

Feynman path integral.

名大. 理. 土屋 昭博.

§0. 一次元 Schrödinger 方程式の初期値問題.

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x, t) + V(x) \varphi(x, t) \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x). \end{cases}$$

を考えよう。ここに $V(x)$ は適当な条件をみたす、
実数値の Potential 函数。 φ_0 は初期値。

Feynman [1] は上の方程式の解を

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{A} \int_{C_{t, x}} e^{\frac{i}{2} \int_0^t \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 d\tau - i \int_0^t V(x(\tau)) d\tau} \varphi(x(0)) d\mathcal{Q}x$$

と path 空間: $C_{t, x} = \{x: [0, t] \rightarrow R; x(t) = x\}$
上の Lebesgue like measure " $d\mathcal{Q}x$ ", による
積分で表わす事を試みた。ここに A はある無限大
の定数。

ここでは $\frac{1}{A} e^{\frac{i}{2} \int_0^t \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 d\tau} d\mathcal{Q}x = d\mu_F$ とおいて、
 $\int_{C_{t, x}} F(x) d\mu_F$ を $F(x)$ に対する Functional

と可なり $\int ? d\mu_F$ なる積分を定義しよう。

§1. H を $\mathbb{R}$ 上の separable Hilbert space とする. $H' = H$: dual of Hilbert space H . この H 上で積分 $\int_H F(x) d\mu_F(x)$ を定義した. $\langle x, \xi \rangle$: dual pairing, $x \in H, \xi \in H', \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$: 内積とする。

定義 1

(1) $\xi \in H'$ について $f(x) = e^{i\langle x, \xi \rangle}$ と表わされる

H 上の function f について

$$\int_H f(x) d\mu_F \equiv e^{-\frac{i}{2}\|\xi\|^2} \quad \text{と置く.}$$

(2) 変換 $\mathcal{J}: f(x) = e^{i\langle x, \eta \rangle}, \eta \in H'$ について

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(f)(\xi) &\equiv e^{\frac{i}{2}\|\xi\|^2} \int_H f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} d\mu_F(x) \\ &= e^{\frac{i}{2}\|\xi\|^2} e^{-\frac{i}{2}\|\xi - \eta\|^2} = e^{-\frac{i}{2}\|\eta\|^2 + i\langle \xi, \eta \rangle} \end{aligned}$$

なる H' 上の function を表える。

今 $E'_H = E' = \{ \sum a_j e^{i\langle x, \eta_j \rangle} = f(x), a_j \in \mathbb{C}, \eta_j \in H' \}$ なる H 上の functions のつくる $\mathbb{C}$ -上の vector space を表える。ただし $f \sim f' \Leftrightarrow f(x) = f'(x) \quad \forall x \in H$ 。

$\mathcal{J}$ も linear に拡張する事により, $\mathcal{J}$ は $\mathcal{J}: E'_H \rightarrow E'_H$ なる linear map を定義する。

この逆変換 $\mathcal{F}$ を次のようにつくる事が出来る。

1) $x \in H$ について H' 上の function $g(\xi) = e^{+i\langle x, \xi \rangle}$ に対し $\int_{H'} e^{+i\langle x, \xi \rangle} d\hat{\mu}_F(\xi) \equiv e^{\frac{i}{2}\|x\|^2}$ とおく。

2) $g(\xi) = e^{+i\langle y, \xi \rangle}$, $y \in H$ について

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g)(x) &\equiv e^{-\frac{i}{2}\|x\|^2} \int_{H'} g(\xi) e^{+i\langle x, \xi \rangle} d\hat{\mu}_F(\xi) \\ &= e^{\frac{i}{2}\|y\|^2 + i\langle y, x \rangle} \end{aligned}$$

この時 $\mathcal{F}\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{F} = \text{id}$ が成立し $\mathcal{F}: E_H \rightarrow E_H'$ の isomorphism of vector space を与える。

ここで H' 上の $\mathbb{C}$ -valued functions のつくる topological vector space を $\mathcal{C}$ と導入しよう。

定義 2.

(1) $\mathcal{C} = \{ \varphi: H' \rightarrow \mathbb{C} : \text{連続}, |\varphi| \equiv \sup_{\xi} |\varphi(\xi)| < \infty \}$
Banach space with norm $|\cdot|$.

