

Automorphism groups and equivalence in von Neumann algebras and ergodic type theorems

東北大理 斎藤 和之

§0 Introduction. "非可換力学系" (M, G) (M は von Neumann algebra とし, G は M の $*$ -automorphisms の作る a group) に於ける "G-invariant measure" (G -invariant finite normal traces, G -invariant normal semi-finite traces, G -invariant normal states) の存在問題及びそれと関連した M と G との Cross product $M \rtimes G$ の type の決定問題を最近 Størmer [8] によって導入された "equivalence" (定義は後で述べる) を使用して調べることにする。註の内容は次の 3 つの論文による。

1. E. Størmer, automorphisms and equivalence in von Neumann algebras, to appear in Pacific J. Math..
2. G. K. Pedersen and E. Størmer, _____, II. Preprint.
3. K. Saitō, automorphism groups of von Neumann algebras

and ergodic type theorems, preprint.

§1 Preliminaries. 話を簡単にするために M と G との covariant 表現を考へることにより ([10]), M を Hilbert space $\mathcal{H}$ 上に act する von Neumann algebra とし, G を M の unitarily implement された $*$ -automorphism group とする。すなわち $g \rightarrow u_g$ (G の unitary 表現) があって $u_g M u_g^* = M$ ($\forall g \in G$) とする。Theorems を述べる前に cross product の理論を解説しておく ([1] 参照)。

各 $g \in G$ に対して $\mathcal{H}_g$ を $\mathcal{H}$ と同じ dimension の Hilbert space とし $\tilde{\mathcal{H}} = \sum_{g \in G} \mathcal{H}_g$ とする。 J_g を $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_g$ の linear isometric mapping とする。 $\tilde{\mathcal{H}}$ 上の bounded linear operators 全体 $\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}})$ の元 R を $R_{s,t} = J_s^* R J_t \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ なる matrix 表現する。今 $t \in M$ に対して, $\pi(t) = (R_{s,t})$ $R_{s,t} = \delta_{s,t} t$ とすれば, π は M onto $\tilde{M} \subset \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}})$ の $*$ -isomorphism である。又各 $g \in G$ に対して $\tilde{u}_g \in \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}})$ を $\tilde{u}_g = \langle R_{s,t} \rangle$ $R_{s,t} = \delta_{st-1,g} u_g$ とすると, $g \rightarrow \tilde{u}_g$ は G の $\tilde{\mathcal{H}}$ 上の unitary 表現で, $\pi(u_g^* x u_g) = \tilde{u}_g^* \pi(x) \tilde{u}_g$ ($\forall g \in G, x \in M$) が成立する。 $M \rtimes G$ を $\tilde{M}$ と $\{\tilde{u}_g; g \in G\}$ とから生成される von Neumann algebra とするとよく知られたように $r \in M \rtimes G$ は $r = \langle R_{s,t} \rangle$ $R_{s,t} = a_{st-1} u_{st-1}$ $\forall s, t \in G$ ($a_g \in M$ for $g \in G$) となるように書ける。さらに $s \in M \rtimes G$ $s = \langle t_{gh-1} u_{gh-1} \rangle$ と

するならば,

$$(1) \dots \begin{cases} (SS^*)ee = \sum_{g \in G} t_g t_g^* \\ (S^*S)ee = \sum_{g \in G} u_g^* t_g^* t_g u_g \end{cases} \quad (\text{但し } e \text{ は } G \text{ の単位元})$$

が成立し, $\Phi(s) = See$ と置くと, Φ は $M \rtimes G$ onto M の faithful normal G -expectation である。

従来 von Neumann algebra では次の 2 種類の equivalence が考えられた。

1. Murray - von Neumann に於ける projections の lattice に於ける equivalence. [6]
2. non-negative part に於ける Kadison - Pedersen の equivalence [4]。 N は von Neumann algebra とし,

Definition 1. $a, b \in N^+$ (non-negative part) に対して
 $a \approx b \Leftrightarrow \exists \{a_i\} \subset N : a = \sum a_i^* a_i, b = \sum a_i a_i^*$ 。

特に e, f が N の projections の時は次のことが成立する [4]。

Proposition 1 (Fundamental equivalence theorem).

