

3-Bridge Link Type の判定 (II)

東京工業大学 理学部 河野和義 (Kazuyoshi Kohno)

ある2つの wave のない 3-bridge link projection (以下、単に projection と呼ぶ) として $p(L)$, $p(L')$ が与えられたとき、 $p(L')$ に有限回の right jump move または left jump move を施すことによって $p(L')$ が $p(L)$ に変換できるなら、 L と L' とは同じ link type に属するということが結論できる。(議論の詳細は根上生也氏の 3-Bridge Link Type の判定 (I) を参照してください。) しかし、jump move の操作を繰り返し行なうのはかなり面倒な作業である。実際、1つの projection に対して6通りの jump move が可能であるから、jump move の回数は 6^n の order で増加していくことになり、人間では手のつけられない計算量になってしまう。そこで、projection を parameter で表わし、その parameter を用いて jump move の操作をコンピュータを使って行なうことを考える。

任意の projection $p(L)$ は一般に3つの円とそれらを結ぶ2本の平行な線分によって表わすことができる (図1)。おのおのの円は over bridge の近傍の様々な状況を表わし、2本の平行な線分は under bridge の束を表わしている。 $p(L)$ の parameter は次のようにして定める。 $p(L)$ は $S^2(L)$ 上にあるから、 $S^2(L)$ 上の ∞ の点から i 番目

の over bridgeへ至る path が存在する。このとき、 i 番目の over bridgeと under bridge との交点で i 番目の over bridgeとこの path との交点より右側の交点数を a_i 、左側の交点数を b_i とすることにより6つの0以上の整数

$$(a_i, b_i) (a_{i+1}, b_{i+1}) (a_{i-1}, b_{i-1})$$

を得る。これを $p(L)$ の paramaterと言う。まずこの paramaterを用いて jump move を行なうために必要な projection の様々な情報を求めてみよう。

i 番目の over bridgeと under bridge との交点数を c_i とすると、

$$c_i = a_i + b_i (i = 0, 1, 2)$$

と表わせる。

また、 $(i+1)$ 番目の over bridgeと $(i-1)$ 番目の over bridgeを結ぶ arcの本数を x_i とすると

$$x_{i+1} + x_{i-1} = 2(c_i + 1) (i = 0, 1, 2(\text{mod } 3))$$

であるからこれより

$$x_i = c_{i+1} + c_{i-1} - c_i + 1 (i = 0, 1, 2(\text{mod } 3))$$

が得られる。

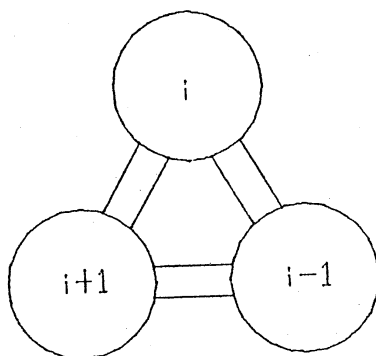


図1. projection の一般形

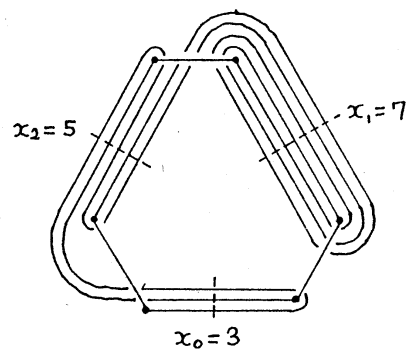


図2. x_i

bridge typeは図4 に示す5通りである。この図をよく観察することによって i 番目の over bridgeの type は、

条件	type
$2a_i+1 = x_{i-1}$ のとき	10
$a_i < x_{i-1} < 2a_i+1$ のとき	1+
$b_i < x_{i+1} < 2b_i+1$ のとき	1-
$x_{i-1} \leq a_i$ のとき	11+
$x_{i+1} \leq b_i$ のとき	11-

表3. paramaterによる bridge typeの判定

と paramaterから求めることができる。

また、 $(i+1)$ 番目の over bridgeの下を通り i 番目の over bridgeを経て $(i-1)$ 番目の over bridgeへ至る arcの本数(図5 の $\parallel$ の部分の arcの本数)を y_i とすると、

i 番目の bridge	y_i
1+	$x_{i+1} - 2b_i - 1$
1-	$x_{i-1} - 2a_i - 1$
11+	x_{i-1}
11-	x_{i+1}