(2) $\mathcal{A} = \{ \varphi: H' \rightarrow \mathbb{C}, \|\varphi\|^2 < \infty \}$ に対し φ は次の表現 $\varphi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\xi)$ をもつ。

$$\varphi_n(\xi) = \langle f_n, \xi \otimes \cdots \otimes \xi \rangle, \quad \exists f_n \in \widehat{H^{\otimes n}}$$

ここに $\widehat{H^{\otimes n}}$ は H の n 次対称 tensor 積。

かつ $\|\varphi\|^2 \equiv \sum_n \|f_n\|^2$ で定義される。

この時 $\mathcal{A}$ は $\|\cdot\|^2$ で Hilbert space となる。

E' は $\mathcal{C}$ 及び $\mathcal{A}$ の subspace となる事を注意しよう。

変換 $\gamma: E_H \xrightarrow{\sim} E'_H$ により C 及び A の norm $|| \cdot ||$ で E_H を completion した topological vector space を $E(C)$ 及び $E(A)$ で表わす。単に E と表わした時には $E(C)$ 又は $E(A)$ のどちらかを表わすものとする。 H を表わした時は $E_H(C)$, $E_H(A)$ 又は E_H と表わす事にする。

定義 3

(1) E の元達を H 上の Feynman integrable elements と呼ぶ

(2) $f \in E$ に対し $\int_H f d\mu_F \equiv \gamma(f)(0)$ で定義する。

注意

(1) $f \in E$ の元は H 上の各点で定義された function としての意味は一般にはもってない。 $f \in E$

に於ては $\int_H f(\sum_j a_j \bar{e}^{i\langle x, \eta_j \rangle}) d\mu_F \equiv \sum_j a_j \gamma(f)(\eta_j) \cdot e^{-\frac{i}{2} \|\eta\|^2}$ が意味をもつ。

(2) $f, g \in E$ はに於て 積 $f \cdot g$ は一般には意味をもたない。

Proposition 1.

$\gamma: E(A) \rightarrow A$ は iso. of Hilbert space.

証明. injection は定義より O.K. onto のみが問題.

$s_1, \dots, s_e \in \mathbb{R}$, $\eta_1, \dots, \eta_e \in H'$ に対して $f(x; s_1, \dots, s_e)$
 $\equiv e^{i \sum_{j=1}^e s_j \eta_j} + \sum_{j=1}^e i \langle x, \eta_j \eta_j \rangle$ とおく.

$$\mathcal{J}(f)(\xi) = e^{-i \langle \sum_{j=1}^e s_j \eta_j, \xi \rangle}$$

$$= \sum_n \sum_{n_1 + \dots + n_e = n} \frac{(-i)^n n_1! \dots n_e!}{n!} s_1^{n_1} \dots s_e^{n_e} \\ \cdot \langle \eta_1, \xi \rangle^{n_1} \dots \langle \eta_e, \xi \rangle^{n_e}$$

故は $\mathcal{J}(f)(\cdot; \cdot); \mathbb{R}^e \rightarrow A$ とは real analytic function. だからその係数連 $\langle \eta_1, \xi \rangle^{n_1} \dots \langle \eta_e, \xi \rangle^{n_e}$ は $E(A)$ の image. 一方 A は $\langle \eta_1, \xi \rangle^{n_1} \dots \langle \eta_e, \xi \rangle^{n_e}$ の形の元素で張られる. 故に onto が示された.

次に $\eta_1, \dots, \eta_e \in H'$ に対して $f(x) \equiv \langle x, \eta_1 \rangle^{n_1} \dots \langle x, \eta_e \rangle^{n_e}$ と表わされる H 上の function を考えよう. この形の $\mathbb{C}$ 上の一次結合も H 上の多項式と呼ぼう.

Proposition 2.

多項式は $E(A)$ の元である.

証明. $\langle x, \eta_1 \rangle^{n_1} \dots \langle x, \eta_e \rangle^{n_e} \in E(A)$ をいえるのはよい.