(a) $e \approx f \Leftrightarrow e \sim f$ 。

(b) e が finite $\Leftrightarrow e$ が $\approx$ finite ($e \geq a, a \in N^+, e \approx a$ ならば, $e = a$)。

証明は最後の appendix に述べてある。

以上のことに注意して今 $e, f \in M_p$ に対して e と f との "equivalence" を $\pi(e), \pi(f) (\in M \rtimes G)$ の $M \rtimes G$ に於ける equivalence

" $\sim$ " で入れ替える。i.e. $\pi(e) \sim \pi(f)$ ならば $\exists v \in M \times G$:

$\pi(e) = v^*v$, $\pi(f) = vv^*$ が成立する。従って $v \sim \langle a_{gh^{-1}} u_{gh^{-1}} \rangle$

とすると (1) 式から Φ を apply して

$$\left. \begin{aligned} e &= \Phi(v^*v) = \sum_{g \in G} u_g^* a_g^* a_g u_g \\ f &= \Phi(vv^*) = \sum_{g \in G} a_g a_g^* \end{aligned} \right\} \text{ が成立する。}$$

従ってこれを Definition として採用しようというのが Størmer [8] である。

Definition 2 ([8]). e, f を M の projections としこれが $e \overset{G}{\sim} f$ (G -equivalent) であるというのは、各 $g \in G$ に対して M の元 a_g があって $e = \sum_{g \in G} a_g a_g^*$, $f = \sum_{g \in G} u_g (a_g^* a_g) u_g^*$ を満たすことである。

Remark 1. 実際にも $e \overset{G}{\sim} f$ ならば $\pi(e) \sim \pi(f)$ in $M \times G$ が成立する ([8])。 $e \overset{G}{\sim} f$ ならば 各 $g \in G$ に対して $a_g \in M$ があって上の条件を満たす。従って、

$$\begin{aligned} \pi(e) &= \sum_{g \in G} \pi(a_g) \pi(a_g)^* = \sum_{g \in G} (\pi(a_g) \tilde{u}_g) (\pi(a_g) \tilde{u}_g)^* \\ \pi(f) &= \sum_{g \in G} \tilde{u}_g^* \pi(a_g)^* \pi(a_g) \tilde{u}_g = \sum_{g \in G} (\pi(a_g) \tilde{u}_g)^* (\pi(a_g) \tilde{u}_g) \end{aligned}$$

従って $\pi(e) \sim \pi(f)$ in $M \times G$ となる。故に Proposition 1 により

$\pi(e) \sim \pi(f)$ が成立する。

Remark 2. " $\overset{G}{\sim}$ " は Remark 1 から equivalence relation となり、しかも completely additive になっていることに注意する。

Definition 3 ([8]). $e, f \in M$ projections に対して $e \overset{G}{\sim} f$ というのは、 $\exists e_1 \leq e$ $e_1 \in M$, projection : $e_1 \overset{G}{\sim} e$ となることである。

Remark 3. 注意すべきことは, $\pi(e) \times \pi(f)$ in $M \times G$ が χ のまま M で $e \otimes f$ を意味しないということである。i.e. $\pi(e) \sim h \leq \pi(f)$ $h \in M \times G$: projection としても $\pi(h)$ が M の projection とはかならずしもならない。

§2. Main theorems. まず equivalence $\sim$ に関する finiteness と従来の Kovács - Szűcs の G -finiteness との関連を示す定理として 次のことを述べる。^[5]

Theorem 1 ([9]). a) $\tilde{G}$ を G と M の inner automorphisms 全体のつくる group とから生成された group とするならば,

M が G -finite ($1 \otimes e \mapsto e=1$) $\Leftrightarrow M$ が $\tilde{G}$ -finite ($\tilde{G}$ -invariant states i.e. G -invariant normal traces が充分沢山ある) $\Leftrightarrow M \times G$ が finite.

(b) M が G -finite $\Leftrightarrow M^*$ (M の predual i.e. M 上の (bounded) normal functionals 全体のつくる Banach space) のかいては weakly relatively compact subset K に対して, K の $\tilde{G}$ による orbit が M^* で weakly relatively compact になることである。但し K の $\tilde{G}$ による orbit とは $\{\phi \circ g \mid \phi \in K, g \in \tilde{G}, a \sharp = u_g a u_g^* \forall g \in G, a \in M\}$ のことである。

Theorem 2 ([7]). $e \in M$: projection に対して次は同値である。

(i) e が G -finite,

(ii) $\pi(e)$ が $M \rtimes G$ で finite .

このことから M が $G \sim$ semi-finite であるための必要充分条件は, M^+ に G -invariant faithful normal semi-finite trace が存在することであることがわかる. 元来もちろん M が $G \sim$ semi-finite ならば, $M \rtimes G$ は semi-finite である.

