

ディリクレ問題に於ける領域の摂動

大同工業大学 中 井 三 留 (Mitsuru Nakai)

1. 序論

1.1. 個人的動機. 幾つかの研究テーマの一つとして1980年代末から着手したコンデンサー問題の研究の中で, d 次元($d \geq 2$)ユークリッド空間 $\mathbf{R}^d$ の有界領域 R で連続領域(又時には C 型領域)と呼ばれるものについて(後出の小節3.1参照)次の主張が正しいか否かの問題に遭遇した:

主張 1.1. R 上の調和関数 u で $\nabla u \in L^2(R)$ となるものと, $\bar{R} \subset R'$ で $R' \setminus R$ の各成分が R' 内相対コンパクトでない様なある領域 R' と, 正数 $\varepsilon > 0$ を任意に与える時, 常に R' 上の調和関数 h で $\|\nabla u - \nabla h; L^2(R)\| < \varepsilon$ となるものが見つかる.

この問題は少し考えれば, 誰でもそうであると思うが, これがディリクレ問題の安定性と深く関わる事に気付くので, ディリクレ問題における領域の摂動問題の研究へと自然に誘われた. この分野での先駆的な仕事であるKeldyshの論文[6]及びそれを掃散問題の見地から再構成したLandkofの本[7]を主として参考にして, 上の問題を念頭に置きつつ摂動問題を考えた. そして得られた二つの結果(一つは発表済み, 一つは未発表)について述べるのが本稿の目的である. そして最終的には, これらの成果に基づいて上記主張の正しい事を示し得た(本稿の本文の最後で参考文献の直前の小節3.3にその証明を述べる).

1.2. 内向き変動. $\mathbf{R}^d$ の領域 R 上の調和関数 u , 即ち R 上のラプラス方程式 $\Delta u = 0$ を満たす C^2 関数 u , の全体を $H(R)$ と記す. $\mathbf{R}^d$ の有界領域 R と $f \in C(\mathbf{R}^d)$ にたいして, R 上境界値 $f|_{\partial R}$ の一般化された調和ディリクレ解 H_f^R は次の二性質により特徴付けられる: $H_f^R \in H(R)$; ∂R の容量零の点集合 E があって, 各 $y \in \partial R \setminus E$ に対して

$$(1.1) \quad \lim_{x \in R, x \rightarrow y} H_f^R(x) = f(y)$$

となる, 但し E の容量 $\text{cap}(E)$ は $d = 2$ なら対数容量, $d \geq 3$ ならニュートン容量を意味する. ここで $C(\mathbf{R}^d)|_{\partial R} = C(\partial R)$ であり, H_f^R は実質的には $(R, f|_{\partial R})$ だけに依存するが, 以下 H_f^R は (R, f) で定まると見る. (1.1)が全ての $f \in C(\mathbf{R}^d)$ に対して成り立つ様な $y \in \partial R$ を正則点と呼びその全体を ρR と記す:

$$(1.2) \quad \rho R := \{y \in \partial R : y \text{ は正則点}\}.$$

するとKellogの定理, 即ち $\text{cap}(\partial R \setminus \rho R) = 0$, が成立する.

組 (R, f) の変動に応じて H_f^R が如何に変動するかを明らかにする事は応用上, 例えば電気工学等に於いて, 重用である. R を留めて f だけ変動させる時, 最大値の原理から

$$\|H_f^R - H_g^R; L^\infty(R)\| \leq \|f - g; L^\infty(\partial R)\| \leq \|f - g; L^\infty(\mathbf{R}^d)\|$$

であるので, H_f^R は f の変動に対して連続である. それ故 f を留めて R を変動させた時 H_f^R がどの様に変動するかを研究する事だけが問題となる. R の一般の変動に応じての H_f^R の変動の研究は, R の内向きの変動の場合と外向きの変動の場合とに分けて調べると良い.

R の内向きの変動を考える為に, R の近似 $(R_i)_{i \geq 1}$ を考える, 即ち $\bar{R}_i \subset R$ かつ $\bigcup_{i \geq 1} R_i = R$ となる領域 R_i の列である. すると次の Wiener の定理が成り立つ: どんな R の近似 $(R_i)_{i \geq 1}$ に対しても R 上殆一様に

$$(1.3) \quad H_f^R(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} H_f^{R_i}(x) \quad (x \in R)$$

となる, 即ち, H_f^R は R の内向きの変動に対して連続である. これは $f|_{\bar{R}}$ が $\bar{R}$ 上劣調和関数の差で一樣近似される事に注目すればよい事に過ぎない. 元々, 一般の有界領域 R に対して, 本来の意味でディリクレ問題が解ける様な R_i (例えば適当な有限個の球の合併) に依る近似をとって $H_f^{R_i}$ を作り, (1.3) により一般解 H_f^R を得ると言うのが Wiener の着想であったので, H_f^R を下に述べる所のものとの対比としてディリクレ内部解と言う事もある.

1.3. 外向き変動. 上記の次第によりこうして外向き変動の場合のみが残る. 外向き変動を可能にする為, 以下断らぬ限り, $\mathbf{R}^d$ の有界領域 R は更にカラテオドリ型とする: $\partial \bar{R} = \partial R$. つまり ∂R のどの点も R の外点の集積点となっているとする. さて $R_i \supset \bar{R}$ かつ $\partial R_i \rightarrow \partial R$ (即ち, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して或番号以上の全ての i について ∂R_i と ∂R のいずれの一方の ε 近傍も他方を含む事) となる様な領域 R_i の列 $(R_i)_{i \geq 1}$ を $\bar{R}$ の圧搾と言う. すると上記 Wiener の定理と同様の証明で次の Wiener 型定理が成り立つ: R と $f|_{\partial R}$ だけで定まる $\bar{R}$ 上の関数 $H_f^{\bar{R}}$ が定まって, どんな $\bar{R}$ の圧搾 $(R_i)_{i \geq 1}$ に対しても, $\bar{R}$ 上では点毎にかつ R 上殆一様に

$$(1.4) \quad H_f^{\bar{R}}(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} H_f^{R_i}(x) \quad (x \in \bar{R})$$

となる. $H_f^{\bar{R}}$ をディリクレ外部解と呼ぶ事もある. 周知の如く R の補集合 R^c に対する掃散作用素 β_{R^c} を使ってディリクレ内部解 H_f^R が

$$(1.5) \quad H_f^R(x) = \int_{\partial R} f(y) d\beta_{R^c} \varepsilon_x(y) \quad (x \in R)$$

と表せる, 但し ε_x は $x \in R$ に台を持つディラック測度である. これに対応してディリクレ外部解 $H_f^{\bar{R}}$ は $\bar{R}^c$ に対する掃散作用素 $\beta_{\bar{R}^c}$ を使って

$$(1.6) \quad H_f^{\bar{R}}(x) = \int_{\partial R} f(y) d\beta_{\bar{R}^c} \varepsilon_x(y) \quad (x \in \bar{R})$$

と表される事は (1.4) と $\beta_{\bar{R}^c}$ の定義から明白である (例えば [7] 参照).