$g(x; s_1, \dots, s_e) = e^{i \sum_{j=1}^e s_j \eta_j}$ とおく

$$g(x; s) = \sum_n \sum_{n_1 + \dots + n_e = n} \frac{i^n n_1! \dots n_e!}{n!} s_1^{n_1} \dots s_e^{n_e}$$

$$\langle x, \eta_1 \rangle^{n_1} \dots \langle x, \eta_e \rangle^{n_e}$$

$$\text{一方 } \mathcal{J}(g)(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\|\sum \theta_j \eta_j\|^2 + i\langle \sum \theta_j \eta_j, \xi \rangle}$$

この函数は $\mathbb{R}^l \rightarrow A$ と考え $\mathbb{R}$ real analytic.

だから その $a_1^{n_1} \dots a_l^{n_l}$ についての係数も A の元. 故に $\mathcal{J}(\langle x, \eta_1 \rangle^{n_1} \dots \langle x, \eta_l \rangle^{n_l}) \in \mathcal{F}$. 故に

$$\langle x, \eta_1 \rangle^{n_1} \dots \langle x, \eta_l \rangle^{n_l} \in F(A).$$

例. $\eta \in H'$ について $f(x) = \langle x, \eta \rangle^n$ を考える.

$$g(x, s) = e^{i\langle x, \eta \rangle s} = \sum_n \frac{i^n}{n!} s^n \langle x, \eta \rangle^n.$$

$$\mathcal{J}(g)(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\|\eta\|^2 s^2 + i\langle \eta, \xi \rangle s}$$

$$= \sum_n \sum_{\ell+2m=n} \frac{(-i)^\ell (i)^m}{\ell! m! 2^m} s^n \|\eta\|^{2m} \langle \xi, \eta \rangle^\ell.$$

$$\mathcal{J}(\langle x, \eta \rangle^n)(\xi)$$

$$= \sum_{\ell+2m=n} \frac{n!}{\ell! m! 2^m} i^m \|\eta\|^{2m} \langle \xi, \eta \rangle^\ell$$

$$\int_H \langle x, \eta \rangle^n d\mu_F = \begin{cases} \frac{(2m)!}{m! 2^m} i^m \|\eta\|^{2m} & \text{if } n=2m \\ 0 & n: \text{odd.} \end{cases}$$

今 $H = H_1 \oplus H_2$ - direct sum of Hilbert spaces とする。

Proposition 3

(1) $f_1 \in E_{H_1}$, $f_2 \in E_{H_2}$ に対し 積 $f = f_1 \cdot f_2 \in E_H$ が定義できて.

$$J(\varphi)(\xi_1 \oplus \xi_2) = J_{H_1}(\varphi_1)(\xi_1) \cdot J_{H_2}(\varphi_2)(\xi_2).$$

$$\int_H \varphi d\mu_F = \left(\int_{H_1} \varphi_1 d\mu_F \right) \cdot \left(\int_{H_2} \varphi_2 d\mu_F \right).$$

(2) $p: H \rightarrow H_1$: orthogonal projection である。

$\varphi \in E_{H_1}$ について pull-back $p^*\varphi \in E_H$ が定義できて。

$$J_H(p^*\varphi)(\xi_1 \oplus \xi_2) = J_{H_1}(\varphi)(\xi_1), \quad \xi_1 \oplus \xi_2 \in H_1 \oplus H_1^\perp = H.$$

$$\int_H p^*\varphi d\mu_F = \int_{H_1} \varphi d\mu_F$$

証明. 定義にもとづけばよい。

$H = \mathbb{R}^n$ finite dim. Hilbert space とする。

$f(x) = e^{i\langle x, \xi \rangle}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ について. 定義より.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mu_F = e^{-\frac{i}{2}\|\xi\|^2}$$

$$\rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} e^{\frac{i}{2}\|x\|^2} dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} e^{\frac{i}{2}\|x\|^2 - \varepsilon\|x\|^2} dx \quad \text{と考える}$$

$$= (\sqrt{2\pi i})^n e^{-\frac{i}{2}\|\xi\|^2}$$

ただし $\sqrt{i} = e^{\frac{i}{4}}$ と考える。

この事から $\mathbb{R}^n$ 上では

$$d\mu_F = \frac{e^{\frac{i}{2}\|x\|^2}}{(\sqrt{2\pi i})^n} dx \quad \text{と考える。}$$

Proposition 4.

