

ある非線形放物型方程式の初期値・境界値
問題について; 大域解の存在と解の blow up

早大 理工 堤 正義

§ 1. 序

O. A. Oleinik - S. N. Kruzhkov [1] が, 2 階準線形放物型
方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x,t,u) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + f(x,t,u, u_x) = 0$$
$$u_x = (\partial u / \partial x_1, \dots, \partial u / \partial x_n)$$

の初期値・第 1 種境界値問題の古典的大域解の存在を証明す
る際に, 非線形項に加えた条件の 1 つは

$$-u f(x,t,u,0) \leq A_1 u^2 + A_2 \quad (A_1, A_2 \text{ は定数})$$

である。(A. Friedman [2], O. A. Ladyzhenskaja - N. N. Ural'tseva [3]
も参照)。この条件を満足しない場合には, 一般に解は有限
時間で blow up することが, 常微分方程式の理論の類推から予
想される。

H. Fujita [4] は, 次の 2 階半線形放物型方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u^{1+\alpha}, \quad \alpha \geq 0.$$

の初期値問題および初期値・境界値問題の解が、適当な条件の下で、有限時間で blow up する事を示した。

ここでは、次の2階準線形放物型方程式の初期値・境界値問題を考える：

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left((1+|u|^{p-2}) \frac{\partial}{\partial x_i} u \right) + u^{1+\alpha}, \quad t > 0, \quad x \in \Omega$$

$$(2) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega$$

$$(3) \quad u(x, t) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

ここに、 Ω は $\mathbb{R}^n$ の有界領域で、その境界 $\partial\Omega$ は十分滑らかとする。また、 $p > 2$ 、 $\alpha > 0$ とする。さらに、初期値は非負とする（この時、最大値の原理から解も非負となる）。

§ 2. 大域解の存在 ($p > 2 + \alpha$ の場合)

$p > 2 + \alpha$ の場合には、次の大域的弱解の一意存在定理が得られる：

定理 1. 任意の非負値初期関数 $u_0(x) \in L^\infty(\Omega)$ に対して、初期値・境界値問題 (1)-(3) は一意的な大域解 $u(x, t)$ を持ち、

$$(4) \quad u(x, t) \geq 0 \quad \text{a.e. in } \Omega \times [0, T]$$

$$(5) \quad u(x, t) \in L^\infty(\Omega \times [0, T]) \cap L^\infty(\delta, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$$

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \in L^2(\delta, T; L^2(\Omega))$$

となる。ここに δ は任意の正数である。

もし、初期値 $u_0(x) \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ならば、 $\delta = 0$ と出来る。

定理 1 の証明には、次の補題が有用である。

補題 1. $u(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ かつ $u|_{\partial\Omega} = 0$, $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1 \geq 1$ とする。この時、次の不等式が成立する：

a) $\alpha_1 < n$ ならば、

$$(7) \quad \left(\int_{\Omega} |u(x)|^{(\alpha_0 + \alpha_1) \cdot \frac{n}{n-\alpha_1}} dx \right)^{\frac{n-\alpha_1}{n}} \leq K \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |u(x)|^{\alpha_0} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \right|^{\alpha_1} dx$$

b) $\alpha_1 = n$ ならば、任意の $s \geq 1$ に対して、

$$(8) \quad \left(\int_{\Omega} |u(x)|^{(\alpha_0 + \alpha_1)s} dx \right)^{1/s} \leq K \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |u(x)|^{\alpha_0} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \right|^{\alpha_1} dx$$

c) $\alpha_1 = n$ ならば、

$$(9) \quad \max_{x \in \Omega} |u(x)| \leq K \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} |u(x)|^{\alpha_0} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \right|^{\alpha_1} dx \right)^{\frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1}}.$$

こゝに、 K は、 $\alpha_0, \alpha_1, \Omega$ には依存するが、 $u(x)$ には依存しない正の定数である。

定理 1 の証明. 関数 $u_{0\varepsilon}(x)$ は、各 $\varepsilon > 0$ に対し、 $\bar{\Omega}$ 上で定義された十分滑らかな関数で、境界 $\partial\Omega$ 上で零になり、非負値、かつ $\varepsilon \rightarrow 0$ の時

$$(10) \quad u_{0\varepsilon} \longrightarrow u_0 \text{ in } L^\infty(\Omega) \text{ strongly}$$

