

Microlocal Study of Diffraction by a Knife-Edge

by M. Uchida

(Dept. of Mathematics, Kobé Univ.)

Diffraction of a single incident ray or a simple progressing wave by a knife-edge (or a corner of an obstacle) is formulated and proved from the standpoint of microlocal analysis. A general theorem on “diffraction without boundary conditions” is given in terms of boundary analytic micro-supports (note: this notion is due to P. Schapira (1986)) and applied to Dirichlet problems on a region complementary to a knife-edge. This gives a general proof to the observation of J.-B. Keller (1958); i.e. it claims that a cone of diffracted rays is produced by incident singularity of a microfunction solution which hits the knife-edge.

ナイフエッジ"による回折現象の 超局所解析

内田 素夫 (神戸大・自然科学)
(Motoo UCHIDA)

§0. $M \subset \mathbb{R}^n$ の開集合, $a_1, a_2 \in M$ 上定義した実数値実解析的函数で $da_1 \wedge da_2 \neq 0$ であるとす。 M の開集合 $\Omega = \{a_1 > 0\} \cup \{a_2 > 0\}$ と考え、

$$N_1 = \{a_1 = 0\}, \quad \partial_1 \Omega = \{a_1 = 0, a_2 < 0\},$$

$$N_2 = \{a_2 = 0\}, \quad \partial_2 \Omega = \{a_1 < 0, a_2 = 0\}$$

と置く。 $P = P(u, D)$ を実解析的係数 2 階線形偏微分作用素で、実主要型であると仮定する。 また N_1, N_2 は P に関して非特異的であると仮定する。 このとき、次の境界値問題を考える：

$$\begin{cases} Pu = 0 & \text{on } \Omega \\ u|_{\partial_1 \Omega} = g_1, \quad u|_{\partial_2 \Omega} = g_2 \end{cases}$$

ここに Dirichlet data g_1 は $\{x \in N_1; a_2(x) \leq 0\}$ の近傍で定義した N_1 上の実解析的函数, g_2 も同様とする。 上の境界値問題の解 $u \in \Gamma(\Omega; \beta_M)$ の特異性が領域内部では P の階特異性帯に沿って伝播し、また境界 $\partial_1 \Omega, \partial_2 \Omega$ に横断的にぶつかるときにはその点で反射することはいく知られている。 問題となるのは、階特異性帯が障害物 $(M \setminus \Omega)$ の角 (edge) $\{a_1 = a_2 = 0\}$ にぶつかるとき、それに沿って伝播して果て u の特異性はいくどう振舞うのかという点である。(その反対に反射しては

特異性なしの edge から特異性が生じ得るかどうかが問題であるが今はこゝろは考えない。) 講演では、角に於ける特異性の伝播(或いは凝集(condensation))の一般的な定理を与え、それを応用して $\mathbb{R}^n$ 上の n 型の混合型境界値問題に於ける回折現象(diffraction by a corner) が起ることを示した。特に P が二階重作用素の場合には、これは J.-B. Keller (1962) の回折の幾何的理論に超局所解析の立場から一つの証明を与えている。以下の考察の詳細については、論文 "Microlocal analysis of Diffraction by a Corner" (To appear in A.E.N.S.) を参照して下さい。

§7. $N_0 = \{a_1 = a_2 = 0\}$, $Y_0 \in N_0$ の $\mathbb{C}^n$ に於ける複素化, $\rho_0: T^*X \times_{\times} Y_0 \rightarrow T^*Y_0$ を自然な射影とす。

$q_0 \in T^*_{N_0} Y_0$ とし、 $E(q_0) = \rho_0^{-1}(q_0) \cap T^*_{N_0} X$ と定める。以下 P の主シンボルを $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(\zeta, \zeta)$ とかく。 $\mathfrak{f}|_{E(q_0)}$ が 2-近多項式であることを注意し、

$$C = \{P \in E(q_0) \mid \mathfrak{f}(P) = 0\}$$

は $E(q_0)$ 内の積内であると仮定する。以下 q_0 は固定する。

$\mathfrak{g} = \text{Im } \mathfrak{f}$ の実 Hamilton ベクトル場を $H_{\mathfrak{g}}^{\mathbb{R}}$ で表わす; また $\mathcal{C}^{\pm}(P)$ を $P \in C$ から出る $H_{\mathfrak{g}}^{\mathbb{R}}$ の正 (resp. 負) の積分曲線を表わす。ここへ:

$$C_{\pm}^k = \{P \in C \mid \pm \langle H_{\mathfrak{g}}^{\mathbb{R}}(P), da_k \rangle > 0\} \quad (k=1,2)$$