H_f^R が R の外向き変動に関して連続と言う事は, どんな $\bar{R}$ の圧搾 $(R_i)_{i \geq 1}$ についても $H_f^R(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} H_f^{R_i}(x)$ ($x \in R$) となると言う事, つまり $H_f^R|_R = H_f^{\bar{R}}|_R$ となる事である. もし全て

の $f \in C(\mathbf{R}^d)$ について常にそうなら、これで領域の摂動問題はすべて終わりとなる訳であるが、実際はそうでない。 $H_f^{\bar{R}} \neq H_f^R$ となる $f \in C(\mathbf{R}^d)$ が存在する様な R の例があるからである。これはしばしば Keldysh 球と呼ばれる Keldysh [6] の作った位相球 K (即ち $\bar{K}$ が $\mathbf{R}^d$ の閉単位球 $\bar{B}^d$ に同相な領域 K) で、第一に位相球であるばかりでなく更に次の意味で極めて正常なものであるので大変に意外な例であると言える: $\rho K = \partial K$; K の表面積 (即ち ∂K の $(d-1)$ 次元ハウスドルフ測度) は有限。それ故次の定義は意味がある。全ての $f \in C(\mathbf{R}^d)$ に対して $H_f^{\bar{R}}|_R = H_f^R$ となる時、ディリクレ問題は R で安定であると言う。引用の簡明の為此の様な領域 R を安定であると言う事にする。ついでに、全ての圧搾 $(R_i)_{i \geq 1}$ と全ての $f \in C(\mathbf{R}^d)$ に対して関数列 $(H_f^{R_i}|_{\partial R})_{i \geq 1}$ が $f|_{\partial R}$ に一様収束する時、ディリクレ問題は $\bar{R}$ で安定であるという。上と同様の趣旨でこの時 $\bar{R}$ を安定であると言う。 $\bar{R}$ が安定なら R は必然的に安定であるが、逆は真でない事は、この論文を最後迄読めば自然にわかる。

1.4. 局所化. $\bar{R}$ の安定性は調和関数の調和多項式などによる調和一様近似の問題と密接に関わるが、主張 1.1 の真偽の判定にとって重用であるのは R の安定性である。何れの安定性についてもそれらを扱い易くする為にはそれらの局所化が不可欠である。全ての $f \in C(\mathbf{R}^d)$ に対して $H_f^{\bar{R}}(y) = f(y)$ となる様な境界点 $y \in \partial R$ を安定点と言う事にする。 ∂R の安定点の全体を σR と記す:

$$(1.7) \quad \sigma R := \{y \in \partial R : y \text{ は安定点}\}.$$

この集合 σR の言葉で R 及び $\bar{R}$ の安定性を特徴付ける Keldysh [6] の二つの基本定理がある。(1.5) に現れる測度 $\beta_{R^c \varepsilon_x}$ は実は ∂R 上の測度であって、 ∂R の部分集合 E に対して $\beta_{R^c \varepsilon_x}(E) = 0$ となるか否かは $x \in R$ の取り方に依存しない。 $\beta_{R^c \varepsilon_x}$ は ∂R 上の調和測度と呼ぶ。 $\text{cap} E = 0$ ならば E は調和測度 0 となる事が分かる。すると

Keldysh の第 1 基本定理. $\bar{R}$ が安定となる為の必要十分条件は $\partial R \setminus \sigma R = \emptyset$ である。

Keldysh の第 2 基本定理. R が安定となる為の必要十分条件は $\partial R \setminus \sigma R$ の調和測度が零となることである。

本論文の第一の目的は上の Keldysh の第 2 基本定理における $\partial R \setminus \sigma R$ が調和測度零を持つと言う条件を $\text{cap}(\partial R \setminus \sigma R) = 0$ という条件で置換えうる事を示す事にある (小節 2.1 参照)。従って、 $\partial R \setminus \sigma R$ が調和測度零となることと $\text{cap}(\partial R \setminus \sigma R) = 0$ は同値となる。次に、例えば下の 2.2 で述べる所を使えば分かるように

$$(1.8) \quad \sigma R \subset \rho R$$

が成立する。前述の安定でない例である所の Keldysh 球 K では $\rho K = \partial K$ であって、Keldysh の第 2 基本定理により $\partial K \setminus \sigma K$ が調和測度正を持つ故特に $\partial K \setminus \sigma K \neq \emptyset$ であるので (1.8) が等号でない場合が起こるし勿論等号になる事も起こる事は後程明らかとなる。 $y \in \rho R$ となる使い易い幾何学的条件 (例えば錐条件等) が色々知られているので、 $y \in \rho R$ なら $y \in \sigma R$ となる十分に適用範囲の広い使い易い幾何学的条件があれば誠に都合がよい。本論文の第二の目的はこの様な条件 (具体的には、グラフ点である事と言い表すもの) を説明する事

にある (小節 3.1 参照) .

2. 領域の安定条件

2.1. 非安定点集合. $\partial R \setminus \sigma R$ の各点は非安定点と呼ぶのが自然なので, $\partial R \setminus \sigma R$ を非安定点集合と呼ぶ事になる. R の安定性と $\partial R \setminus \sigma R$ のサイズの間の関係を与える Keldysh の第 2 基本定理は次の様に精密化出来る:

定理 2.1. 次の三条は互いに同値である:

- (a) R は安定である;
- (b) $\partial R \setminus \sigma R$ は調和測度零を持つ;
- (c) $\text{cap}(\partial R \setminus \sigma R) = 0$.