となるものとする。

次の初期値・境界値問題を考える：

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial t} u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} ([1 + |u|^{p-2}] \frac{\partial}{\partial x_i} u) + u^{1+\alpha} - \varepsilon u^{2+\alpha}$$

$$(12) \quad u(x, 0) = u_{0\varepsilon}(x), \quad x \in \Omega$$

$$(13) \quad u(x, t) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

この時、各 $\varepsilon > 0$ に対して問題 (11) - (13) は、一意的な大域的古典解 $u(x, t; \varepsilon)$ ($= u_\varepsilon(x, t)$) を持つ (O. A. Oleinik - S. N. Kruzhkov [1])。

ε を零にもって行った極限として、問題 (4) - (6) の解を求めようという訳である。

補題 2. ε には依存しない正の定数 M_i ($i=1, 2, 3$) が存在して、

$$(14) \quad \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega \times [0, T]) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq M_1,$$

$$(15) \quad \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\delta, T; H_0^1(\Omega))} \leq M_2,$$

$$(16) \quad \left\| \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon \right\|_{L^2(\delta, T; L^2(\Omega))} \leq M_3.$$

ここに、 δ は任意の正数である。

補題 2 から、ある関数 $u(x, t)$ と関数列 $\{u_{\varepsilon_i}(x, t)\}$ の部分列 $\{u_{\varepsilon_i}(x, t)\}$ が存在して、 $\varepsilon_i \rightarrow 0$ の時

$$(17) \quad u_{\varepsilon_i}(x, t) \longrightarrow u(x, t) \text{ in } L^\infty(\Omega \times [0, T]) \text{ weakly star} \\ \text{in } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ weakly}$$

$$(18) \quad u_{\varepsilon_i}(x, t) \longrightarrow u(x, t) \text{ in } L^\infty(\delta, T; H_0^1(\Omega)) \text{ weakly star}$$

$$(19) \quad \frac{\partial}{\partial t} u_{\varepsilon_i}(x, t) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \text{ in } L^2(\delta, T; L^2(\Omega)) \text{ weakly}$$

となる。後は Ju. A. Dubinskii [5] と同じ議論で、 $u(x, t)$ が求める解である事が示せる。

定理 1 の最後の主張は、補題 2 において $\delta=0$ と取れる事より容易に従う。また、一意性の証明も通常の L^2 -評価で、容易

に出来る.

§3 解の blow up ($2 < p < \alpha$ の場合)

$2 < p < \alpha$ の場合には, 次の定理が得られる:

定理2. $2 < p < \alpha$ とする. もし, 初期値 $u_0(x)$ が, 滑らかな非負値関数で, 境界 $\partial\Omega$ で零となり, かつ条件

$$(20) \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (1 + (u_0(x))^{p-2}) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u_0(x) \right)^2 dx - \frac{1}{2+\alpha} \int_{\Omega} (u_0(x))^{2+\alpha} dx \leq 0$$

を満足するならば, 対応する解 $u(x, t)$ は有限時間で blow up する.

証明. 初めに, 次の初期値・境界値問題を考える.

$$(21) \quad \frac{\partial}{\partial t} v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left((1 + v^{p-2}) \frac{\partial}{\partial x_i} v \right) - \frac{p-2}{2} \sum_{i=1}^n v^{p-3} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} v \right)^2 + v^{1+\alpha}$$

$$(22) \quad v(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega$$

$$(23) \quad v(x, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

この時, 最大値の原理から, $v(x, t)$ の存在する区間において

$$(24) \quad 0 \leq v(x, t) \leq u(x, t)$$

となる. 従って, v が有限時間で blow up する事を示せばよい. (21) 式の両辺に $\frac{\partial}{\partial t} v(x, t)$ を掛け x, t に関して積分すれば,

$$\begin{aligned} (25) \quad & \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) \right|^2 dx dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (1 + (v(x, t))^{p-2}) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} v(x, t) \right)^2 dx \\ & - \frac{1}{2+\alpha} \int_{\Omega} (v(x, t))^{2+\alpha} dx \\ & = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (1 + (u_0(x))^{p-2}) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u_0(x) \right)^2 dx - \frac{1}{2+\alpha} \int_{\Omega} (u_0(x))^{2+\alpha} dx \end{aligned}$$

を得る。仮定から、右辺 ≤ 0 であるから

$$(26) \quad \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} v(x,t) \right)^2 dx \leq \frac{2}{2+\alpha} \int_{\Omega} (v(x,t))^{2+\alpha} dx,$$

$$(27) \quad \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (v(x,t))^{p-2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} v(x,t) \right)^2 dx \leq \frac{2}{2+\alpha} \int_{\Omega} (v(x,t))^{2+\alpha} dx$$