とかく。 $C_1^- \cup C_2^-$ (resp. $C_1^+ \cup C_2^+$) の各点は角に入射する (resp. 角から放射される) 特異性に対応している。 §0 で引用した論文では、次の結果を証明した:

[定理] u を §0 の境界値問題の解とす。 $P \in C_1^- \cup C_2^-$ であつて、 P は "一般の位置にある" ^(*) とす。このとき、

$$\mathcal{C}^-(P) \subset SS(u|_{\Omega}) \text{ であつて、 } \mathcal{C}^-(P') \not\subset SS(u|_{\Omega}) \quad (\forall P' \in$$

$C_1^- \cup C_2^-$ with $P' \neq P$) であるとする。 $E^+(q) \subset SS(\omega|_\Omega)$
 $(\forall q \in C_1^+ \cup C_2^+)$ である。 $\square$

これ $SS(\omega|_\Omega)$ は 超函数 ω の Ω 上の解析的波面集合を表
 わす。 正の階数特異曲線系 $E^+(q)$ ($q \in C_1^+ \cup C_2^+$) には、 η の
 一つの入射光線 (入射する特異性) $E^-(p)$ により生ずる回折光
 線 (回折する特異性) と対応する。 (cf. Keller: A Geomet-
 rical Theory of Diffraction (J. Opt. Soc. Am. 52, 1962,
 pp. 116-130) の Fig. 5)

(*) この意味は正確に次のことをいっている。 S_h は $T^*X \times Y_h$
 $\longrightarrow T^*Y_h$ の射影多様性を表わす。 但し、 Y_h は N_h の $\mathbb{C}^n$ に
 於ける複素化 ($h=1,2$)。 $(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$ は $E(q_0)$ の P 点に
 座標を、その座標を $S_h|E(q_0)$ の各点 q に対して $\eta_h = \text{const.}$
 で表わされるようなものとする。 P が "一般的位置にある" とは
 次の2つの特別な位置にないことをいう。

$$(III-1) \quad C = \{(\eta_1, \eta_2) \mid \eta_1^2 + \eta_1\eta_2 + \eta_2^2 = r^2\},$$

$$P = (-r/\sqrt{3}, -r/\sqrt{3}) \quad (r \neq 0).$$

$$(III-2) \quad C = \{(\eta_1, \eta_2) \mid \eta_1^2 + \eta_2^2 = r^2\},$$

$$P = (-r, 0) \text{ or } (0, -r) \quad (r \neq 0).$$

§2. ここでは2つの特異性が同時に角に入射する場合
 を取り扱う。この場合には §1 の定理を導いたものと同様の
 議論によって次の結果を得る。

[定理] ω は前と同様。 $P, q \in C_1^- \cup C_2^-$ ($P \neq q$) と
 あり、 $\{P, q\}$ は "一般的位置にある" とする。このとき、
 $E^-(p) \cup E^-(q) \subset SS(\omega|_\Omega)$ であり、 $E^-(p') \not\subset$
 $SS(\omega|_\Omega)$ ($\forall p' \in C_1^- \cup C_2^- \setminus \{P, q\}$) であるとする。

$\mathcal{C}^+(r) \subset SS(\omega|_{\Omega})$ ($\forall r \in \mathcal{C}_1^+ \cup \mathcal{C}_2^+$) である。 $\square$

