値をとる確率変数とすると

き, X に含まれる Y の情報量 $I(X, Y)$ を,

$$I(X, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} \log_2 \frac{p_{ij}}{p_i q_j}$$

で定義する。ただし, $p_{ij} = P(X(\omega) = x_i, Y(\omega) = y_j)$, $q_j = P(Y(\omega) = y_j)$ である。このとき, $I(X, X) = H(X)$, $I(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X$ と Y は独立 となっている。

次に, 無限個の値をとる確率変数のエントロピーを考える。 $X = X(\omega)$, $Y = Y(\omega)$ を距離空間 R の値をとる確率変数としたとき, X に含まれる Y の情報量 $I(X, Y)$ を, 上を一般化した形で,

$$I(X, Y) = \int \int_{R \times R} P_{XY}(dx, dy) \log \frac{P_{XY}(dx, dy)}{P_X(dx) P_Y(dy)}$$

で定義する。 P_X, P_Y, P_{XY} は, それぞれ, $X, Y, (X, Y)$ の確率分布である。これを用いて, 距離空間 R の値をとる確率変数 X の ε -エントロピーを,

$$H_\varepsilon(X) = H_\varepsilon^{(p)}(X) = \inf_{Y \in W_\varepsilon} I(X, Y), \quad W_\varepsilon = \left\{ Y; \int_{\Omega} p(X, Y) dP \leq \varepsilon \right\}$$

で定義する。ここで, p は R の metric とする。また, W_ε として, $\bar{W}_\varepsilon = \left\{ Y; \int_{\Omega} p(X, Y)^2 dP \leq \varepsilon^2 \right\}$ を用いることもある。このときの ε -エントロピーを $\bar{H}_\varepsilon(X)$ と書くことにすると, Schwarz の不等式により, $H_\varepsilon(X) \leq \bar{H}_\varepsilon(X)$ となる。なお,

$R = L^1[0, T]$ のときの $H_\varepsilon(X)$ を $H_\varepsilon^{(1)}(X)$, $R = L^2[0, T]$ のときの $\bar{H}_\varepsilon(X)$ を $H_\varepsilon^{(2)}(X)$ と書くことにする。

一般に, $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} H_\varepsilon(X) = \infty$ であるが, §1 の発散の order に対応して,

(I) X が $\mathbb{R}^d$ 値確率変数, Poisson 過程, 複合 Poisson 過程など

$$\text{のとき, } H_\varepsilon(X) \asymp \log \frac{1}{\varepsilon}$$

(II) X が Gaussian Fourier 級数のあるクラスの時

$$H_\varepsilon(X) \asymp \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^2$$

(III) X が Brown 運動, 安定過程などのとき

$$H_\varepsilon(X) \asymp \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (\alpha > 0)$$

となっている。

§3. 安定過程の場合

確率過程 $X = \{X_t(\omega); 0 \leq t < \infty\}$ が時間的に一様な加法過程であるとは, i) $X_0(\omega) \equiv 0$, ii) 任意の $n \geq 3$ と任意の $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$ にたいして, $X_{t_i}(\omega) - X_{t_{i-1}}(\omega)$ ($1 \leq i \leq n$) が独立で, それらの確率法則が差 $t_i - t_{i-1}$ にしか依存しない。場合という。これは, 独立な, 同分布に従う確率変数列の和の連続化である。以下は, 典型的な例で, 安定過程は, それらの一般化である。また, これらの例について,

$H_\varepsilon(X)$ と path のハウスドルフ次元についての知られている結果を述べる。

例 1. Poisson 過程 $P_t(\omega)$ 。これは, ω をとめて, $P_t(\omega)$ を t の関数とみたとき — それを path という — 確率 1 で, path は jump 1 で増加する階段関数になっていて, $P_t(\omega) - P_\Delta(\omega)$ ($t > \Delta \geq 0$) の分布がパラメータ $\lambda(t-\Delta)$ の Poisson 分布になっているものである: $P(P_t(\omega) - P_\Delta(\omega) = k) = \lambda^k(t-\Delta)^k / k! \cdot e^{-\lambda(t-\Delta)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)。このとき, $H_\varepsilon^{(1)}(P) = \log \frac{1}{\varepsilon}$ (Kaz [4])。また, 集合 $\{P_t(\cdot); 0 \leq t < \infty\}$ は可算集合だから, そのハウスドルフ次元は 0 であり, グラフ $\{(t, P_t(\cdot)); 0 \leq t < \infty\}$ のハウスドルフ次元は 1 である。