$\mathbb{R}^n$ 上で考えると

$$\mathcal{J}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x) e^{\frac{i}{2}\|x-\xi\|^2}}{(\sqrt{2\pi i})^n} dx \quad \text{が成立する。}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mu_F = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x) e^{\frac{i}{2}\|x\|^2}}{(\sqrt{2\pi i})^n} dx.$$

§2. $t > 0$, $g \in \mathbb{R}$ を固定しよう. Hilbert space H とし $H = \{ \gamma: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}, \gamma(t) = g \}$. γ : 絶対連続 $\int_0^t |\dot{\gamma}(\tau)|^2 d\tau < \infty$ とし. $\|\gamma\|^2 = \int_0^t |\dot{\gamma}(\tau)|^2 d\tau$ で Hilbert space とする. $H \ni \gamma \rightarrow \dot{\gamma} \in L^2([0, t])$ によって, H と $L^2([0, t])$ は Hilbert space の同型を与える。

$0 \leq t_1 < t_2 \leq t$ $\Delta = [t_1, t_2]$ について χ_Δ で Δ の特性函数を表わす. この時 $\chi_\Delta \in L^2$, $\|\chi_\Delta\|^2 = |\Delta| = |t_2 - t_1|$.

1) $s \in [0, t]$ に対し. $H \ni \gamma \rightarrow \gamma(s) \in \mathbb{R}$ なる函数を考える. $\gamma(s) = g + \int_s^t \dot{\gamma}(\tau) d\tau = g + \langle \dot{\gamma}, \chi_{[s, t]} \rangle$ と表わされる. こゝに $\langle, \rangle$ は $L^2([0, t])$

の内積. ($f \rightarrow f$ で $H \in L^2([0, t])$ と identify し
内積, norm は $L^2([0, t])$ の内積. norm で
表わす事とする。) この時 $f \in H \rightarrow f(\xi) \in \mathbb{R}$ なる
function は $E(A)$ の元.

2) $\Delta = [t_1, t_2] \subseteq [0, t]$ $t_1 < t_2$ について

$H \ni f \rightarrow f(\Delta) \equiv f(t_2) - f(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(\xi) d\xi$
 $= \langle f, \chi_\Delta \rangle$ と表わされる. 故に この 函数 も
 $E(A)$ の元.

3) $\Delta_i = [t_i, t'_i] \subseteq [0, t]$, $t_i < t'_i$ $i = 1, \dots, n$.

今 $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ if $i \neq j$ とする. $\langle \frac{\chi_{\Delta_i}}{\sqrt{\Delta_i}}, \frac{\chi_{\Delta_j}}{\sqrt{\Delta_j}} \rangle = \delta_{ij}$.

$\frac{f(\Delta_i)}{\sqrt{\Delta_i}} = \langle f, \frac{\chi_{\Delta_i}}{\sqrt{\Delta_i}} \rangle$ と表わされるから

$H \ni f \rightarrow (\frac{f(\Delta_1)}{\sqrt{\Delta_1}}, \dots, \frac{f(\Delta_n)}{\sqrt{\Delta_n}}) \in \mathbb{R}^n$ は

Hilbert 空間の間の orthogonal projection
 を与える. かつ $f \in E_{\mathbb{R}^n}$ について $f(\frac{f(\Delta_1)}{\sqrt{\Delta_1}}, \dots, \frac{f(\Delta_n)}{\sqrt{\Delta_n}})$
 は E_H の元を与える. (Prop. 3 より). 特に

$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ として $f_0(f) = f(f(\Delta_1), \dots, f(\Delta_n))$
 とすると $f_0 \in E(C)$ である. $\mathcal{T}(f_0)(\xi)$ を
 explicit に表わそう. Prop. 3, 4 より.