表4

となる。

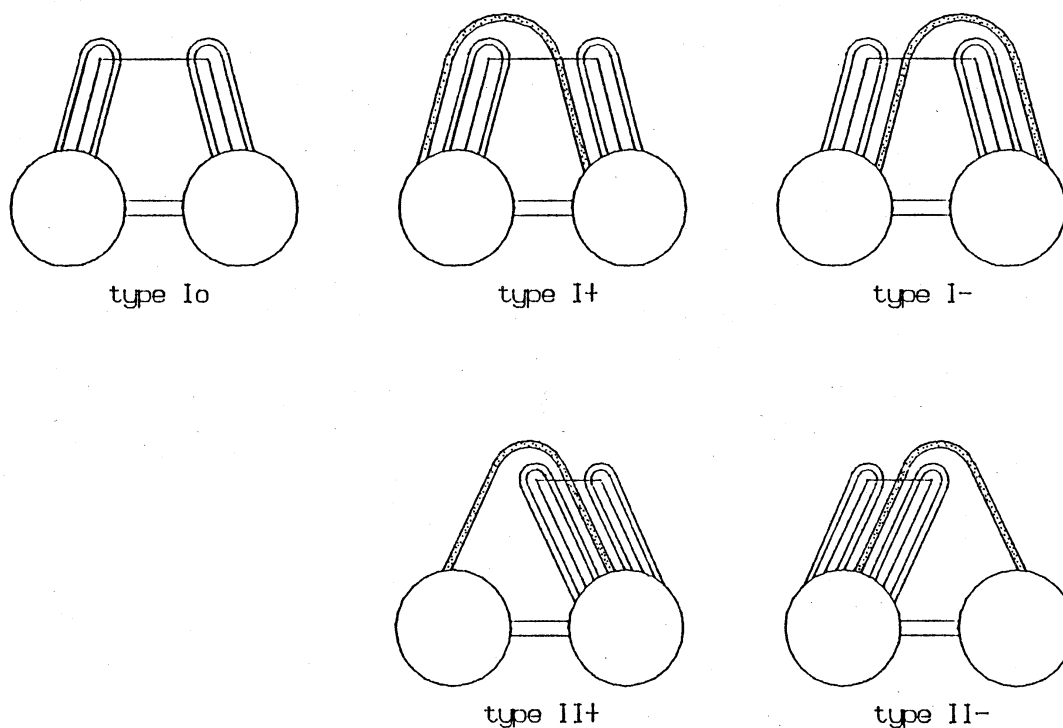


図5. bridge types

以上をもとにして、jump move を行なうことにより与えられた projection $p(L)$ の paramater がどのように変化するかを考えてみよう。left jump move と right jump move とは鏡像の関係にあるから、ここでは right jump move についてのみ考えることにする。今、 i 番目の over bridge で jump するものとし、jump した後に得られる projection を $p'(L)$ とし $p'(L)$ の paramater を

$$(a'_i, b'_i) (a'_{i+1}, b'_{i+1}) (a'_{i-1}, b'_{i-1})$$

とする。また over bridge の番号は

$$i \rightarrow i-1$$

$$i+1 \rightarrow i+1$$

$$i-1 \rightarrow i$$

と変化することにする。さらに、 $p(L)$ の i 番目の over bridge を α 、 $(i+1)$ 番目の over bridge を β 、 $(i-1)$ 番目の over bridge を γ とする。

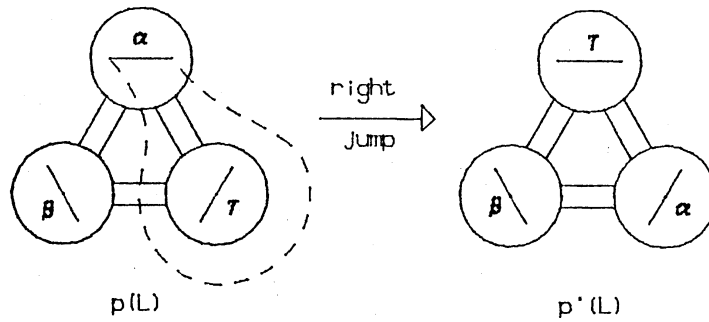


図 6. bridge の名前と番号の変化

まず jump moveによって α の近傍がどう変化するかを考えてみよう。今考えているのは right jump move であるから、 α の type は $1+$ または $11+$ である。 α と under bridge との交点で $S^2(L)$ の ∞ の点から α へ至る path と α との交点より右側の交点数が a'_{i-1} 、左側の交点数が b'_{i-1} であるから α の type が $1+$ のときは、図 7 より

