

2つの Wishart 行列の固有値と 固有ベクトルの漸近分布

広島大 理 小 西 貞則

§ 1. 序

S_1, S_2 は互いに独立で各々 Wishart 分布 $W_p(\Sigma_1, n_1), W_p(\Sigma_2, n_2)$ に従う行列とする。(ただし $n_1 = p_1 n, n_2 = p_2 n, n_1 + n_2 = n$ とおく)。このとき Anderson, T.W. (1951) *Proc. Second Berkeley Sym.* の方法を使って $n \rightarrow \infty$ のとき $S_2^{-1} S_1$ の固有値と固有ベクトルの漸近分布を考える。一般性を失うことなく $\Sigma_1 = \Gamma, \Sigma_2 = I$ としよ。

$$\text{ただし } \Gamma = \begin{pmatrix} r_1 I_{p_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 I_{p_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & r_p I_{p_p} \end{pmatrix} \quad p = \sum_{i=1}^p p_i \quad r_1 > \cdots > r_p > 0$$

$I_{p_i} : p_i \times p_i \text{ 単位行列}$

いま $S_2^{-1} S_1$ の p 個の固有値を $\phi_1(n) \geq \cdots \geq \phi_p(n) > 0$ とし対応する固有ベクトル $\underline{c}_1(n), \dots, \underline{c}_p(n)$ は, $\underline{c}_i(n)^T S_2 \underline{c}_j(n) = n_2 \delta_{ij}$ を満たすように定め, $\Phi_n = \text{diag}(\phi_1(n), \dots, \phi_p(n)), C_n = [\underline{c}_1(n), \dots, \underline{c}_p(n)]$ とおく。まず §2 において Γ の対角要素がすべて等しい時, すなわち $r_1 = \cdots = r_p = r$ のとき固有値 Φ_n と固有ベクトル C_n の逆行列 X_n の漸近分布を考える。さらに §3 において Γ が上の一般の場合に Φ_n, X_n の漸近

分布について考える。最後に §4 において Φ_n, G_n の漸近分布を考える。なお Anderson, T.W. (1951) は、多変量線型仮説モデルについて固有値、固有ベクトルの漸近分布をあつかっている。

§ 2. Γ の対角要素がすべて等しい場合

この節では $\Gamma = \delta I$ のときを考える。 $S_2^T S_1$ の固有値 Φ_n と固有ベクトル G_n の逆行列 X_n は、

$$(2.1) \quad \frac{1}{n_2} S_1 = X_n' \Phi_n X_n$$

$$(2.2) \quad \frac{1}{n_2} S_2 = X_n' X_n$$

(ただし $X_n = [x_{ij}(n)]$ とするとき $x_{ii}(n) \geq 0$ であるとする。)

によって S_1, S_2 から *unique* に定義され *unique* に定義されない集合の *measure* は S_1, S_2 に関して 0 となる。また中心極限定理より、

$$(2.3) \quad V_n = \frac{1}{\sqrt{n_1}} (\frac{1}{n_1} S_1 - n_1 I)$$

$$(2.4) \quad U_n = \frac{1}{\sqrt{n_2}} (S_2 - n_2 I)$$

は $n \rightarrow +\infty$ のとき漸近的に平均 0 の正規分布に従う。このことから S_1, S_2 に代って *random matrix* U_n, V_n を使用する。次に X_n から新しい行列 W_n, Z_n が、 X_n の *measure zero* の集合を除いて、

$$(2.5) \quad X_n = W_n + \frac{1}{\sqrt{n_2}} Z_n \quad \text{ただし} \quad W_n' W_n = I, \quad W_n' Z_n = Z_n' W_n$$

によって *unique* に定義されることが示される。なお W_n, Z_n は次のようにおくことができる。 $X_n' X_n$ が対称行列であることから $X_n' X_n = O_n' D_n O_n$ なる直交行列 O_n と対角行列 D_n への分解が、