(**) ここに $\{p, q\}$ が "一般の位置に置かれる" とは、次の特別な位置にないことをいふ；

$$(**-1) \quad C = \{ \eta_1^2 + 2\eta_1\eta_2 \cos \frac{\pi}{5} + \eta_2^2 = r^2 \} \quad (r \neq 0)$$

$$\{p, q\} = \{t_{(1)}^{\wedge}, t_{(2)}^{\wedge}\},$$

$$\text{但し、} t_{(1)}^{\wedge}, t_{(2)}^{\wedge} \text{ は } t = \left(r \frac{\cos \frac{2}{5}\pi}{\sin \frac{\pi}{5}}, r \frac{\cos \frac{2}{5}\pi}{\sin \frac{\pi}{5}} \right)$$

の N_1, N_2 に関する反対点； i.e.,

$$\{t, t_{(1)}^{\wedge}\} = C \cap S_1^{-1} S_1(t), \quad t_{(2)}^{\wedge} \text{ も同様である。}$$

$$(**-2) \quad C = \{ \eta_1^2 + \sqrt{2}\eta_1\eta_2 + \eta_2^2 = r^2 \},$$

$$\{p, q\} = \{(0, -r), (-\sqrt{2}r, r)\}$$

$$\text{or } \{(-r, 0), (r, -\sqrt{2}r)\}.$$

$$(**-3) \quad C = \{ \eta_1^2 + \eta_1\eta_2 + \eta_2^2 = r^2 \},$$

$$\{p, q\} = \left\{ \left(\frac{r}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}r \right), \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}r, \frac{r}{\sqrt{3}} \right) \right\}.$$

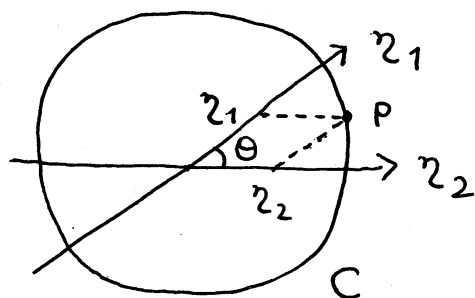
$$(**-4) \quad C = \{ \eta_1^2 - \eta_1\eta_2 + \eta_2^2 = r^2 \},$$

$$\{p, q\} = \left\{ \left(-\frac{r}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}r \right), \left(-\frac{r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}} \right) \right\}$$

or

$$\left\{ \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}r, -\frac{r}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{r}{\sqrt{3}}, -\frac{r}{\sqrt{3}} \right) \right\}.$$

ここに (η_1, η_2) は (*) と同様である $E(90)$ の 7.1-座標を表わす。



$$(**-1) \quad \theta = \frac{\pi}{5}$$

$$(**-2) \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$(**-3) \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$(**-4) \quad \theta = \frac{2}{3}\pi$$

$$(**-5) \quad C = \{ \eta_1^2 + \eta_2^2 = r^2 \},$$

$$\{p, q\} = \{(-r, 0), (0, -r)\}.$$

証明は $\{p, q\}$ の位置で場合分けしてできるから、より一般に次の結果を示すことができる：

$p \in C$ に対して、

$$R_p = \{p, p_{(1)}^{\wedge}, p_{(2)}^{\wedge}, p_{(1)(2)}^{\wedge}, p_{(2)(1)}^{\wedge}, p_{(1)(2)(1)}^{\wedge}, \dots\}$$

と置く。

[定理] ω は前と同様。 $Z \subset C_1^- \cup C_2^-$ を有限集合で、 $\exists p \in Z$ が存在して $R_p \cap (C_1^- \cup C_2^-) \not\subset Z$ であるとは定まる^(***) のこと。

$E^-(p) \subset SS(\omega|_Z) (\forall p \in Z)$ であり、 $E^-(p') \not\subset SS(\omega|_Z) (\forall p' \in C_1^- \cup C_2^- \setminus Z)$ であるとする。

$E^+(q) \subset SS(\omega|_Z) (\forall q \in C_1^+ \cup C_2^+)$ である。□

(***) この仮定は、

$$C = \{ \eta_1^2 + 2\eta_1\eta_2 \cos \theta + \eta_2^2 = r^2 \} \quad (r \neq 0)$$

とかけ、ここに $\theta \notin \mathbb{Q}\pi$ であるならば、任意の有限集合 Z について満たされる。

但し、除外される場合に対して同様の現象を起していない解が構成できるかどうかはよく分らない。(ある場合には確からず構成できる。)