$$a'_{i-1} = b_i, \quad b'_{i-1} = a_i + x_i - y_i$$

となる。

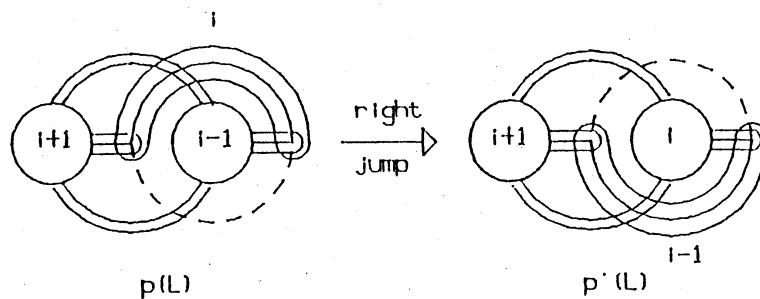


図 7. type $1+$ の right jump

α の type が $11+$ のときも、図 8 より

$$a'_{i-1} = b_i, \quad b'_{i-1} = a_i + x_i - y_i$$

となる。

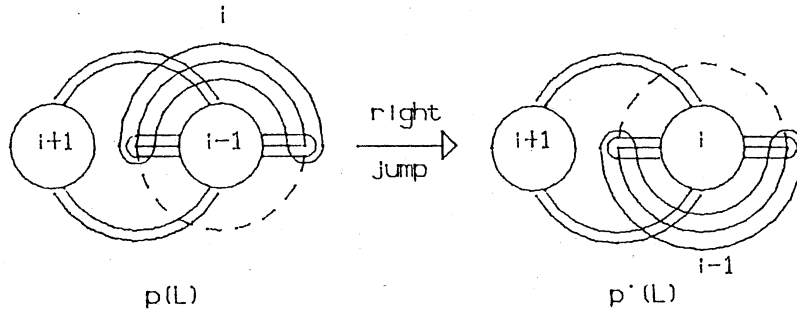


図8. type II+ の right jump

β は right jump moveの影響を受けないから、

$$a'_{i+1} = a_{i+1}, \quad b'_{i+1} = b_{i+1}$$

である。

最後に γ の近傍がどうなるかを考えてみよう。説明のため γ の端点に名前をつけておく (図9)。

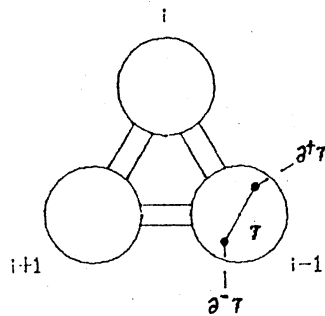


図9. γ の端点の名前

γ の type が 1_0 , 1_+ または 1_- のとき、 $S^2(L)$ 上の ∞ の点から γ へ至る path には次の2通りの場合が考えられる。

Case 1. path が $\theta^+ \gamma$ の近くを通り、その path と γ との交点より右側に $\theta^+ \gamma$ がある場合 (図10)

これを parameter を用いて表わすと

$$2b_i < a_{i-1} \quad (2b_i + 1 \leq a_{i-1})$$

であり、このとき

$$a'_i = -2b_i + a_{i-1} - 1$$

となる。

Case 2. path と γ との交点より左側に $\theta^+ \gamma$ がある場合 (図11)