但しこれに M が $G \sim$ semi-finite というのは, M の non-zero projection が non-zero $G \sim$ finite subprojection を含むことである.

さらに Theorem 1 の他に Kovács - Szücs の G -finiteness との関連は次のようである. $G \sim$ finite von Neumann algebra はかならず finite だから G -finite, semi-finite von Neumann algebra が $G \sim$ finite になることは期待できないが, 次のことは成立する.

Theorem 3 ([8]). M を semi-finite von Neumann algebra とし Z を M の center とする.

1. G が Z の元を elementwise に fix する場合,

M が G -finite $\Leftrightarrow M$ が $G \sim$ semi-finite $\Leftrightarrow M_G \subset M$ の G による fixed subalgebra) に M の finite projections が充分沢山ある.

2. M の center Z 上 G が ergodic に act するならば,

M が G -finite $\rightarrow M$ が $G \sim$ semi-finite $\Leftrightarrow M_G \subset M$ の finite projections が充分沢山ある.

←はかならずしも成立しない。

§3 Proofs of Theorems. Theorem 1 の証明については 旧年 8 月の数理解析研究所での研究会でお話ししたし又講究録 166 に述べたのでそちらを参照していただくことにし、ここではその中で重要な役割をした $\mathcal{G}$ に関する comparability theorem を述べそれを証明することにする。

Proposition 2. M の projections の pair e, f に対して M の $\mathcal{G}$ による fixed subalgebra $M^{\mathcal{G}}$ (M の G による fixed subalgebra M^G と center $\mathcal{Z}$ との intersection) の projection z が,

$$ez \overset{G}{\wedge} fz, \quad e(1-z) \overset{G}{\wedge} f(1-z)$$

を満して存在する。

$M \times G$ の comparability theorem から M の $\mathcal{G}$ に関する comparability theorem を導くことは Remark 3 でも述べたようにそれほど単純ではないがいずれにしても $M \times G$ の center と $\mathcal{Z}$ との関係、特に M の projection e に対して $\pi(e)$ の $M \times G$ での central carrier の解析が必要である。

Proposition 2 の証明。今 $z^G(e)$ を M の projection e を majorize する $M^{\mathcal{G}}$ ($= M^G \cap \mathcal{Z}$) の projections のうち最小のもの (存在!) とする。まず $z^G(e)$ の structure を調べよう。結論は $z^G(e) = \sum f_\alpha$ (f_α : orthogonal projection in M , $\forall$ 各 α に対し,

$e_\alpha \leq e$ と $g_\alpha \in \tilde{G}$ が $u_{g_\alpha}^* e_\alpha u_{g_\alpha} = f_\alpha$ を満たして存在する) の形に書ける。実際 $\{f_\alpha\}$ を e を含む各 α に対して上の条件を満たす α family とする。Zorn の Lemma によれば, maximal なものが存在するのでこれを改めて $\{f_\alpha\}$ とする。そのとき

$f = \sum_\alpha f_\alpha$ とすると $f = Z^G(e)$ となることを証明する。まず

(a) $u_g f u_g^* = f \quad \forall g \in \tilde{G}$ の証明。もしそうでなければ, $\exists g \in \tilde{G} : u_g f u_g^* (1-f) \neq 0$ である。又

$1-f \geq f \vee u_g f u_g^* - f \sim u_g f u_g^* - u_g f u_g^* \wedge (1-f) \neq 0$ が成立するから $\exists g_0 \in \tilde{G} \exists \tilde{f} \neq 0 : \underbrace{\tilde{f}}_{\text{projection}} \leq 1-f, u_{g_0} \tilde{f} u_{g_0}^* \leq f$ である。又 $f = \sum_\alpha f_\alpha$ であるから $\exists \alpha : u_{g_0} \tilde{f} u_{g_0}^* f_\alpha \neq 0$ となり故に

$u_{g_0} \tilde{f} u_{g_0}^* \geq u_{g_0} \tilde{f} u_{g_0}^* - u_{g_0} \tilde{f} u_{g_0}^* \wedge (1-f_\alpha) \sim (1-f_\alpha) \vee u_{g_0} \tilde{f} u_{g_0}^* - (1-f_\alpha) \neq 0$ に注意して上と同様に $\exists \tilde{f} (\neq 0) \leq \tilde{f} \text{ (projection)} \leq 1-f,$