この結果はプレプリント [10] に纏めてはあるが未だ発表はしていないので, ここに詳しい証明を述べておく. 証明にはポテンシャルをカトー族の測度に持つシュレーディンガー方程式を利用する点に興味があると思う. 二つの準備的な考察の後で上記定理を証明する.

2.2. 外部グリーン関数. g を $\mathbf{R}^d$ 上の基本調和関数とする, 即ち $g(0) = +\infty$ であって, $x \neq 0$ に対しては, $g(x) = \log(1/|x|)$ ($d=2$) 又は $g(x) = 1/|x|^{d-2}$ ($d \geq 3$) とする. $\mathbf{R}^d$ 上の一般符号ラドン測度 μ の対数 ($d=2$) 又はニュートン ($d \geq 3$) ポテンシャル U^μ は, 意味がある限り,

$$U^\mu(x) := g * \mu(x) = \int_{\text{spt} \mu} g(x-y) d\mu(y)$$

で定める, 但し $\text{spt} \mu$ は μ の台とする.

$\mathbf{R}^d$ の有界カラテオドリ領域 R をとる. R 上の通常のグリーン関数 (即ち下との対比で言えば内部グリーン関数) $G(x, y) = G^R(x, y)$ に加うるに R 上の外部グリーン関数 $G^*(x, y) = (G^R)^*(x, y)$ を次の様に定める. R の圧搾 $(R_i)_{i \geq 1}$ と R_i のグリーン関数 $G_i(x, y)$ により $G^*(x, y)$ を

$$(2.1) \quad G^*(x, y) := \lim_{i \rightarrow \infty} G_i(x, y) \quad ((x, y) \in \bar{R} \times \bar{R})$$

と定義する. ここで (2.1) の右辺は圧搾 $(R_i)_{i \geq 1}$ の取り方に依らぬ事はグリーン関数に関する領域拡大の原理から直ちに分かる. 外部グリーン関数 $G^*(x, y)$ の性質を見る為に圧搾 $(R_i)_{i \geq 1}$ を $\bar{R}_{i+1} \subset R_i$ で $\rho R_i = \partial R_i$ となる様なもので (2.1) を考える. すると $\bar{R} \times \bar{R}$ 上 $G_i(x, y) \downarrow G^*(x, y)$ である. これより次の二性質が出る: 各 $y \in R$ につき $G^*(\cdot, y) \in H(R \setminus \{y\})$; 各 $y \in R$ につき R 上 $G^*(\cdot, y) > 0$. $G_i(x, y)$ の対称性から, $G^*(x, y)$ の対称性が出る: $G^*(x, y) = G^*(y, x)$ ($(x, y) \in \bar{R} \times \bar{R}$). $R \times R$ 上 $G_i(x, y) \geq G(x, y)$ だから $G^*(x, y) \geq G(x, y)$ ($(x, y) \in R \times R$) となる. $R \times R$ 上 $G_1(x, y) \geq G^*(x, y) \geq G(x, y)$ であるので, どの $y \in R$ に対しても $G(\cdot, y) - g(\cdot - y) \in H(R)$ かつ $G_1(\cdot, y) - g(\cdot - y) \in H(R)$ から $G^*(\cdot, y) - g(\cdot - y) \in H(R)$ が分かる.

更に $G^*(x, y)$ の境界挙動を研究するには, (1.6) より従う $G^*(x, y)$ の別の表示

$$(2.2) \quad G^*(x, y) = U^\varepsilon(x) - U^{\beta_{\bar{R}^c \varepsilon} \nu}(x) \quad ((x, y) \in \bar{R} \times \bar{R})$$

を使う。これより次の重要な性質が出る ([7, p.333] 参照): 任意に $b \in R$ を固定する時, $a \in \partial R$ に対して

$$(2.3) \quad G^*(a, b) = 0$$

となる必要十分条件は $a \in \sigma R$ となることである; 同値な表現として, $b \in R$ を任意に固定する時 $a \in \partial R$ に対し

$$(2.4) \quad G^*(a, b) > 0$$

となる必要十分条件は $a \in \partial R \setminus \sigma R$ である; (2.3) の関連で $(x, y) \mapsto G^*(x, y)$ は $\bar{R} \times R$ 上の関数として (a, b) で連続である。

ここで (2.3) は $(a, b) \in \sigma R \times R$ に対して成り立つばかりでなく $(a, b) \in \sigma R \times (\bar{R} \setminus \{a\})$ に対しても成り立ち, $\bar{R} \times \bar{R}$ 上の関数として $(x, y) \mapsto G^*(x, y)$ は $(a, b) \in \sigma R \times (\bar{R} \setminus \{a\})$ で連続となる。これを証明する為には自明の場合を除外して $b \in \partial R \setminus \{a\}$ の場合のみ考えたらよい。 $B := B(b, r) = \{|x - b| < r\}$ とおき $r > 0$ を $a \notin \bar{B}$ となる様に十分に小さく取る。 $R' = \overline{R \cup B} \setminus \partial(\bar{R} \cup B)$ と置く。 R' は $R' \supset R \cup (\bar{R} \cap B)$ である様な有界カラテオドリ領域となる。 R' の外部グリーン関数を $G'^*(x, y)$ とする。 $a \in \sigma R$ は局所的な性質である (例えば, $a \in \sigma R$ となる為の必要十分条件であるウィーナー型判定条件 ([6], [7, p.287]) を見れば分かる) ので, $a \in \sigma R'$ である。 $b \in R'$ だから (2.3) により $G'^*(a, b) = 0$ であって $\bar{R}' \times \bar{R}'$ 上の関数として $(x, y) \mapsto G'^*(x, y)$ は (a, b) で連続である。 $0 \leq G''(x, y) \leq G'^*(x, y)$ より $G^*(a, b) = 0$ で $\bar{R} \times \bar{R}$ 上の関数として $(x, y) \mapsto G^*(x, y)$ は (a, b) で連続である。

上の (2.3) に依れば, ρR が Bouligand の定理により, 任意の $y \in R$ に対して

$$(2.5) \quad \rho R = \{z \in \partial R : \lim_{x \in R, x \rightarrow z} G^R(x, y) = 0\}$$