これを parameter を用いて表わすと

$$2b_i \geq a_{i-1}$$

であり、このとき

$$a'_i = -2b_i + 2a_{i-1} + b_{i-1}$$

となる。

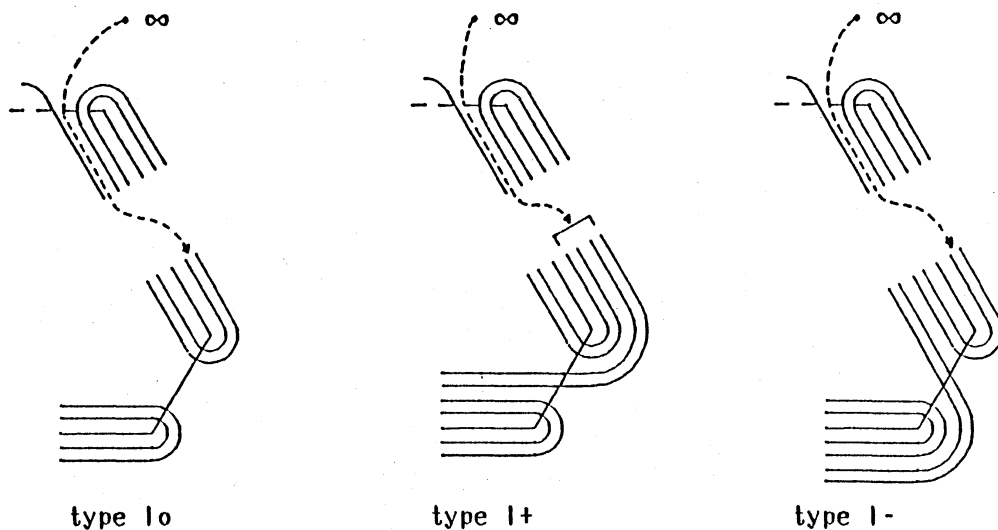


図10. Case 1

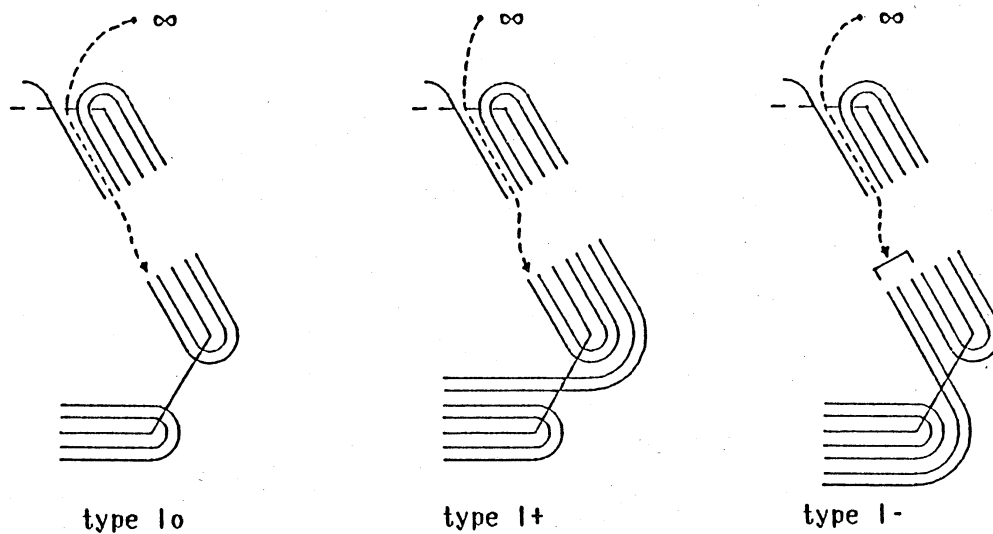


図11. Case 2

γ の type が $11+$ のときは、次の 1 通りのみの場合がある。

Case 3. path が $\partial^+ \gamma$ の近くを通り、その path と γ との交点より右側に $\partial^+ \gamma$ がある場合 (図12)

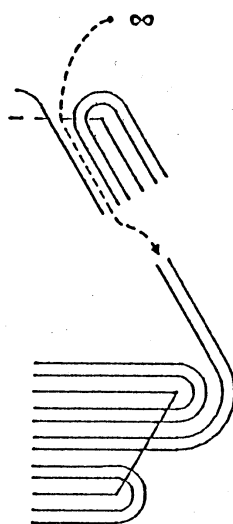


図12. Case 3

このとき

$$a'_i = -2b_i + a_{i-1} - 1$$

となる。

γ の type が II-のときは、次の3通りの場合が考えられる。

Case4. path が $\theta^+\gamma$ の近くを通り、その path と γ との交点より右側に $\theta^+\gamma$ がある場合 (図13)

これを paramaterを用いて表わすと

$$2b_i < a_{i-1}$$

であり、このとき

$$a'_i = -2b_i + a_{i-1} - 1$$

となる。

Case 5. path と γ との交点より左側に $\theta^+\gamma$ がある場合 (図14)

これを paramaterを用いて表わすと

$$a_{i-1} \leq 2b_i < b_{i-1} + 2a_{i-1} + 1$$

であり、このとき

$$a'_i = -2b_i + 2a_{i-1} + b_i$$

となる。

Case 6. path が $\theta^-\gamma$ の近くを通り、その path と γ との交点より右側に $\theta^+\gamma$ がある場合 (図15)