可能である。ただし O_n の第 1 列は負でなく、 D_n の対角要素は大ききの順とする。このとき $W_n = X_n O_n' D_n^{-1/2} O_n$ とおく。また (2.2), (2.4) から $D_n = I + \frac{1}{\sqrt{n_2}} \Psi_n$ と表わせる。ここで Ψ_n は対角行列でその対角要素は U_n の固有値である。 $D_n^{1/2} = I + \frac{1}{\sqrt{n_2}} \Psi_n^*$ とする。このとき $Z_n = W_n O_n' \Psi_n^* O_n$ とおく。これによって (2.5) がでてくる。Wishart 行列 S_1, S_2 に代って U_n, V_n を用いて $S_2^{-1} S_1$ の固有値 Φ_n を考えると $n \rightarrow +\infty$ のとき Φ_n は $|\frac{\rho_1}{\rho_2} I - \Phi I| = 0$ の根に収束することがわかる。そこで Φ_n を

$$(2.6) \quad \Phi_n = \frac{\rho_1}{\rho_2} I + \frac{1}{\sqrt{n}} \Theta_n$$

とおく。以上のことから (X_n, Φ_n) に代って (2.5), (2.6) によって定義される (W_n, Z_n, Θ_n) の極限分布について考える。(2.1), (2.2) において X_n, Φ_n に (2.5), (2.6) 式を代入して左辺の S_1, S_2 を (2.3), (2.4) の関係から U_n, V_n でおきかえて整理すると次の 2 式をえる。

$$(2.7) \quad V_n - \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} U_n = \frac{\rho_2}{\sqrt{\rho_1}} W_n' \Theta_n W_n + \frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1}} [W_n' \Theta_n Z_n + Z_n' \Theta_n W_n] + \frac{1}{\sqrt{\rho_1} n} Z_n' \Theta_n Z_n$$

$$(2.8) \quad U_n = 2 W_n' Z_n + \frac{1}{\sqrt{n_2}} Z_n' Z_n$$

以上のことから $W_n' W_n = I$, $W_n' Z_n = Z_n' W_n$ なる条件のもとで, (2.7), (2.8) によって U_n, V_n の measure zero の集合を除いて, U_n, V_n から W_n, Z_n, Θ_n が unique に定義されることがわかる。そこで Rubin の定理 (Anderson, T. W. (1951)) を適用するに当って, U_n, V_n が $n \rightarrow +\infty$ のとき点列として各々 U, V に収束するとき (W_n, Z_n, Θ_n) は,

$$(2.9) \quad V - \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} U = \frac{p_2}{\sqrt{p_1}} W' \Theta W \quad \text{ただし } W'W = I, W'Z = Z'W$$

$$(2.10) \quad U = 2W'Z \quad w_{i1} \geq 0 \quad (i=1, \dots, p)$$

の解 (W, Z, Θ) に収束することを示す必要がある。まず $\frac{p_2}{\sqrt{p_1}} \Theta_n$ の対角要素は、 $U_n \rightarrow U, V_n \rightarrow V (n \rightarrow +\infty)$ なるとき $V - \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} U$ の固有値に収束することが示される。 W_n は直交行列より、確率有界であり、 Z_n はその定義の仕方から確率有界であることが示される。すると (2.7), (2.8) から $V_n - \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} U_n - \frac{p_2}{\sqrt{p_1}} W_n' \Theta_n W_n, U_n - 2W_n' Z_n$ の norm は $n \rightarrow +\infty$ のとき 0 に収束する。そこで $(p \times p)$ 行列 $\tilde{W}, \tilde{Z}, \tilde{\Theta}$ を変数として $(p \times p)$ 行列 Q, R なる値をとる次のような matrix function を考える。

$$(2.11) \quad (Q, R) = (V - \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} U - \frac{p_2}{\sqrt{p_1}} \tilde{W}' \tilde{\Theta} \tilde{W}, U - 2\tilde{W}' \tilde{Z})$$

ここで $\tilde{\Theta}$ は対角行列でその対角要素はすべて異なり大きさの順に並んでいるとする。また $\tilde{W} = [\tilde{w}_{ij}]$ は直交行列で $\tilde{w}_{i1} > 0$, $\tilde{W}' \tilde{Z} = \tilde{Z}' \tilde{W}$ であるとする。(2.11) において Q, R を fix すると $\tilde{W}, \tilde{Z}, \tilde{\Theta}$ は unique に定まる。そこで Q, R の関数として (2.11) の逆関数を考える。すなわち

$$(2.12) \quad (\tilde{W}, \tilde{Z}, \tilde{\Theta}) = (f_1(Q, R), f_2(Q, R), f_3(Q, R))$$