と特徴付けられる様に, σR も又, 任意の $y \in R$ に対して

$$(2.6) \quad \sigma R = \{z \in \partial R : (G^R)^*(z, y) = 0\}$$

の様に特徴付けられる。これ等と不等式 $G^R(x, y) \leq (G^R)^*(x, y)$ により $\sigma R \subset \rho R$ が分かる。

2.3. シュレーディンガー方程式のブルロー空間。 $\mathbf{R}^d$ 上の一般符号ラドン測度 μ をポテンシャルに持つ様な定常シュレーディンガー方程式

$$(2.7) \quad (-\Delta + \mu)u = 0$$

を $\mathbf{R}^d$ の開集合 D 上で超関数の意味で満たす連続解 u を D 上の μ 調和関数と言ひその全体を ${}_{\mu}H(D)$ と記す。すると ${}_{\mu}H : D \mapsto {}_{\mu}H(D)$ は $\mathbf{R}^d$ の開集合族上の連続関数の層 (通常調和層と言う) を定義する。その時 $(\mathbf{R}^d, {}_{\mu}H)$ がブルロー空間 ([3], [8] 参照) となる為の十分条件は μ がカトー族の測度となる事である ([1], [2] 参照)。ここで μ がカトー族の測度であるとは, 任意の $\mathbf{R}^d$ のコンパクト集合 K に対して $U^{\mu|K} \in C(\mathbf{R}^d)$ となることである, 但し $|\mu|$ は μ の全変分測度である。特に μ が定符号 (即ち $\mu = |\mu|$ 又は $\mu = -|\mu|$) のときには $(\mathbf{R}^d, {}_{\mu}H)$

がブルロー空間となる為の必要十分条件は μ がカトー族となることである ([9] 参照). 特に ${}_0H(D) = H(D)$ である.

本論文では $\mu \geq 0$ であるカトー族のラドン測度のみを考える. D 上で μ 調和構造 ${}_\mu H$ に関するの優調和関数 (μ 優調和関数と言う) の全体を ${}_\mu S(D)$ と記し, 特に ${}_0S(D) = S(D)$ とかく. $\mathbf{R}^d$ の有界領域 V に対し μ 調和構造 ${}_\mu H$ に関して V 上 Perron-Wiener-Brelot の意味での ∂V 上の可解な境界値 f のディリクレ問題の一般化解を ${}_\mu H_f^V$ と記す. 全ての $f \in C(\partial V)$ に対し $\lim_{x \in V, x \rightarrow y} {}_\mu H_f^V(x) = f(y)$ となる $y \in \partial V$ を μ 正則と言う. ∂V の点が全て μ 正則の時 V を μ 正則な領域という. ${}_0H_f^V = H_f^V$ であって, ${}_0$ 正則は単に正則を意味する訳である.

有界領域 V 上の有界ボレル関数 φ に対しカトー族のラドン測度 $\mu \geq 0$ を用いて

$$(2.7) \quad T_V \varphi(x) := \int_V G^V(x, y) \varphi(y) d\mu(y)$$

と置く. $T_V \varphi \in C(V)$ であるが, $T_V \varphi$ は $V \cup \rho V$ 迄連続拡張出来て, $T_V \varphi \in C(V \cup \rho V)$ かつ $T_V \varphi|_{\rho V} = 0$ となる事は直ぐに分かる. もし $\varphi \geq 0$ なら勿論 $T_V \varphi \in S(V)^+ = \{s \in S(V) : V \text{上 } s \geq 0\}$ である. グリーン関数の定義より, 超関数の意味で V 上

$$(2.8) \quad -\Delta T_V \varphi = \varphi \mu$$

となる. これから直ちに

$$(2.9) \quad u + T_V u \in H(V) \quad (u \in {}_\mu H(V))$$

となる事が分かる.

最後に後で使う重要な性質として, $\mathbf{R}^d$ 内の任意の開集合 D に対して

$$(2.10) \quad S(D)^+ \cap C(D) \subset {}_\mu S(D)^+ \cap C(D) \quad (\mu \geq 0)$$

となる事を示す. $s \in S(D)^+ \cap C(D)$ を任意に取る. $\bar{V} \subset D$ である任意の μ 正則領域 V に対して V 上 $s \geq {}_\mu H_s^V$ となる事を示したい. $u := {}_\mu H_s^V$ と置く. T_V の性質と(2.9)より $u + T_V u = H_s^V$ となるので, $T_V u \geq 0$ より $H_s^V \geq {}_\mu H_s^V$ となる. $s \in S(D)$ により V 上 $s \geq H_s^V$ だから, $s \geq {}_\mu H_s^V$ となる.

2.3. 定理 2.1 の証明. (a) と (b) の同値な事は Keldysh の第 2 基本定理そのものであるから, (a) と (c) の同値な事を示せばよい. 最初に (c) を仮定する. すると (b) が出るから結局 (a) が従う. よって (a) から (c) を出す部分のみが自明でない. 背理法で, R を安定と仮定してしかも $\text{cap}(\partial R \setminus \sigma R) > 0$ であるとして矛盾を導く.

有界正則領域 R_i で, $R_i \supset \bar{R}_{i+1}$ となる $\bar{R}$ の圧搾 $(R_i)_{i \geq 1}$ を一つ任意に選んで固定する. R_i のグリーン関数を $G_i(x, y)$ とし又 R のグリーン関数を $G(x, y)$ とし, 更に $G^*(x, y)$ を R の外側グリーン関数とすると $G_i(x, y) \downarrow G^*(x, y) \geq G(x, y)$ ($i \uparrow \infty$) である. $y \in R$ を任意に固定する. $G_i(\cdot, y) \in C(\partial R)$ で ∂R 上 $G_i(\cdot, y) \downarrow G^*(\cdot, y)$ だから, $G^*(\cdot, y)$ は ∂R 上で上半連続となる. よって(2.6)により, $\partial R \setminus \sigma R = \{x \in \partial R : G^*(x, y) > 0\}$ だから, $\partial R \setminus \sigma R$ はボレル集合である. よって Choquet の可容性定理 (例えば [4, p.149] 参照) により, $F \subset \partial R \setminus \sigma R$ で

$\text{cap}(F) > 0$ となるコンパクト集合 F が取れる. $\mathcal{M}_F^+$ で $\text{spt}\nu \subset F$ となる正値ラドン測度 ν の族を表す, 但し $\text{spt}\nu$ は ν の台とする. すると ([4,p140] 参照)

$$\text{cap}(F) = \sup\{\nu(F) : \nu \in \mathcal{M}_F^+, \mathbf{R}^d \text{ 上 } U^\nu \leq 1\}$$