これを paramaterを用いて表わすと

$$2b_i \geq b_{i-1} + 2a_{i-1} + 1$$

であり、このとき

$$a'_i = -2b_i + 3a_{i-1} + 2b_{i-1} + 1$$

となる。

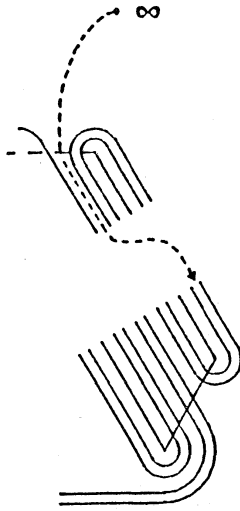


図13. Case 4

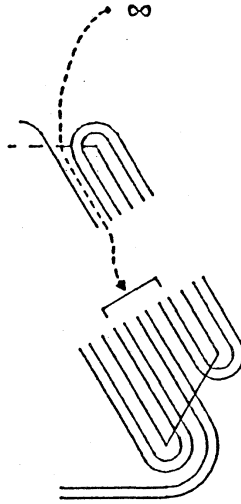


図14. Case 5

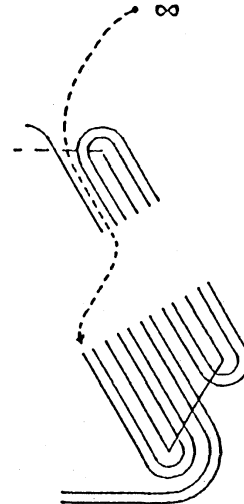


図15. Case 6

γ と under bridge との交点数は right jump moveを行なっても変化しないから

$$b'_i = c_{i-1} - a'_i$$

である。

以上のことにより i 番目の bridge における jump moveによる paramaterの変化は次の表のようになる。(left jump move による paramaterは、 right jump moveの paramater の変化の表において

$$a \rightarrow b$$

$$i \rightarrow i$$

$$i+1 \rightarrow i-1$$

$$i-1 \rightarrow i+1$$

とすればよい。)

(i-1)番目の bridge	条件	a'_i
lo, l+ or l-	$2b_i < a_{i-1}$ のとき $2b_i \geq a_{i-1}$ のとき	$-2b_i + a_{i-1} \quad -1$ $-2b_i + 2a_{i-1} + b_{i-1}$
ll+		$-2b_i + a_{i-1} \quad -1$
ll-	$2b_i < a_{i-1}$ のとき $a_{i-1} \leq 2b_i < 2a_{i-1} + b_{i-1} + 1$ のとき $2b_i \geq 2a_{i-1} + b_{i-1} + 1$ のとき	$-2b_i + a_{i-1} \quad -1$ $-2b_i + 2a_{i-1} + b_{i-1}$ $-2b_i + 3a_{i-1} + 2b_{i-1} + 1$

表16. i番目の over bridgeにおける right jump move

(i-1)番目の bridge	条件	b'_i
lo, l+ or l-	$2a_i < b_{i+1}$ のとき $2a_i \geq b_{i+1}$ のとき	$-2a_i + b_{i+1} \quad -1$ $-2a_i + 2b_{i+1} + a_{i+1}$
ll+	$2a_i < b_{i+1}$ のとき $b_{i+1} \leq 2a_i < 2b_{i+1} + a_{i+1} + 1$ のとき $2a_i \geq 2b_{i+1} + a_{i+1} + 1$ のとき	$-2a_i + b_{i+1} \quad -1$ $-2a_i + 2b_{i+1} + a_{i+1}$ $-2a_i + 3b_{i+1} + 2a_{i+1} + 1$
ll-		$-2a_i + b_{i+1} \quad -1$

表17. i番目の over bridgeにおける left jump move

今までは over bridgeに関する jump moveについて考えてきたが、それだけでは片手落ちであり、under bridge に関しても同様な jump moveを行なわなければならない。そのために projection に対して reverseと呼ばれる操作を施す。この操作は、まず $S^2(L)$ を裏返すことによって、与えられた projection $p(L)$ の上交差点と下交差点が逆になった projection を作り、これを図1 の形をした projection $p^*(L)$ に変形する操作である。あとは over bridgeの jump moveと同様に jump moveを行なえばよい。