$\exists g' \in \tilde{G} : u_{g'} \tilde{f} u_{g'}^* \leq f_\alpha$ である。又仮定によれば, f_α に対して $\exists g_\alpha \in \tilde{G} \exists e_\alpha \in M \text{ projection } e_\alpha \leq e : u_{g_\alpha}^* e_\alpha u_{g_\alpha} = f_\alpha, e_\alpha = u_{g_\alpha} f_\alpha u_{g_\alpha}^*$ 従って $g_\alpha g' = \tilde{g} \in \tilde{G}$ とすると $u_{\tilde{g}} \tilde{f} u_{\tilde{g}}^* \leq e_\alpha \leq e$ 従って $\{\tilde{f}, f_\alpha\} \supseteq \{f_\alpha\}$ から $\{f_\alpha\}$ の maximality に矛盾する。従って $u_g f u_g^* = f \quad \forall g \in \tilde{G}$ より $f \in Z^G$ となる。

(b) $f \leq Z^G(e)$ の証明。

$$\begin{aligned} Z^G(e) f &= \sum_\alpha Z^G(e) f_\alpha = \sum_\alpha Z^G(e) u_{g_\alpha}^* e_\alpha u_{g_\alpha} \\ &= \sum_\alpha u_{g_\alpha}^* Z^G(e) e_\alpha u_{g_\alpha} = \sum_\alpha u_{g_\alpha}^* e_\alpha u_{g_\alpha} = \sum_\alpha f_\alpha \\ &= f. \end{aligned}$$

故に $f \leq Z^G(e)$ i.e. $f = Z^G(e)$ である。 e, f は M の projections の かつた pair とすると $Z^G(e) Z^G(f) \neq 0$ ならば, $\exists e_1 \leq e$, projection, $\exists f_1 \leq f$, projection : $e_1 \sim f_1$ となる。故に Murray-von Neumann の equivalence の場合と同様に $\bar{M}$ として comparability theorem を証明できる。たとえば Dixmier [1] を参照されたい。

□□□.

Remark 4. 実は $\pi(Z^G(e)) = Z(\pi(e))$ in $M \times G$ が成立する [8].

この comparability theorem を使用して Theorem 2 の証明をしよう。

(i) $\rightarrow$ (ii) の証明。 $\pi(e)$ が $M \times G$ で finite でなく e が M で $G \sim$ finite とする。 $\exists p \in M \times G$: projection : $0 \neq p \leq \pi(e)$, $p \sim \pi(e)$ in $M \times G$ とする。 $p \neq 0$ から $\Phi(p) \geq 0$ で (i) から $\Phi(p)$ は not projection である ($\Phi(p)$ projection ならば $\Phi(p) \leq e$ が成立し $\Phi(p) \leq e$)。故に $\exists 0 < \alpha < 1$ (real) : $f = \chi_{(0, \alpha)}(\Phi(p)) \neq 0$ ($f \leq e$ projection in M) である。 $\times$

$$\frac{1}{1-\alpha} (e - \Phi(p)) \geq f$$

から $e - \Phi(p)$ を何倍かすると

$$n(e - \Phi(p)) \geq f > 0 \quad \dots (2)$$

が成立する。又 $p \sim \pi(e)$ から $\pi(\Phi(p)) \sim \pi(e)$ in $(M \times G)^+$ が成立する。実際 $p \sim \pi(e)$ in $M \times G$ より $\exists v \in M \times G$: $p = v^* v$ $v v^* = \pi(e)$ である。 $v \sim \langle v_{gh} + u_{gh-1} \rangle$ とすると

$$\left. \begin{aligned} \pi(e) &= \sum_k \pi(v_k) \pi(v_k)^* \\ \pi(\Phi(e)) &= \sum_k \tilde{u}_k^* \pi(v_k)^* \pi(v_k) \tilde{u}_k \end{aligned} \right\} \text{となる。}$$

故に $\pi(\Phi(p)) \approx \pi(e)$ in $(M \rtimes G)^+$ である。従って $n\pi(\Phi(p)) \approx n\pi(e)$ となる。よって (2) によれば, $\pi(f) \leq n\pi(e) - n\pi(\Phi(p))$ に注意して

$$n\pi(e) + \pi(f) \lesssim n\pi(e) \quad \text{----- (3)}$$

が成立する。故に

$$\begin{aligned} n\pi(e) + n\pi(f) &= n\pi(e) + \pi(f) + (n-1)\pi(f) \\ &\lesssim n\pi(e) + (n-1)\pi(f) \quad ((3) \text{ による}) \\ &\lesssim n\pi(e) + (n-2)\pi(f) \\ &\vdots \\ &\lesssim n\pi(e) + \pi(f) \lesssim n\pi(e) \end{aligned}$$