例 2. 複合 Poisson 過程 $C_t(\omega)$ 。 $\{\xi_n(\omega)\}_{n \geq 1}$ を独立・同分布の確率変数列, $P_t(\omega)$ をそれと独立な Poisson 過程とすると, $C_t(\omega) = \xi_1(\omega) + \dots + \xi_{P_t(\omega)}(\omega)$ を複合 Poisson 過程という。ただし, $P_t(\omega) = 0$ のときには, $C_t(\omega) = 0$ とする。 $C_t(\omega)$ は, $P_t(\omega)$ が jump する時点で $\xi_n(\omega)$ の確率分布 dF に従って, 上下に jump する path をもつものである。 ε -エントロピー, path のハウスドルフ次元については, Poisson 過程の場合と同様である。

例 3. 1次元 Brown 運動 $B_t(\omega)$ 。path が確率 1 で連続で, $B_t(\omega) - B_\Delta(\omega)$ ($t > \Delta \geq 0$) が平均 0, 分散

$t-\delta$ の正規分布: $P(B_t(\omega) - B_\delta(\omega) \in E) = \int_E \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-\delta)}} \exp(-\frac{x^2}{2(t-\delta)}) dx$
 に従うものを Brown 運動という。これは, Brown 粒子の運動
 の一つの理想化である。P. Lévy [7] は $B_t(\omega)$ の path の一様連
 続性について, $|B_t(\omega) - B_\delta(\omega)| \leq \text{Const.} \times \sqrt{2|t-\delta| \log \frac{1}{|t-\delta|}}$, $|t-\delta| < \delta$
 $= \delta(\omega)$ のとき, を示した。これは, $B_t(\omega)$ の path が局所的に
 は, ほぼ $\frac{1}{2}$ -Hölder 連続性をもつことを示すが, Kolmogorov [5]
 は, $H_E^{(2)}(B_t(\cdot)) \asymp 1/\varepsilon^2$ を示した。これは, §1 の(Ⅲ)で
 $n/(p+\alpha) = 1/(0+\frac{1}{2}) = 2$ となっていることに相当する。ま
 た, $B_t(\omega)$ の path のハウスドルフ次元については, 確率1で
 $\dim(\{B_t(\cdot); 0 \leq t < \infty\}) = 1$, $\dim(\{(t, B_t(\cdot)); 0 \leq t \leq 1\}) = \frac{3}{2}$
 となる (Taylor [10])。これらについては, 多次元への拡張
 がいろいろ得られている。

加法過程には, path の jump の仕方を規定する測度 $n(du)$
 が対応している。Poisson 過程の場合には, jump 1 のみで増加
 することに対応して, $n(du) = \delta_{1,1}$, 複合 Poisson 過程の場合に
 は, $\sum_n(\omega)$ の確率分布 $F(du)$ の定数倍である。安定過程は,
 $n(du) = C_+ \frac{du}{|u|^{1+\alpha}} (u > 0)$, $= C_- \frac{du}{|u|^{1+\alpha}} (u < 0)$ に対応するもの
 で, $0 \leq \alpha \leq 2$ である。 $\alpha = 2$ の場合が Brown 運動で, path
 は連続, $0 < \alpha < 2$ のときには, path は複雑に jump する。
 安定過程の path のハウスドルフ次元については, 確率1で次の
 結果がなり立つが, これらについても多次元安定過程への

拡張が得られている。

$0 < \alpha < 1$ のとき, $\dim(\{X_t(\cdot); 0 \leq t \leq 1\}) = \alpha$ (McKean [9])

$\dim(\{(t, X_t(\cdot)); t \geq 0\}) = 1$ (Blumenthal-Gettoor [2])

$1 \leq \alpha \leq 2$ のとき, $\dim(\{X_t(\cdot); 0 \leq t \leq 1\}) = 1$ (McKean [9])

$\dim(\{(t, X_t(\cdot)); t \geq 0\}) = 2 - 1/\alpha$ (B.-G. [2])

安定過程の ε -エントロピーについては, $1 < \alpha \leq 2$ のときの, Kaz: [4] の結果: $H_\varepsilon^{(1)}(X) \asymp 1/\varepsilon^\alpha$ があるのみである。