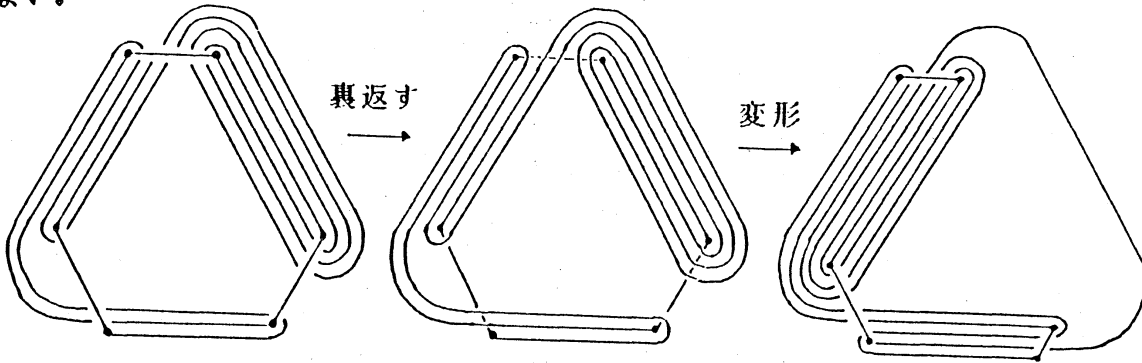


図18. reverse

reverse の操作を数式で表わすことは今のところできていない。従って、reverse の projection は、実際に projection の絵を画いてそれをもとに arcをたどることによって求めるしかない。しかし操作自体はごく簡単であるから、これもコンピュータを用いて求めることを考える。

もとの projection を $p(L)$ とし $p(L)$ の paramaterを

$$(a_i, b_i) (a_{i+1}, b_{i+1}) (a_{i-1}, b_{i-1})$$

reverse した後の projection を $p^*(L)$ とし $p^*(L)$ の paramaterを

$$(a_i^*, b_i^*) (a_{i+1}^*, b_{i+1}^*) (a_{i-1}^*, b_{i-1}^*)$$

とする。また reverseによって、bridge の番号は図19のようになるものとする。

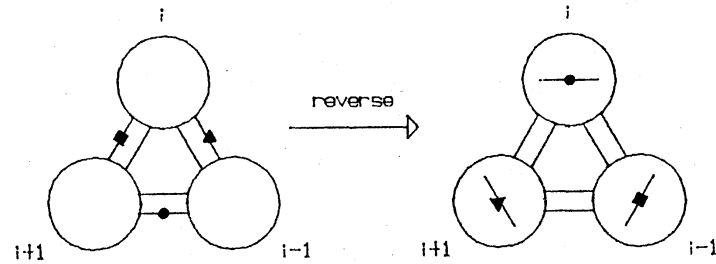


図19. reverse の projection の bridge の番号

まず $p(L)$ の構造をコンピュータ上に表現するために、 $s[3][length]$ という配列を用意する。 $p(L)$ の i 番目の over bridgeのちょっと下をその bridge と平行に切ると $2(a_i + b_i + 1)$ 個の arcの切り口が現われる。この切り口の左から順番に $s[i][0], s[i][1], \dots, s[i][2(a + b) + 1]$ が対応しているものとする。ここで、左から数えて j 番目の arcが i 番目の over bridgeに接続している場合には $s[i][j-1]$ に 0、 i 番目の bridge に接続しておらず、 $(i+1)$ 番目の over bridgeへ向かっている場合には $s[i][j-1]$ に -1、 $(i-1)$ 番目の over bridgeに向かっている場合には $s[i][j-1]$ に 1 をそれぞれ代入する。これで $p(L)$ の構造が $s[3][length]$ という配列で表わされたことになる。

$p^*(L)$ の paramaterを求めるには、まず $p(L)$ において $S^2(L)$ の ∞ の点から i 番目の under bridge ($i = 0, 1, 2$) に至る path を考え、その path と under bridge の交点を始点としてある over bridgeの端点にたどりつくまで arcをたどって行ったときの over bridgeとの交点数を求めればよい。このとき右方向にたどったときの交点数が a_i^* であり、左方向にたどったときの交点数が b_i^* である。arc をたどるといふことは