と、方程式 (21) に $v(x,t)$ を掛け、 x に関して積分すれば、

$$(28) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} v(x,t) \right)^2 dx - \frac{p}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (v(x,t))^{p-2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} v(x,t) \right)^2 dx + \int_{\Omega} (v(x,t))^{2+\alpha} dx$$

を得る。上式と (26), (27) から

$$(29) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \frac{\alpha-p}{2+\alpha} \int_{\Omega} (v(x,t))^{2+\alpha} dx$$

が従う。と、 Ω が有界領域であるから、不等式

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (\text{mes}(\Omega))^{\alpha/(2+\alpha)} \|u\|_{L^{2+\alpha}(\Omega)}^2, \quad \forall u \in L^{2+\alpha}(\Omega),$$

が成り立つ。従って

$$(30) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \frac{\alpha-p}{2+\alpha} (\text{mes}(\Omega))^{-\alpha/2} \|v(t)\|_{L^2(\Omega)}^{2+\alpha}.$$

これから、直ちに

$$(31) \quad \|v(t)\|_{L^2(\Omega)}^{\alpha} \geq \frac{1}{\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^{-\alpha} - Lt}$$

が従う。ここから、

$$L = \frac{\alpha(\alpha-p)}{2+\alpha} (\text{mes}(\Omega))^{-\alpha/2}.$$

従って、 $t \rightarrow \frac{1}{L} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^{-\alpha} < +\infty$ としたとき、 $\|v(t)\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow +\infty$

定理の証明終り

注意 1. $p-2 < \alpha < p$ において、大域解が存在するか、

解の blow up が生じるか否かは，未解決である．

§ 4. Degenerate した方程式の場合．

次の初期値・境界値問題を考える：

$$(32) \quad \frac{\partial}{\partial t} u = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (u^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}) + u^{1+\alpha}, \quad t > 0, x \in \Omega,$$

$$(33) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega$$

$$(34) \quad u(x, t) = 0, \quad t > 0, x \in \partial\Omega.$$

この時，次の定理を得る．

定理 3. $p > 2 + \alpha$ とする．任意の非負値初期関数 $u_0(x) \in L^\infty(\Omega)$ に対して，初期値・境界値問題 (32) - (34) は一意的な大域解 $u(x, t)$ を持ち，

$$(35) \quad u(x, t) \geq 0 \quad \text{a.e. in } \Omega \times [0, T]$$

$$(36) \quad u(x, t) \in L^\infty(\Omega \times [0, T])$$

$$(37) \quad v(x, t) = (u(x, t))^{p-1} \in L^\infty(\delta, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$$

$$(38) \quad w(x, t) = (u(x, t))^{\frac{p}{2}} \in H^1(\delta, T; L^2(\Omega)).$$

となる．ここに δ は任意の正数である．さらに，初期関数 $u_0(x)$ が上記の仮定の外に，さらに $v_0(x) = (u_0(x))^{p-1} \in H_0^1(\Omega)$ を満足すれば， $\delta = 0$ に取ることができる．

定理 3 の証明は，定理 1 の証明と類似の方法によつて，出来る．

注意 1. (32)式は $u=0$ で degenerate している為、解の滑らかさがくずれる (D. G. Aronson [6])

注意 2. $2 < p < 2+\alpha$ の時に、問題 (32)-(34) の解が blow up するかどうかは検討中である。

注意 3. 定理 3 の結果は、Ju. A. Dubinski [5] の結果より、解の滑らかさが上がっている。

文献

- [1] O.A. Oleinik, S.N. Kruzhkov, Quasi-linear parabolic equations of the second order with many independent variables, Uspekhi. Mat. Nauk SSSR 16, (1961), 115-155.
- [2] A. Friedman, Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1964
- [3] O.A. Ladyzenskaya, V.A. Solonnikov; N.N. Uraltseva, Linear and quasilinear parabolic equations, "Nauk" Moskow (1967)
- [4] H. Fujita, On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, Sect. 1, 13 (1966), 109-124.
- [5] Ju. A. Dubinskiĭ, Weak convergence in Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations, Math. Sb., 67 (1965), 609-642

- [6] D.G. Aronson, Regularity properties of flows through porous media, SIAM. J. Appl. Math. 17 (1969), 461-467
- [7] M. Tsutsumi, Existence and Nonexistence of Global Solutions for Nonlinear Parabolic Equations, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 8 (1972/73), 211-229.