§ 4. Remarks

Remark 1. $\{x\}$ を実数 x から, 最も近い整数までの距離, $r \geq 2$ を偶数とすると, $F_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \{r^n x\} / r^n$ は, 連続かつ到るところ微分不可能な関数である。 $F_2(x)$ は, 高木貞治が発見し (1903), その 4 半世紀後に van der Waerden が $F_{10}(x)$ を再発見した (1928)。 $M_r = \max_{0 \leq x \leq 1} F_r(x)$, $E_r = \{0 \leq x \leq 1; F_r(x) = M_r\}$ とおく。 E_2 の構造について, 最近 Б. Мартынов [8] が解説を書いているが, 一般に, E_r のハウスドルフ次元については, $\dim E_r = 1/2$ ($\forall r \geq 2$, 偶数) がなりたつことがわかる。このことは, Brown 運動の path が確率 1 で微分不可能かつ, $B_t(\cdot)$ の零点のハウスドルフ次元 $= 1/2$, という事実に対応

するものである。

Remark 2. あるクラスの Gaussian Fourier 級数の ε -エントロピーと path の regularity。

Gaussian Fourier 級数とは, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (X_n \cos nt + Y_n \sin nt)$, $a_n \geq 0$; $\{X_n, Y_n; n \geq 0\}$ は平均 0, 分散 1 の正規分布に従う独立確率変数列 となっているものをいう。 $\sum a_n^2 < \infty$ のとき, これは, $\forall t$ について, $L^2(\Omega)$ で収束し, 確率過程 $X_t(\omega)$ を表わす。次の 3 つの $\{a_n\}_n$ について, 対応する $X_t(\omega)$ の ε -エントロピー, path の regularity を考察する。後者については, $\Delta_j = (2 \cdot \sum_{2^j \leq n < 2^{j+1}} a_n^2)^{1/2}$ の $j \rightarrow \infty$ での挙動, とくに, $\sigma \equiv \lim_{j \rightarrow \infty} -\log \Delta_j / j \log 2$ が関係する (Kahane [3])。ここで, $\log$ は自然対数とする。

(1) $a_n = 1/n^{\alpha+1/2}$ ($\alpha > 0$) のとき, $H_\varepsilon^{(2)}(X) \asymp 1/\varepsilon^{1/4}$, $\sigma = \alpha$ となる。そして, $\alpha = n + \alpha_0$ ($0 \leq n \leq \infty, 0 < \alpha_0 < 1$) としたとき, $X_t(\cdot)$ の path は, 確率 1 で C^n -級であり, n 階の導関数は, $\forall \delta > 0$ について, $\alpha_0 - \delta$ 次の Hölder 連続性をもつ。

(2) $a_n = 1/e^{n\alpha}$ ($\alpha > 0$) のとき, $H_\varepsilon^{(2)}(X) \asymp (\log \frac{1}{\varepsilon})^2$, $\sigma = \infty$ である。(§2. (II) の例)。このとき, $X_t(\omega)$ の path は C^∞ -級であるが, §1 の結果から類推すると, 解析的にな

っていることが予想される。

(3) $a_n = 1/n^{1/2} (\log n)^{\alpha+1/2}$ ($\alpha > 0$) のとき, $H_\varepsilon^{(2)}(X)$ は, e^{1/ε^2} の order より大きい。また, $\sigma = 0$ であり, このとき, path は確率 1 で有界でない。

参 考 文 献

- [1] P. Billingsley; Ergodic Theory and Information, New York (1965).
- [2] R. M. Blumenthal and R. K. Gettoor; The dimension of the set of zeros and the graph of a symmetric stable process, Ill. Jour. Math. 6 (1962) 308-316.
- [3] J.-P. Kahane; Some Random Series of Functions, Massachusetts (1968).
- [4] K. Kazi; On the ε -entropy of stable processes, Jour. Math. Soc. Jap. 26-2 (1974) 181-205.
- [5] A. N. Kolmogorov; Theory of transmission of information, Transl. A.M.S. II-33 (1963) 291-321.
- [6] A. N. Kolmogorov and V. M. Tichomirov; ε -entropy and ε -capacity of sets in functional spaces, Transl. A.M.S. II-17 (1961) 277-364.
- [7] P. Lévy; Processus stochastiques et mouvements browniens, Paris (1948).
- [8] Б. Мартынов; О максимумах функции Ван-дер-Ваарсена, КВАНТ, 1982 № 69
8, 8-14.
- [9] H. P. McKean, Jr.; Sample functions of stable processes, Ann. Math., 61-3 (1955) 564-579.
- [10] S. J. Taylor; The α -dimensional measure of the graph and set of zeros of a Brownian path., Proc. Camb. Phil. Soc. 51 (1955) 265-274.