であるから, $\text{cap}(F) > 0$ より, $\mathbf{R}^d$ 上 $U^\nu \leq 1$ で $\nu(F) > 0$ となる $\nu \in \mathcal{M}_F^+$ が存在する. Lusin の定理によれば, $K \subset F$ かつ $\nu(F \setminus K) < \nu(F)/2$ かつ $U^{\nu|K} \in C(\mathbf{R}^d)$ となるコンパクト集合 K が見つかる ([4,p.118] 参照). よって $\mu := \nu|K$ はカトー族のラドン測度で,

$$(2.11) \quad \mu(\partial R \setminus \sigma R) > 0, \quad \text{spt}\mu \subset \partial R \setminus \sigma R$$

となる. 以下これから矛盾 ($\mu(\partial R \setminus \sigma R) = 0$) を導く.

最初, R_i が正則と仮定した結果として, R_i が μ 正則であることに注意する. これは例えば次のようにして示される. $y \in R_i$ を固定し $s = \min(G_i(\cdot, y), 1)$ とおくと $s \in S(R_i)^+ \cap C(\bar{R}_i)$ で $s|_{\partial R_i} = 0$ となる. (2.10) によれば $s \in {}_\mu S(R_i)^+ \cap C(\bar{R}_i)$ かつ $s|_{R_i} > 0$ かつ $s|_{\partial R_i} = 0$ となるので, s は ∂R_i の各点の μ バリヤである. μ バリヤをもつ点は μ 正則 (例えば [3,p.51] 参照) なので R_i は μ 正則となる.

各 $i \geq 1$ に対し $u_i := {}_\mu H_1^{R_i}$ とおく. R_i は μ 正則なので $u_i \in {}_\mu H(R_i) \cap C(\bar{R}_i)$ かつ $u_i|_{\partial R_i} = 1$ である. (2.10) により $1 \in {}_\mu S(\mathbf{R}^d)$ だから, 最小値の原理により, R_{i+1} 上 $0 < u_1 \leq u_i \leq u_{i+1} \leq 1$ となり, $(u_i)_{i \geq 1}$ は $\bar{R}$ 上 1 を越えない増加列となる. 故に

$$u^*(x) := \lim_{i \rightarrow \infty} u_i(x) \quad (x \in \bar{R})$$

が定義され, $\bar{R}$ 上 $0 < u_1 \leq u^* \leq 1$ となる. $u_i|_{R_i} \in {}_\mu H(R) (i \geq 1)$ であるから, $u^*|_R \in {}_\mu H(R)$ となる. (2.9) 等により $u_i + T_{R_i} u_i \in H(R_i) \cap C(\bar{R}_i)$ かつ ∂R_i 上 $u_i + T_{R_i} u_i = 1$ となる. よって R_i 上 $u_i + T_{R_i} u_i \equiv 1$ となるので, 特に

$$(2.12) \quad 1 = u_i(x) + \int_{\text{spt}\mu} G_i(x, y) u_i(y) d\mu(y) \quad (x \in R)$$

となる. $G_i(x, y) \downarrow G^*(x, y) ((x, y) \in R \times \partial R)$, $0 < G_i(x, y) u_i(y) \leq G_1(x, y) \leq g(x - y) + \text{定数} ((x, y) \in R \times \partial R)$, かつ $y \mapsto g(x - y)$ は任意に固定した $x \in R$ に対し ∂R 上 μ 可積分である. よって, ルベークの収束定理により, (2.12) で $i \uparrow \infty$ とすることにより

$$(2.13) \quad 1 = u^*(x) + \int_{\text{spt}\mu} G^*(x, y) u^*(y) d\mu(y) \quad (x \in R)$$

となる事が結論される.

最後に, $R \cap (\text{spt}\mu) = \emptyset$ だから, $u^*|_R \in {}_\mu H(R) = H(R)$ であるので, $u^*|_R$ は R 上の有界調和関数である. 任意の $a \in \sigma R$ を固定する. (2.3) への注意によれば, $\text{spt}\mu \subset \partial R \setminus \sigma R$ だから $(x, y) \mapsto G^*(x, y)$ は $\bar{R} \times \text{spt}\mu$ 上の関数として (a, b) ($b \in \text{spt}\mu$) で連続で $G^*(a, b) = 0$ となる. さて R は安定なので (即ち (a) が成り立つので) (b) が成り立つ: $\partial R \setminus \sigma R$ の R に関する調和測度は 0 となる. 故に (2.13) により R 上の有界調和関数 $u^*|_R$ は ∂R 上調和測度零の集

合 $\partial R \setminus \sigma R$ を除外すれば境界値1を持つ事が分かる. これより R 上 $u^*|_R \equiv 1$ となる. よって再び(2.13)から $\text{spt}\mu \subset \partial R \setminus \sigma R$ より

$$(2.14) \quad \int_{\partial R \setminus \sigma R} G^*(x, y) u^*(y) d\mu(y) = 0 \quad (x \in R)$$

となる. さて, (2.4)によれば, どんな $x \in R$ に対しても $\partial R \setminus \sigma R$ 上 $G^*(x, \cdot) > 0$ であり, 又 $\bar{R}$ 上 $u^* \geq u_1 > 0$ だから勿論 $\partial R \setminus \sigma R$ 上 $u^* \geq u_1 > 0$ である. だから(2.14)より $\mu(\partial R \setminus \sigma R) = 0$ となる. これは出発点の仮定(2.11)に反する. $\square$

3. 安定点の判定

3.1. グラフ点. R を $\mathbf{R}^d$ の部分領域とする. $a \in \partial R$ が**グラフ点**であるとは a がデカルトグラフ点であるか又は極グラフ点であることとする.