$$\mathcal{T}(f_0)(\xi) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\sqrt{\Delta_1} y_1, \dots, \sqrt{\Delta_n} y_n)$$

$$e^{\frac{i}{2} \sum |y_j - \langle \xi, \frac{\chi_{\Delta_j}}{\sqrt{\Delta_j}} \rangle|^2} dy_1 \dots dy_n$$

$$= \frac{1}{\prod_{j=1}^n \sqrt{2\pi i} |\Delta_j|} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x_1, \dots, x_n) e^{\frac{i}{2} \sum_{j=1}^n \frac{|x_j - \langle \xi, x_j \rangle|^2}{|\Delta_j|}} dx_1 \dots dx_n$$

$$\int_H \varphi_F d\mu_F = \frac{1}{\prod_{j=1}^n \sqrt{2\pi i} |\Delta_j|} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x_1, \dots, x_n) e^{\frac{i}{2} \sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{|\Delta_j|}} dx_1 \dots dx_n$$

4) $F(x_0, x_1, \dots, x_n) \in L^1(\mathbb{R}^{n+1}) \Rightarrow \mathcal{J}_F(\gamma) \equiv \int_0^t \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} F(\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)) dt_1 \dots dt_n \in E(\mathbb{C})$

を次のように定義しよう.

$$\mathcal{J}(\varphi_F)(\xi) = \int_0^t \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{F(\eta + \sum_{j=0}^n (t_{j+1} - t_j) y_j, \dots, \eta + (t_{n+1} - t_n) y_n)}{(\sqrt{2\pi i})^{n+1}} e^{\frac{i}{2} \sum_{j=0}^n |y_j - \langle \xi, \frac{x_{[t_j, t_{j+1}]} \rangle|^2}{|t_{j+1} - t_j|}} dy_0 \dots dy_{n+1} dt_1 \dots dt_n$$

ただし $t_0 = 0$, $t_{n+1} = t$. この積分は well defined.

変数変換を

$$\mathcal{J}(\varphi_F)(\xi) = \int_0^t \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{F(\eta + \sum_{j=0}^n x_j, \eta + \sum_{j=1}^n x_j, \dots, \eta + x_n)}{\prod_{j=0}^n \sqrt{2\pi i} (t_{j+1} - t_j)} e^{\frac{i}{2} \sum_{j=0}^n \frac{|x_j - \langle \xi, x_{[t_j, t_{j+1}]} \rangle|^2}{|t_{j+1} - t_j|}} dx_0 \dots dx_n dt_1 \dots dt_n$$

$$\int_H \varphi_F d\mu_F = \int_0^t \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{\varphi(\eta + \sum_{j=0}^n x_j, \dots, \eta + x_n)}{\prod_{j=0}^n \sqrt{2\pi i} (t_{j+1} - t_j)} e^{\frac{i}{2} \sum_{j=0}^n \frac{x_j^2}{|t_{j+1} - t_j|}} dx_0 \dots dx_n dt_1 \dots dt_n$$

5) 最後に $V \in L^1(R)$, $\varphi \in L^1(R)$ について
 $\varphi(x) \equiv e^{-i \int_0^x V(x(z)) dz} \varphi(x(0)) \in E(C)$
 を次の式で定義しよう。

$$\varphi \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_0^x \int_0^{t_2} \varphi(x(0)) V(x(t_1)) \cdots V(x(t_n)) dt_1 \cdots dt_n$$

右辺の各項は $\varphi(x_0) V(x_1) \cdots V(x_n) \in L^1(R^{n+1})$

より、4) の結果より、 $E(C)$ の元を定義している。

φ は Banach space $E(C)$ valued の級数
 として絶対収束し、 $\varphi \in E(C)$ である事が
 分る。

$$\begin{aligned} \int_H e^{-i \int_0^x V(x(z)) dz} \varphi(x(0)) d\mu_F &= \int_H \varphi(x) d\mu_F \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_0^x \int_0^{t_2} \int_{R^{n+1}} \frac{\varphi(x + \sum_{j=0}^n x_j) V(x + \sum_{j=1}^n x_j) \cdots V(x + x_n)}{\prod_{j=0}^n \sqrt{2\pi i (t_{j+1} - t_j)}} \\ &\quad e^{\frac{i}{2} \sum_{j=0}^n \frac{x_j^2}{t_{j+1} - t_j}} dx_0 \cdots dx_n dt_1 \cdots dt_n \end{aligned}$$

文 献.

[1] R. Feynman. Rev. Mod. Phys. 20 367. (1948)

[2] 竹田武幸. : ブラウシ運動. 岩波書店(1975)