この関数は連続であるから、いま Q を零行列として

$$(2.13) \quad (W, Z, \Theta) = (f_1(Q, Q), f_2(Q, Q), f_3(Q, Q))$$

とすると、 (Q, R) の norm を十分小さくするとき $(\tilde{W} - W, \tilde{Z} - Z, \tilde{\Theta} - \Theta)$ の norm を十分小さくすることができる。いま

$U_n \rightarrow U, V_n \rightarrow V$ ($n \rightarrow +\infty$) なる点列に対して (2.7), (2.8) で定まる (W_n, Z_n, Θ_n) に対して (2.11) から $(Q_n, R_n) = (V - \sqrt{\frac{P_2}{P_1}} U - \frac{P_2}{\sqrt{P_1}} W_n' \Theta_n W_n, V - 2 W_n' Z_n)$ とおく。 $n \rightarrow +\infty$ のとき Q_n, R_n の norm は 0 に収束することから同様に逆関数 (2.12) を考えると (W_n, Z_n, Θ_n) は, (2.13) で定義される (W, Z, Θ) にしたがって (2.9), (2.10) で定まる (W, Z, Θ) に収束することがわかる。ここで (W, Z, Θ) の分布を求めるために次の補助定理, 1. (Anderson, T. W. (1951), Kuo, P. L. (1939), Ann. Eugen.) を上げておく。

補助定理 1. random matrix $B_{(p \times p)}$ は対称行列でその密度関数は, $\pi^{-p(p+1)/4} 2^{-\frac{1}{2}p} \exp[-\frac{1}{2} \text{tr} B^2]$ であるとする。また $C_{(p \times p)}, \Phi_{(p \times p)}$ は次の 2 式によって定義されるものとする。

$$C' \Phi C = B, \quad C' C = I$$

ここで Φ は対角行列で対角要素 ϕ_i ($i=1, \dots, p$) は $\phi_1 \geq \dots \geq \phi_p$ であるとし $C = [C_{ij}]$ において $C_{ii} \geq 0$ とする。

このとき C と Φ は互いに独立で Φ の対角要素の密度関数は,

$$2^{-\frac{1}{2}p} \left\{ \prod_{i=1}^p \Gamma\left[\frac{1}{2}(p+1-i)\right] \right\}^{-1} \exp\left[-\sum_{i=1}^p \phi_i^2/2\right] \prod_{i < j} (\phi_i - \phi_j)$$

であり直交行列 C の分布は Haar Conditional distribution である。

なお (2.9), (2.10) で定義される (W, Z, Θ) の分布をこの補助定理を使つて求めるわけであるがそれは §3 の定理 1. に帰着して、述べる。

§ 3. Γ が一般の形をとる場合

この節では Γ が §1 で上げた一般の形をとる場合を考える。
 X_n を Γ の対角要素の重複度 $\delta_1, \dots, \delta_k$ に従って k^2 個の小行列に、
 分割して次のようにおく。

$$(3.1) \quad X_n = \begin{bmatrix} X_{11}(n) & X_{12}(n) & \cdots & X_{1k}(n) \\ X_{21}(n) & X_{22}(n) & \cdots & X_{2k}(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{k1}(n) & X_{k2}(n) & \cdots & X_{kk}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1(n) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & W_2(n) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & W_k(n) \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{n_2}} \begin{bmatrix} Z_{11}(n) & Z_{12}(n) & \cdots & Z_{1k}(n) \\ Z_{21}(n) & Z_{22}(n) & \cdots & Z_{2k}(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{k1}(n) & Z_{k2}(n) & \cdots & Z_{kk}(n) \end{bmatrix}$$

$$= W_n + \frac{1}{\sqrt{n_2}} Z_n$$

ただし $W_i(n)' W_i(n) = I_{\delta_i}$, $W_i(n)' Z_{ii}(n) = Z_{ii}(n) W_i(n)$ ($i=1, \dots, k$)