ここで $a \in \partial R$ が**デカルトグラフ点**であるとは, a に原点を持つ適当な $\mathbf{R}^d$ の直交座標 $x = (x', x^d) = (x^1, \dots, x^{d-1}, x^d)$ と, 二正数 ρ と h が定まり, 更に $V = \{x' \in \mathbf{R}^{d-1} : |x'| < \rho\}$ 上の $\varphi(0, \dots, 0) = 0$ かつ $\sup_V |\varphi| < h$ となる連続関数 $x^d = \varphi(x')$ が定まって, $U = V \times (-h, h)$ と置く時

$$U \cap \partial R = \{x = (x', x^d) : x^d = \varphi(x') \ (x' \in V)\}$$

となり, しかも

$$U \cap R = \{x = (x', x^d) : -h < x^d < \varphi(x') \ (x' \in V)\}$$

となることである.

$\mathbf{R}^d$ の単位球面 $S^{d-1} = \{\xi \in \mathbf{R}^d : |\xi| = 1\}$ 上の二点 ξ と η の測地距離を $d_{S^{d-1}}(\xi, \eta)$ と記し, 北極と南極の間の測地距離を δ とする. 又 $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in S^{d-1}$ とする. さて $a \in \partial R$ が**極グラフ点**であるとは, a を $r_1 e_1$ とする適当な $\mathbf{R}^d$ の極座標 $x = r\xi$ 又は (r, ξ) (但し $r \in [0, \infty)$, $\xi \in S^{d-1}$) と, 二正数 $\rho (< \delta/2)$ と h が定まり, 更に $V = \{\xi \in S^{d-1} : d_{S^{d-1}}(\xi, e_1) < \rho\}$ 上の $\varphi(e_1) = r_1$ かつ $\sup_V |\varphi - r_1| < h$ となる連続関数 $r = \varphi(\xi)$ が定まって, $U = V(r_1 - h, r_1 + h) \times V$ と置く時

$$U \cap \partial R = \{(r, \xi) : r = \varphi(\xi) \ (\xi \in V)\}$$

となり, しかも

$$U \cap R = \{(r, \xi) : r_1 - h < r < \varphi(\xi) \ (\xi \in V)\}$$

となることである.

上に出てくる U を R の局所表示近傍, 又上に同時に出てくる関数 φ を ∂R の局所表示関数と呼ぶ. この φ の連続性はあらかじめ仮定しなくても自然に出てくることは容易に示される.

さて, R を有界カラテオドリ領域とすると, 次の結果が成立する.

定理 3.1. $y \in \partial R$ がグラフ点である時, y が安定点となる為の必要十分条件は y が正則点となる事である.

この証明は公刊済みなので発表場所 [5] を参照するにとどめる. 従って $y \in \partial R$ がグラフ点ならば, その正則性の判定条件をそのままその安定性の判定条件として使う事が出来る.

3.2. 連続領域. $\mathbf{R}^d$ の有界領域 R に於いて ∂R の各点がグラフ点である時, R を連続領域又は C 型領域と言う. 凸領域, 星型領域, C^p 領域 ($p \geq 1$), リプシッツ領域等が連続領域の例であり, 応用上割合広い範疇のものであろう. さて定理 3.1 から次の結果が出る.

定理 3.2. 連続領域 R は安定である.

何故ならば, 定理 3.1 により $\partial R \setminus \sigma R = \partial R \setminus \rho R$ であるが Kellogg の定理によれば $\text{cap}(\partial R \setminus \rho R) = 0$ となるので, 定理 2.1 より R は安定となる. 更に $\partial R = \rho R$ と仮定すれば, 再び定理 3.1 より $\partial R = \sigma R$ となり Keldysh の第一基本定理から次の事が言える.

定理 3.3. 連続正則領域 R の閉被 $\bar{R}$ は安定である.

ついでながら上記定理から従う次の調和近似定理は使い易い.

定理 3.4. R を連続正則領域とし, R' を $\bar{R} \subset R'$ かつ $R' \setminus R$ の各成分が R' 内相対コンパクトでない様な任意の領域とすると, 部分空間 $H(R')|_{\bar{R}}$ は空間 $H(R) \cap C(\bar{R})$ 内で一様収束に対して稠密である.

証明: 任意の $u \in H(R) \cap C(\bar{R})$ と任意の正数 ε に対して $\|u - h; L^\infty(R)\| < \varepsilon$ となる様な $h \in H(R')$ が見つかる事を言えば良い. $u|_{\partial R} = f|_{\partial R}$ となる様な $f \in C(\mathbf{R}^d)$ を任意に選んで固定する. $\bar{R}$ の圧搾 $(R_i)_{i \geq 1}$ を任意にとり $u_i := H_f^{R_i}$ とおく. 定理 3.3 により関数列 $(u_i|_{\partial R})_{i \geq 1}$ は $f|_{\partial R} = u|_{\partial R}$ に一様収束するので, 最大値の原理により関数列 $(u_i|_{\bar{R}})_{i \geq 1}$ は $u|_{\bar{R}}$ に一様収束する. 従って番号 i を十分大きくとれば, $\bar{R}_i \subset R'$ かつ $\|u - u_i; L^\infty(R)\| < \varepsilon/2$ となる. さて次の二性質を持つ領域 R'' がとれる: $\bar{R} \subset R'' \subset R_i$; $R' \setminus R''$ の各成分は R' 内相対非コンパクト. すると $u_i \in H(R'')$, $\bar{R}$ は R'' 内コンパクト, かつ $R' \setminus R''$ の各成分は R' 内相対的にコンパクトでないので, 周知の調和近似に関する Runge 型定理により, 或 $h \in H(R')$ があって $\|u_i - h; L^\infty(R)\| < \varepsilon/2$ となる. 故に

$$\|u - h; L^\infty(R)\| \leq \|u - u_i; L^\infty(R)\| + \|u_i - h; L^\infty(R)\| < \varepsilon$$

となって求める結論が得られた. □

3.3. 主張 1.1 の証明. 以上の考察に基づいて, 主張 1.1 は真である事が分かる. 以下にその証明を述べる. 即ち, R を $\mathbf{R}^d$ 内の任意の有界な連続領域とすると, 任意の $\nabla u \in L^2(R)$ となる $u \in H(R)$ と, 正数 $\varepsilon > 0$ を任意に与えた時, $\|\nabla u - \nabla h; L^2(R)\| < \varepsilon$ となる様な $h \in H(R')$ を見つける事が出来る事を証明する訳である. ここで R' は $\bar{R} \subset R'$ で, $R' \setminus R$ の各成分は R' 内相対非コンパクトである様な $\mathbf{R}^d$ 内の任意に与えた領域である.