操作 1. over bridge の端点を中心に 180° 回転

操作 2. ある over bridgeの下から他の over bridgeの下への移動

の繰り返しである。

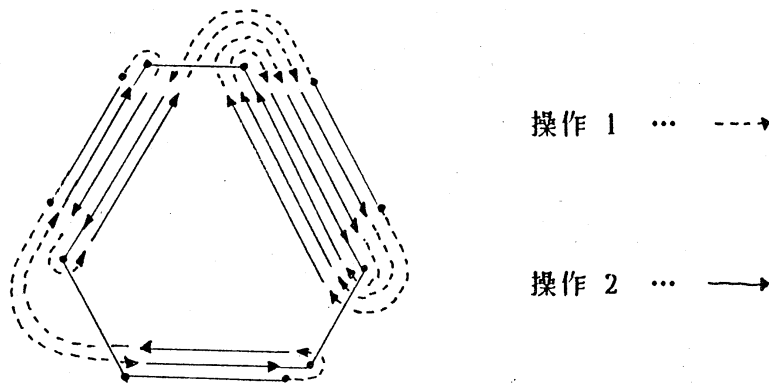


図20. 操作 1 と操作 2

これらの操作をコンピュータ上で実現するには次のようにすればよい。今、注目している arc の位置が $s[i][j]$ に対応しているとしよう。まず操作1 には次の2通りの場合がある。

Case 1. arc が ∞ の点から over bridgeへ至る path と over bridgeとの交点より右側にある場合

over bridge の左側の端点を中心に 180° 回転するから、回転した後 arc の位置は $s[i][2a_i - j]$ になる。従って、

$$j := 2a_i - j$$

を実行すればよい。

Case 2. arc が ∞ の点から over bridgeへ至る path と over bridgeとの交点より右側にある場合

over bridge の右側の端点を中心に 180° 回転するから、回転した後 arc の

$$j := 2(2a_i + b_i + 1) - j$$

を実行すればよい。

また操作 2 は、次の 2 通りの場合がある。

Case 1. $s[i][j] = -1$ の場合

この場合、arc は $(i+1)$ 番目の over bridge へ向かっているので、arc の位置は

$$s[i+1][2(a_{i+1} + b_{i+1}) + 1 - j]$$

となる。従って、

$$i := i+1, j := 2(a_i + b_i) + 1 - j$$

を実行すればよい。

Case 2. $s[i][j] = 1$ の場合

この場合、arc は $(i+1)$ 番目の over bridge へ向かっているので、arc の位置は

$$s[i-1][2(a_i + b_i) + 1 - j]$$

となる。従って、

$$j := 2(a_i + b_i) + 1 - j, i := i+1$$

を実行すればよい。

以上により、 a_i^* を求めるには以下のような手順を踏めばよいことがわかる。

Step 0 $a_i^* := 0, k := i-1, j := 2a_i + b_i + 1$

Step 1 $s[k][j] = 0$ であるなら Stop。

$s[k][j] = 0$ でないなら、 $a_i^* := a_i^* + 1$ を実行し Step 2 へ行く。

Step 2 $j \leq 2a_i$ であるなら $j := 2a_i - j$

$j > 2a_i$ であるなら $j := 2(2a_i + b_i + 1) - j$

を実行し Step 3 へ行く。

Step 3 $s[k][j] = -1$ であるなら $k := k + 1, j := 2(a_i + b_i) + 1 - j$

$s[k][j] = 1$ であるなら $j := 2(a_i + b_i) + 1 - j, k := k - 1$

を実行し Step 1 へ戻る。

また b を求めるには、上のアルゴリズムで Step 0 を

Step 0 $b_i^* := 0, k := i + 1, j := 0$

とすればよい。

以上により over bridge の jump move および under bridge の jump move がコンピュータを用いて計算可能になった。従って、2つの projection $p(L)$, $p(L')$ が同じ 3-bridge link から得られる projection であるか否かを判定するには、次のようにすればよい。

Step 0 $Q_\omega(L) = \{p(L)\}$

Step 1 もし $p(L') \in Q_\omega(L)$ であるなら 2つの projection $p(L)$ と $p(L')$ が同じ 3-bridge link から得られる projection である。

もし $p(L') \in Q_\omega(L)$ でないなら Step 2 へ行く。

Step 2 $Q_\omega(L)$ の各要素に対して高々 6通りの jump move を行ない、それによっ

て得られる projection を $Q_w(L)$ の要素に加え Step 1 へ戻る。

しかし、特定の 3-bridge link (trivial knot, splittable link, Hopf link, trefoil knot, figure-eight knot) を除いて $Q_w(L)$ は無限集合となってしまうので、上のアルゴリズムは有限終了しない。そこで jump move にある方向性を与えることを考える。上に挙げた方法では、ただやみくもに可能な jump move をすべて行うことによって $Q_w(L)$ を求めようとしていたわけであるが、こんどは交点数の減少する jump move のみに注目して、交点数が極小な projection を求めようという考えである。