$X_{ii}(n)$ の第1列はすべて正であるとする。

次に (2.3) に代ってここでは $n \rightarrow +\infty$ のとき

$$(3.2) \quad V_n = \frac{1}{\sqrt{n_1}} (\Gamma^{-\frac{1}{2}} S_1 \Gamma^{-\frac{1}{2}} - n_1 I)$$

が漸近的に平均 0 の正規分布に従うことを使う。 S_1, S_2 に代って U_n, V_n でおきかえて考えると $S_2' S_1$ の固有値 Φ_n は $|\frac{\rho_1}{\rho_2} \Gamma - \Phi I| = 0$ の固有値に収束することが示される。そこで Φ_n を

$$(3.3) \quad \Phi_n = \begin{bmatrix} \frac{\rho_1}{\rho_2} \delta_1 I_{\delta_1} + \frac{1}{\sqrt{n}} \Theta_1(n) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\rho_1}{\rho_2} \delta_2 I_{\delta_2} + \frac{1}{\sqrt{n}} \Theta_2(n) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 0 & \frac{\rho_1}{\rho_2} \delta_k I_{\delta_k} + \frac{1}{\sqrt{n}} \Theta_k(n) \end{bmatrix}$$

とおく。 U_n, V_n, S_1, S_2 も同様に k^2 個の小行列に分割して、 $U_n = [U_{ij}(n)]$, $V_n = [V_{ij}(n)]$ ($i, j=1, \dots, k$) とおく。(2.1), (2.2) の関係式から S_1, S_2 を U_n, V_n でおきかえさらに X_n, Φ_n を (3.1), (3.3) でおきかえと次の式がえられる。

$$(3.4) \quad U_{ii}(n) = 2 W_i'(n) Z_{ii}(n) + \frac{1}{\sqrt{n_2}} \sum_{k=1}^h Z_{ki}'(n) Z_{ki}(n)$$

$$(3.5) \quad U_{ij}(n) = W_i'(n) Z_{ij}(n) + Z_{ji}'(n) W_j(n) + \frac{1}{\sqrt{n_2}} \sum_{k=1}^h Z_{ki}'(n) Z_{kj}(n) \quad (i \neq j)$$

$$(3.6) \quad V_{ii}(n) = \frac{\rho_2}{\delta_i \sqrt{\rho_1}} W_i'(n) \Theta_i(n) W_i(n) + 2 \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} W_i'(n) Z_{ii}(n) + \frac{1}{\sqrt{n}} M_{ii}(n)$$

$$(3.7) \quad V_{ij}(n) = \frac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\delta_i \delta_j \rho_2}} [\delta_i W_i'(n) Z_{ij}(n) + \delta_j Z_{ji}'(n) W_j(n)] + \frac{1}{\sqrt{n}} M_{ij}(n)$$

ただし $M_{ii}(n), M_{ij}(n)$ は, $Z_{ij}(n), \Theta_i(n), W_i(n), \delta_i, \rho_1, \rho_2, \frac{1}{\sqrt{n}}$ の積和である。

この4式によつて $(W_i(n), Z_{ij}(n), \Theta_i(n); i, j=1, \dots, h)$ は, $(U_{ij}(n), V_{ij}(n); i, j=1, \dots, h)$ によつて, measure zero の集合を除いて unique に定義される。この $(W_i(n), Z_{ij}(n), \Theta_i(n); i, j=1, \dots, h)$ は $n \rightarrow +\infty$ のとき次の式によつて定義される $(W_i, Z_{ij}, \Theta_i; i, j=1, \dots, h)$ に法則収束することが示される。

$$(3.8) \quad U_{ii} = 2 W_i' Z_{ii}$$

$$(3.9) \quad U_{ij} = W_i' Z_{ij} + Z_{ji}' W_j \quad (i \neq j)$$

$$(3.10) \quad V_{ii} - \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} U_{ii} = \frac{\rho_2}{\delta_i \sqrt{\rho_1}} W_i' \Theta_i W_i$$

$$(3.11) \quad V_{ij} = \frac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\delta_i \delta_j \rho_2}} [\delta_i W_i' Z_{ij} + \delta_j Z_{ji}' W_j] \quad (i \neq j)$$

$$(3.12) \quad W_i' W_i = I_{h_i}, \quad W_i' Z_{ii} = Z_{ii}' W_i$$

このことは §2 と同様の方法を使って証明することができる。

まず $\frac{\rho_2}{\delta_i \sqrt{\rho_1}} \Theta_i(n)$ の対角要素は $n \rightarrow +\infty$ のとき $V_{ii} - \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} U_{ii}$ の固有値に収束することが証明できる。 $W_i(n)$ は直交行列より確率有界であることがわかる。最後に $Z_{ij}(n)$ が確率有界であることをいう必要がある。そのために固有ベクトル C_n の形を調べて