最初に u は R 上有界として良い事に注意する. 何故ならば, 与えられた任意の $\nabla u \in L^2(R)$ である $u \in H(R)$ に対して, R 上の有界調和関数 u_i の列 $(u_i)_{i \geq 1}$ で R 上 u に一様収束しかつ

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\nabla u - \nabla u_i; L^2(R)\| = 0$$

となるものが見つかる (例えば [11, p.178] 参照; そこでは $d = 2$ の場合として示してあるがその証明は無論一般の $d \geq 2$ の場合に有効である) からである. この事実は Virtanen-Royden の定理と呼ばれる事もある.

次に R が連続領域である事により, $\bar{R}$ の有限開被覆 $(U_i)_{0 \leq i \leq l}$ で, $\bar{U}_0 \subset R$ かつ各 U_i ($1 \leq i \leq l$) は 3.1 の如き形をした或 $a_i \in \partial R$ のデカルト又は極グラフ点の局所表示近傍になっている様なものが選べる. $(\varphi_j)_{0 \leq j \leq m}$ を $C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ の関数による $\bar{R}$ 上の単位の分解で $\text{spt} \varphi_0 \subset U_0$ かつ $\text{spt} \varphi_j$ ($1 \leq j \leq m$) はどれかの U_i ($1 \leq i \leq l$) に含まれる様なものを取る. u の有界性の効果で各 $u_j := u \varphi_j \in C^\infty(R)$ は $\|\nabla u_j; L^2(R)\| < \infty$ を満たす ($0 \leq j \leq m$). 先ず $f_0 := u_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ と置く. $1 \leq j \leq m$ となる任意の j を取る時, 或 $1 \leq i \leq l$ に対して $\text{spt} \varphi_j \subset U_i$ となっている. a_i がデカルトグラフ点であるか又は極グラフ点であるかに応じて, U_i でのデカルト座標を $x = (x', x^d)$ として, 十分小さな $t > 0$ に対して, $(x', x^d - t) \in U_i \cap R$ となる $x \in U_i$ に対して

$$u_{jt}(x) := u_j(x', x^d - t),$$

又は U_i での極座標を $x = r\xi$ として, 十分小さな $t > 0$ に対して, $(1-t)x \in U_i \cap R$ となる様な $x \in U_i$ に対し

$$u_{jt}(x) := u_j((1-t)x)$$

とおく. これらは $\bar{R}$ を含むある開集合で C^∞ 関数である. すると

$$(3.1) \quad \lim_{t \downarrow 0} \|\nabla u_{jt} - \nabla u_j; L^2(R)\| = 0 \quad (1 \leq j \leq m)$$

となることは容易にわかる. 十分小さな $t > 0$ に対し $\bar{R} \subset R_t$ となる領域 R_t を十分 $\bar{R}$ に近く取ると, $\sum_{j=1}^m u_{jt} \in C_0^\infty(R_t)$ となる. そこで $\psi_t|_{\bar{R}} = 1$ で $\text{spt} \psi_t \subset R_t$ である $\psi_t \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ をとり,

$$f_t := f_0 + \left(\sum_{j=1}^m u_{jt} \right) \psi_t$$

とおけば, これは $C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ に入る. そこで R 上 $u = \sum_{j=0}^m u_j$ で又 $f_t = f_0 + \sum_{j=1}^m u_{jt}$ であるので

$$\|\nabla u - \nabla f_t; L^2(R)\| \leq \sum_{j=1}^m \|\nabla u_j - \nabla u_{jt}; L^2(R)\|$$

となる. これと (3.1) から $\|\nabla u - \nabla f_t; L^2(R)\| \downarrow 0$ ($t \downarrow 0$) となる. よって, 十分小さな $t > 0$ に対して $f := f_t$ と置くことにより

$$(3.2) \quad \|\nabla u - \nabla f; L^2(R)\| < \frac{\varepsilon}{4}$$

となる $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ が求まる. この様な f を固定する.

上に定めた f により $g := u - f$ とおき, $(D_i)_{i \geq 1}$ を $\bar{D}_i \subset D_{i+1}$ かつ D_i は C^2 領域である様な R の近似とする. すると $(H_g^{D_i})_{i \geq 1}$ は R 上殆う様にある $p \in H(R)$ に収束して $\|\nabla p; L^2(R)\| \leq \|\nabla g; L^2(R)\|$ となることが知られている (例えば [11, pp.162-164] 参照; やはりそこでは $d = 2$ のときで述べられているが, その所論はすべての $d \geq 2$ で有効である). この結果は Royden

の分解と呼ばれるものの一部分である. さて $H_g^{D_i} = H_u^{D_i} - H_f^{D_i} = u - H_f^{D_i}$ で, Wiener の定理から R 上殆一様に $H_f^{D_i} \rightarrow H_f^R$ ($i \rightarrow \infty$) であるから, 結局 $p = u - H_f^R$ となる. 故に $\|\nabla u - \nabla H_f^R; L^2(R)\| \leq \|\nabla u - \nabla f; L^2(R)\|$ であるので, (3.2) から

$$(3.3) \quad \|\nabla u - \nabla H_f^R; L^2(R)\| < \frac{\varepsilon}{4}$$

となることが分かる.

さて次に, C^2 領域 R_i で $R_i \supset \bar{R}_{i+1}$ である様な $\bar{R}$ の圧搾 $(R_i)_{i \geq 1}$ をとって固定する. 各 $i \geq 1$ に対して $\mathbf{R}^d$ 上の関数 w_i を $\mathbf{R}^d \setminus R_i$ 上 $w_i = f$ で R_i 上 $w_i = H_f^{R_i}$ と定め, 又同じく $\mathbf{R}^d$ 上の関数 w を $\mathbf{R}^d \setminus \bar{R}$ 上 $w = f$ で $\bar{R}$ 上 $w = H_f^{\bar{R}}$ と置く. w_i は $\mathbf{R}^d$ 上のソボレフ関数であるが w は一般に R の滑らかさ次第でそうであることもそうでない事もある. 以下の計算に於いては, 意味のある限り, $\mathbf{R}^d$ 上の二関数 a と b の相互ディリクレ積分

$$D(a, b) := \int_{\mathbf{R}^d} \nabla a(x) \cdot \nabla b(x) dx,$$

但し $\alpha \cdot \beta$ は二ベクトル α と β のユークリッド内積, 及び a のディリクレ積分 $D(a) := D(a, a)$ の記号を使うのが便利である. グリーンの公式

$$\int_{R_i} \nabla(w_i - w_{i+j}) \cdot \nabla w_i dv + \int_{R_i} (w_i - w_{i+j}) \Delta w_i dv = \int_{R_i} (w_i - w_{i+j}) \frac{\partial w_i}{\partial n} ds$$