そこで、まず jump move によって交点数がどのように変化するかを調べてみよう。

i 番目の over bridge における jump move によって $p(L)$ が $p'(L)$ に変換された時の交点数の変化を考えてみる。先程と同じように $p(L)$ の i 番目の over bridge を α 、 $(i+1)$ 番目の over bridge を β 、 $(i-1)$ 番目の over bridge を γ 、parameter を

$$(a_i, b_i) (a_{i+1}, b_{i+1}) (a_{i-1}, b_{i-1})$$

とし、 $p'(L)$ の parameter を

$$(a'_i, b'_i) (a'_{i+1}, b'_{i+1}) (a'_{i-1}, b'_{i-1})$$

とする。また $|p(L)|$ は $p(L)$ の交点数を表わすものとする。right jump move の場合 bridge β 、bridge γ は動かないから、各々の over bridge と under bridge との交点数は変化しない。表16より jump した後の bridge α 近傍の parameter は

$$a'_{i-1} = b_i, \quad b'_{i-1} = a_i + x_i - y_i$$

であるから、

$$|p(L)| - |p'(L)| = x_i - y_i$$

となる。left jump moveと right jump moveとは鏡像の関係にあったからやはり、

$$|p(L)| - |p'(L)| = x_i - y_i$$

となる。従って、以上のことと表4 により表20を得る。

i番目の bridge	$ p'(L) - p(L) $
I+	$2(c_{i+1} - a_i) + 1$
I-	$2(c_{i-1} - b_i) + 1$
II+	$2(c_{i-1} - c_i)$
II-	$2(c_{i+1} - c_i)$

表21. 交点数の差

これを用いることにより次のことがわかる。

『 projection の paramaterを

$$(a_i, b_i) (a_{i+1}, b_{i+1}) (a_{i-1}, b_{i-1})$$

とし、 i番目の over bridgeの type を I+、 (i+1)番目の over bridgeの type を

I+ とする。このとき、 i番目の over bridgeにおける jump moveで交点数が減少し、
かつ (i+1)番目の over bridgeにおける jump moveで交点数が減少することはない。』

(証明) i番目の over bridgeの type が I+、 (i+1)番目の over bridgeの type
が I+ であるから表3 より、

$$a_i < c_i + c_{i+1} - c_{i-1} + 1 < 2a_i + 1 \cdots \cdots (1)$$

$$a_{i+1} < c_{i+1} + c_{i-1} - c_i + 1 < 2a_{i+1} + 1 \cdots (2)$$

がなりたつ。今、両方の jump move で交点数が減少すると仮定すると表21より以下の不等式が成り立たなければならない。

$$2(c_{i+1} - a_i) + 1 < 0$$

$$2(c_{i-1} - a_{i+1}) + 1 < 0$$

a, c は整数であるから、

$$c_{i+1} - a_i \leq -1$$

従って

$$c_{i+1} - c_i = c_{i+1} - (a_i + b_i) \leq c_{i+1} - a_i \leq -1$$

また

$$c_{i-1} - a_{i+1} \leq -1$$

ゆえに

$$\begin{aligned} c_{i+1} + c_{i-1} - c_i + 1 - a_{i+1} \\ = (c_{i+1} - c_i) + (c_{i-1} - a_{i+1}) + 1 < 0 \end{aligned}$$

となりこれは (2) に矛盾する。□

同様の議論を行なうことにより表22を得る。

1±	増加	増加	減少
1±	増加	減少	増加

11+	減少
11+	増加

11-	増加
11-	減少

11+	増加	減少	不変
11-	減少	増加	不変

11-	増加
11+	増加

1±	増加	増加	増加	減少
11+	増加	減少	不変	増加

11-	増加	増加	減少	不変
1±	増加	減少	増加	増加

1±	増加	増加	増加
11-	増加	減少	不変

11+	増加	減少	不変
1±	増加	増加	増加

表22. $i, (i+1)$ 番目の bridge の type による交点数の増減

与えられた projection に関して over bridge または under bridge のみの jump move を考えた場合 3 通りが可能であるが、上の結果より交点数の減少する jump move は高々 1 通りであることがわかる。よって、ある projection が与えられたときまず交点数が減少しなくなるまで over bridge のみの jump move を行ない、次に交点数が減少しなくなるまで under bridge のみの jump move を行なう、という操作を繰り返すことにより同じ 3-bridge link の projection で極小の交点数を持つものが得られる。もし任意の projection に関して極小な交点数を持つ projection が有限個であり、それを求めることができるなら、3-bridge link type の判定ができることになる。しかし今の段階では、ある projection に対して極小な交点数を持つ projection をすべて求めるアルゴリズムはわかっていない。