みる。なお Anderson (1951) の論文において多変量線型仮説モデルの固有ベクトルの形が特殊な場合に求められているが、ただちには一般化できない。ここでは一般の場合を次の補助定理 2. として述べる。

補助定理 2. S_1, S_2 は互いに独立で $W_p(I, n_1), W_p(I, n_2)$ に各々従うとする。このとき $S_2^{-1} S_1$ の最大根 $\phi(n)$ に対する固有ベクトル $\underline{c}(n)$ の要素は次のように表わせる。

$\underline{c}(n) = [c_1(n), \dots, c_{p_1}(n)]$ とするとき

$$1 \leq j \leq p_1 \quad c_{j1}(n) = g_1(n) \left\{ k_{j1}(n) \prod_{i=1}^k p_i^{g_i} (x_i - r_i)^{g_i} + \frac{1}{\sqrt{n}} k_{j1}^*(n) \right\}$$

$$p_{l+1} \leq j \leq p_{l+1} \quad (l=1, 2, \dots, A-1)$$

$$c_{jl}(n) = \frac{1}{\sqrt{n}} g_l(n) \left\{ k_{jl}(n) p_1^{p_{l+1}-1} (x_{p_{l+1}} - r_1)^{p_{l+1}-1} \prod_{i=1, i \neq l+1}^k p_i^{g_i} (x_i - r_i)^{g_i} + \frac{1}{\sqrt{n}} k_{jl}^*(n) \right\}$$

ここで $g_l(n)$ は $\underline{c}'(n) S_2 \underline{c}(n) = n_2$ をみたすように定められ、 $k_{j1}(n)$ は U_n, V_n の要素と $p_1, p_2, r_i (i=1, \dots, k)$ の積和であり、 $k_{j1}^*(n)$ はさらに $\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}, \dots$ と U_n, V_n の要素、 p_1, p_2, r_i の積和である。このことから $g_1(n), k_{j1}(n), k_{j1}^*(n)$ は $n \rightarrow +\infty$ のとき収束することが示される。同様にして i 番目の根に対する固有ベクトルは

$$p_{l+1} \leq i \leq p_{l+1} \quad (l=0, 1, \dots, A-1) \quad g_0 = 0$$

$$\underline{c}_i(n) = g_i(n) \left[\underbrace{O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \dots, O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}_{p_1 + \dots + p_{l+1} \text{ 個}}, k_{i, p_1 + \dots + p_{l+1}, i}(n) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \dots, k_{i, p_1 + \dots + p_{l+1}, i}(n) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \dots, O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right] \quad \underbrace{\quad}_{p_{l+1} - p_l \text{ 個}}$$

ただし $g_i(n)$ は $\underline{c}_i(n) S_2 \underline{c}_i(n) = n_2$ をみたすように定められ $g_i(n), k_{ij}(n)$ とともに $n \rightarrow +\infty$ のとき収束する。

これを行列で表わすと

$$C_n = \begin{pmatrix} K_{11}(n) & \frac{1}{\sqrt{n}} K_{12}(n) & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} K_{1h}(n) \\ \frac{1}{\sqrt{n}} K_{21}(n) & K_{22}(n) & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} K_{2h}(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} K_{h1}(n) & \frac{1}{\sqrt{n}} K_{h2}(n) & \cdots & K_{hh}(n) \end{pmatrix} \quad K_{ij}(n) : g_i \times g_j \text{ 行列}$$