を想起する, ここで dv は $\mathbf{R}^d$ 上の体積要素, ds は ∂R_i 上の曲面要素, $\partial/\partial n$ は ∂R_i の各点における R_i に関する外法線微分である. R_i 上 $\Delta w_i = 0$ かつ $\mathbf{R}^d \setminus R_i$ 上 $w_i - w_{i+j} = 0$ であるので $D(w_i - w_{i+j}, w_i) = 0$ 即ち

$$(3.4) \quad D(w_i, w_{i+j}) = D(w_i) \quad (i, j \geq 1)$$

となる. 以上の計算は w_{i+j} の代わりに f で置換えても通用するので

$$(3.5) \quad D(w_i, f) = D(w_i) \quad (i \geq 1)$$

も得られる. (3.4) よりシュワルツの不等式で $D(w_i)^2 = D(w_i, w_{i+j})^2 \leq D(w_i)D(w_{i+j})$ であるので, $D(w_i) \leq D(w_{i+j})$ ($i, j \geq 1$) となる. 同様の考察を (3.5) に行う事により $D(w_i) \leq D(f)$ ($i \geq 1$) となる. 従って, 数列 $(D(w_i))_{i \geq 1}$ は有界増加正数列となるので, 収束列となる事を先ず注意する. 再び (3.4) より

$$\begin{aligned} \|\nabla w_i - \nabla w_{i+j}; L^2(R)\|^2 &\leq \|\nabla w_i - \nabla w_{i+j}; L^2(\mathbf{R}^d)\|^2 \\ &= D(w_i - w_{i+j}) = D(w_{i+j}) - D(w_i) \end{aligned}$$

となることがわかる, つまり

$$(3.6) \quad \|\nabla w_i - \nabla w_{i+j}; L^2(R)\|^2 \leq D(w_{i+j}) - D(w_i) \quad (i, j \geq 1)$$

となる. R 上 $w_i = H_f^{R_i}$ は (1.3) により $w = H_f^{\bar{R}}$ に殆一樣収束するので, R 上 ∇w_i も ∇w へ殆一樣収束する. よってファトゥの補題により, (3.6) から

$$\|\nabla H_f^{R_i} - \nabla H_f^{\bar{R}}; L^2(R)\|^2 \leq \lim_{j \rightarrow \infty} D(w_j) - D(w_i) \quad (i \geq 1)$$

となる. 従って k を十分大きく取って固定する事により

$$(3.7) \quad \|\nabla H_f^{R_k} - \nabla H_f^{\bar{R}}; L^2(R)\| < \frac{\varepsilon}{4}$$

とすることが出来る.

次に, R が連続領域であるので, 定理 3.2 により R は安定である. 従って R 上 $H_f^{\bar{R}} = H_f^R$ となる. これと (3.3) 及び (3.7) により, $v := H_f^{R_k}$ と記すと,

$$(3.8) \quad \|\nabla u - \nabla v; L^2(R)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となる様な $v \in H(R_k)$ の存在する事が示された.

最後に, $\mathbf{R}^d$ の正則領域 R'' を次の二条件を満たすように選ぶ: $\bar{R} \subset R'' \subset \bar{R}'' \subset R_k \subset R'$; $R' \setminus R''$ の各成分は R' 内相対非コンパクトである. $v \in H(R'') \cap C(\bar{R}'')$ であるので, 定理 3.4 によれば, $H(R')$ 内の関数列 $(h_i)_{i \geq 1}$ で $\bar{R}''$ 上 v に一樣収束するものが取れる. $\bar{R} \subset R''$ であるので, 従って, ベクトル場の列 $(\nabla h_i)_{i \geq 1}$ は $\bar{R}$ 上ベクトル場 ∇v に一樣収束するので, 特に

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\nabla v - \nabla h_i; L^2(R)\| = 0$$

となる. 従って十分大きな i をとって固定し $h := h_i$ と置くなれば

$$(3.9) \quad \|\nabla v - \nabla h; L^2(R)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となる様な $h \in H(R')$ がとれる. (3.8) と (3.9) より $\|\nabla u - \nabla h; L^2(R)\| < \varepsilon$ となって証明が終る. $\square$

4. 参考文献

- [1] A. BOUKRICH: *Das Picard-Prinzip und verwandte Fragen bei Störung von harmonischen Räumen*, Math. Ann., **239**(1979), 247-270.
- [2] A. BOUKRICH, W. HANSEN AND H. HUEBER: *Continuous solutions of the generalized Schrödinger equation and perturbation of harmonic spaces*, Expo. Math., **5**(1987), 97-135.
- [3] C. CONSTANTINESCU AND A. CORNEA: *Potential Theory on Harmonic Spaces*, Springer, 1972
- [4] L. L. HELMS: *Introduction to Potential Theory*, Wiley-Interscience, 1969.
- [5] Y. ISHIKAWA AND M. NAKAI: *Regular and stable points in Dirichlet problem*, Proc. Japan Acad., Ser. A, **73**(1997), 1-4.

- [6] M. V. KELDysh: *On the solvability and stability of the Dirichlet problem*, Uspekhi Mat. Nauk, **8**(1941), 171-231 (in Russian); English translation: Amer. Math. Soc. Translations (2), **51**(1966), 1-73.
- [7] N. S. LANDKOF: *Foundations of Modern Potential Theory*, Springer, 1972.
- [8] F.-Y. MAEDA: *Dirichlet Integrals on Harmonic Spaces*, Lecture Notes in Math. **803**, Springer, 1980.
- [9] M. NAKAI: *Brelot spaces of Schrödinger equations*, J. Math. Soc. Japan, **48**(1996), 275-298.
- [10] M. NAKAI: *Stable domains in the Dirichlet problem*, Preprint.
- [11] L. SARIO AND M. NAKAI: *Classification Theory of Riemann Surfaces*, Springer, 1970.