

適応型ニュートン・コーツ積分法

名大 工学部 二宮 市三

ニュートン・コーツ則に基づく適応型自動積分法に、三つの改良: (1) 誤差推定の強化, (2) 収束判定の緩和, (3) 異常値の検出処理能力の付与, をとり入れ, 信頼性, 経済性及び融通性を向上させた. 適応型 9 点則積分ルーチン DAQN9 の概要を説明し, 著名ルーチンとの性能比較の結果を示す.

1. 誤差推定の強化

ニュートン・コーツ $2n+1$ 点則による積分値の打切誤差を推定するために, 従来は左右の半区間に $2n+1$ 点則を適用して与えられる積分値との比較を行った. このためには, $4n+1$ 個の $4n$ 等分点での関数値が必要である. これに対して改良案では, $2n+1$ 個の $2n$ 等分点と両端の二つの $4n$ 等分点, 合せて $2n+3$ 個の点での関数値を用いて, 打切誤差の理論式にあらわれる $2n+2$ 次導関数を直接推定する. この改良による関数計算回数の節減率はほぼ $n+1/2n$ となる.

2. 収束判定の緩和

積分全体に対する誤差規準 ε_0 に応じて, 各小区間のための局所的な収束判定規準 ε を定める従来の方法は, 自明な比例配分法である. 積分域の幅を $2h_0$, 小区間の幅を $2h$ とする

と, $\varepsilon = \varepsilon_0 h/h_0$ と定める. 改良案では, h の小さい区間に対して判定規準を積極的に緩和して計算の無駄を省くために, $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot h/h_0 \cdot \log_2(h_0/h)$ とする. この定め方は理論的根拠が稀薄であるが, 実際効果がある.

3. 異常点の検出処理能力の付与

打切誤差推定子 e を区間の半幅で規格化した $\tilde{e} = e/h$ を考える. $\tilde{e}$ は h に無関係な定数を係数とする, $2n+3$ 個の関数値の線型結合であって, 正常な関数に対しては, h の減少と共に h^{2n+2} に比例して減少する. 異常点 (値が未定義の場合は適当な有限値を値とする) を共通の端点とし, 長さが一定の比で減少する区間列では, $\tilde{e}$ は次のような振舞をする.

(1) 不連続点: $\tilde{e}$ は一定値に近づく. (2) 対数特異点: $\Delta \tilde{e}$ は一定値に近づく. (3) 代数特異点: $\Delta \tilde{e}$ は等比数列に近づく. 以上の振舞が検出されれば, 異常点の特性値を計算し, そのまわりの積分を解析的に処理することができる.

4. Kahaner の問題集による性能比較

誤差規準	CADRE	QNC7	DAQN9	QUAD	QABS
10^{-3}	0.95 120	0.86 79	0.95 66	0.95 149	0.90 93
10^{-6}	0.95 219	0.86 201	0.95 124	0.90 269	0.86 202
10^{-9}	0.90 510	0.81 437	0.95 237	0.86 465	0.90 470

表の数字は, 左が成功率, 右が平均サンプル数である.

参考文献: 二宮市三, "適応型ニュートン・ゴーツ積分法の改良", 情報処理20周年特集号(1980)