ここで $K_{ij}(n)$ は $n \rightarrow +\infty$ のとき収束することがわかる。

$X_n = C_n^{-1}$ より、 X_n も C_n と同様の形の行列表わせる。これから $Z_{ij}(n)$ (こき) は $n \rightarrow +\infty$ のとき収束し、さらに $Z_{ii}(n)$ は有界であることが示される。したがって §2 と同様の方法で、 $(W_i(n), Z_{ij}(n), \Theta_i(n); i, j=1, \dots, h)$ は、(3.8) ~ (3.12) によって定義される $(W_i, Z_{ij}, \Theta_i; i, j=1, \dots, h)$ に法則収束することが Rubin の定理から示される。

定理 1. $(W_i(n), Z_{ij}(n), \Theta_i(n); i, j=1, \dots, h)$ は $n \rightarrow +\infty$ のときその極限分布は下の (1), (2), (3) の分布に従う $(W_i, Z_{ij}, \Theta_i; i, j=1, \dots, h)$ によって $\left[\prod_{i=1}^h f_i(\Theta_i) g_i(W_i) \right] h(Z | \Theta, W)$ と表わすことができる。ただし $Z = [Z_{ij}]$, $W = \text{diag}(W_1, \dots, W_h)$, $\Theta = \text{diag}(\Theta_1, \dots, \Theta_h)$

$$(1) \quad f_i(\Theta_i) = 2^{-\frac{1}{2}b_i} \left\{ \prod_{g=1}^{b_i} \Gamma\left[\frac{1}{2}(b_i+1-g)\right] \right\}^{-1} \exp \left\{ -\lambda_i \sum_{g=b_i+1+\dots+b_{i-1}+1}^{b_i+\dots+b_i} \Theta_g^2 / 2 \right\} \\ \times \prod_{g < g'} (\Theta_g - \Theta_{g'}) \lambda_i^{\frac{1}{2}b_i(b_i+1)} \quad \left(\text{ただし } \lambda_i = \frac{\rho_i^{3/2}}{b_i(2\rho_i)^{1/2}} \text{ とおく} \right)$$

(2) 直交行列 W_i の分布は Haar Conditional distribution

(3) $h(Z | W, \Theta)$ は正規分布でその条件付平均, 分散, 共分散は次のようになる。ただし $W_i = (w_{gk}^{(i)})$ とする。

$$E(Z_{ij} | \Theta, W) = \begin{cases} -\frac{\rho_i^{3/2}}{2b_i} \Theta_i W_i & i=j \\ 0 & \text{こき} \end{cases}$$

Z_{ii} の元 $z_{gk}, z_{g'k'}$ の条件付共分散は $\frac{\rho_2}{4}(\delta_{gg'}\delta_{kk'} + w_{gk}^{(i)}w_{g'k'}^{(i)})$

Z_{ij} の元 z_{gk} の条件付分散は $\sigma_j(\rho_1\sigma_j + \rho_2\sigma_i)/\rho_1(\sigma_i - \sigma_j)^2$

Z_{ij} の元 z_{gk} と Z_{ji} の元 $z_{g'k'}$ の条件付共分散は $\frac{-\sigma_i\sigma_j}{\rho_1(\sigma_i - \sigma_j)^2}w_{gk}^{(i)}w_{g'k'}^{(j)}$

その他の元の間の条件付共分散はすべて 0 となる。

§ 4. $S_2^{-1}S_1$ の固有値, 固有ベクトルの漸近分布

いま固有ベクトル C_n を Γ の対角要素の重複度 $g_i (i=1, \dots, R)$ によって R^2 個の小行列に分割したものを $C_n = [C_{ij}(n)]$ として, これを次のようにおく。

$$C_n = \begin{bmatrix} C_{11}(n) & C_{12}(n) & \dots & C_{1R}(n) \\ C_{21}(n) & C_{22}(n) & \dots & C_{2R}(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{R1}(n) & C_{R2}(n) & \dots & C_{RR}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1(n) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_2(n) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & H_R(n) \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{n_2}} \begin{bmatrix} F_{11}(n) & F_{12}(n) & \dots & F_{1R}(n) \\ F_{21}(n) & F_{22}(n) & \dots & F_{2R}(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{R1}(n) & F_{R2}(n) & \dots & F_{RR}(n) \end{bmatrix}$$

$$= H_n + \frac{1}{\sqrt{n_2}} F_n$$

ただし $H_i(n)H_i(n) = I_{g_i}$, $H_i(n)F_{ic}(n) = F_{ic}(n)H_i(n)$

C_n を unique に決めるため便宜上 $C_{ii}(n)$ の第 1 行は負でないとしておく。このとき (2.1), (2.2) によって定義される X_n の逆行列 X_n^{-1} と C_n とは列ベクトルの正負の差だけである。ところが十分大きな n に対して $C_n = X_n^{-1}$ が成り立つ。したがって,

$$C_n = H_n + \frac{1}{\sqrt{n_2}} F_n = (W_n + \frac{1}{\sqrt{n_2}} Z_n)^{-1} = W_n' - \frac{1}{\sqrt{n_2}} W_n' Z_n W_n' + \frac{1}{n} T_n$$

ここで T_n の要素は $n \rightarrow +\infty$ のとき収束する。この式から小行列をとって考えると

$$(4.1) \quad H_i(n) + \frac{1}{\sqrt{n_2}} F_{ii}(n) = W_i'(n) - \frac{1}{\sqrt{n_2}} Z_{ii}'(n) + \frac{1}{n} T_{ii}(n)$$

$$(4.2) \quad \frac{1}{\sqrt{n_2}} F_{ij}(n) = -\frac{1}{\sqrt{n_2}} W_i'(n) Z_{ij}(n) W_j'(n) + \frac{1}{n} T_{ij}(n) \quad (i \neq j)$$

これから $(H_i(n), F_{ii}(n), F_{ij}(n), \Theta_i(n) ; i, j=1, \dots, k)$ の極限分布は $(W_i', -Z_{ii}, -W_i' Z_{ij} W_j', \Theta_i ; i, j=1, \dots, k)$ の分布で与えられることが示される。

定理2. $(\Xi_i(n), C_{ii}(n), C_{ij}(n) ; i, j=1, \dots, k)$ は、極限分布が次の (1) に従う対角行列 $\Theta_i(n)$, (2) に従う直交行列 $H_i(n)$, (3) に従う $F_{ij}(n)$ によって $(\Xi_i(n), C_{ii}(n), C_{ij}(n) ; i, j=1, \dots, k) = (\frac{p_1}{p_2} I_k + \frac{1}{\sqrt{n}} \Theta_i(n), H_i(n) + \frac{1}{\sqrt{n_2}} F_{ii}(n), \frac{1}{\sqrt{n_2}} F_{ij}(n) ; i, j=1, \dots, k)$ と表わすことができる。ここで $(H_i(n), F_{ij}(n), \Theta_i(n) ; i, j=1, \dots, k)$ の極限分布は $(\prod_{i=1}^k f_i(\Theta_i) g_i(H_i)) A(F|\Theta, H)$ で表わされる。

ただし $F=[F_{ij}]$, $H=\text{diag}(H_1, \dots, H_k)$, $\Theta=\text{diag}(\Theta_1, \dots, \Theta_k)$ とする。

(1) $f_i(\Theta_i)$ の密度関数は定理1で与えられるもの。

(2) 直交行列 H_i の分布は *Kaar Conditional distribution*

(3) $A(F|\Theta, H)$ は正規分布でその条件付平均・分散・共分散は

次のように与えられる。ただし $H_i = [h_{gk}^{(i)}]$ とおく。

$$E[F_{ij}|\Theta, H] = \begin{cases} \frac{p_2^{3/2}}{2\pi} H_i \Theta_i & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

F_{ii} の元 $f_{gk}, f_{g'k'}$ の条件付共分散は $\frac{p_2}{4} (\delta_{gg'} \delta_{kk'} + h_{gk}^{(i)} h_{g'k'}^{(i)})$

F_{ij} の元 f_{gk} の条件付分散は $p_2(p_1 + p_2 \delta_i) / p_1 (\delta_i - \delta_j)^2$

F_{ij} の元 f_{gk} と F_{ji} の元 $f_{g'k'}$ の条件付共分散は $-\frac{\delta_i \delta_j}{p_1 (\delta_i - \delta_j)^2} h_{gk}^{(i)} h_{g'k'}^{(j)}$

その他の元の間の条件付共分散はすべて0となる。