となる。従って $\pi(e) + \pi(f) \lesssim \pi(e)$ で $\lesssim$ は常に成立する

から $\lesssim$ に関する Bernstein type の Theorem ([4] Proposition 2.7)

により $\pi(e) + \pi(f) \approx \pi(e)$ in $(M \rtimes G)^+$ が成立する。

今 $z^G(f)e = e_0$ とすると $\pi(z^G(f)) \in M \rtimes G$ の center 故から,

$\pi(e_0) + \pi(f) \approx \pi(e_0)$ が成立する。

次に $\pi(e_0)$ が $M \rtimes G$ で properly infinite になることを示す。

$p_0 \equiv p \pi(e_0)$ が ($p \in M \rtimes G$ の central projection の集合) $M \rtimes G$ で finite としよう。 $(M \rtimes G) \otimes M_2$ (M_2 は 2×2 matrix algebra)

の中の議論に直して $p_0 \stackrel{\text{def}}{=} p \pi(f)$ とすると $p_0 \leq p_0$ に注意し,

$$\begin{pmatrix} p_0 + p_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} p_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} p_0 & 0 \\ 0 & p_0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} p_0 + \xi_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \xi_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \xi_0 & 0 \\ 0 & p_0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \xi_0 & 0 \\ 0 & \xi_0 \end{pmatrix}$$

が成立する。又 $\begin{pmatrix} \xi_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_0 & 0 \\ 0 & p_0 \end{pmatrix}$ はともに projections であるから $\begin{pmatrix} \xi_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \xi_0 & 0 \\ 0 & p_0 \end{pmatrix}$ in $(M \times G) \otimes M_2$ が Proposition 1 によって成立する。

$\begin{pmatrix} \xi_0 & 0 \\ 0 & \xi_0 \end{pmatrix}$ in $(M \times G) \otimes M_2$ が finite algebra であるから

$$\begin{pmatrix} \xi_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \xi_0 & 0 \\ 0 & p_0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \xi_0 & 0 \\ 0 & \xi_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \xi_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \xi_0 & 0 \\ 0 & p_0 \end{pmatrix} \text{ によって,}$$

$$\begin{pmatrix} \xi_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 & 0 \\ 0 & p_0 \end{pmatrix} \text{ i.e. } p_0 = 0 \text{ が成立する。}$$

$p_0 = \xi \pi(f) = 0$ から $\Phi(\xi)f = 0$ i.e. $\Phi(\xi) \in Z^G$ から

$\Phi(\xi)Z^G(f) = 0$ 。又 $\xi_0 = \xi \pi(Z^G(f)e)$ から $\Phi(\xi_0) = \Phi(\xi)Z^G(f)e$

$= 0$ であり、 Φ の faithfulness から $\xi_0 = 0$ が成立 i.e. $\pi(e_0)$ は properly

infinite となる。従って $\exists \xi_1, \xi_2 \in (M \times G)$; projections :

$$\pi(e_0) \sim \xi_1 \sim \xi_2 \quad \text{且} \quad \pi(e_0) = \xi_1 + \xi_2 \quad \dots (4)$$

が成立する。従って $\pi(e_0) \approx 2\pi(e_0)$ である。

次に $e_0 M e_0 = Z^G e_0$ (e_0 は G -abelian) を証明しよう。今 g

$\leq e_0$, $g \in M$: projection としたとき, g と $e_0 - g$ とは Proposition

2 の comparability theorem を使用して $\exists z \in Z^G$: projection:

$$zg \overset{G}{\sim} z(e_0 - g), \quad (1-z)g \overset{G}{\sim} (1-z)(e_0 - g)$$

が成立する。これを apply して $\overset{G}{\sim}$ を $(M \times G)$ に置きかえる

ことができる。従って,

$$2\pi(ze_0) \approx \pi(ze_0) = \pi(zg) + \pi(z(e_0 - g))$$

$$\leq 2\pi(z(e_0 - g)) \leq 2\pi(ze_0)$$

だから, $ze_0 \sim z(e_0 - g)$ が成立する。(i)によれば, ze_0 は, G_v finite だから $ze_0 = z(e_0 - g)$ i.e. $zg = 0$ である。又

$$2\pi((1-z)e_0) \approx \pi((1-z)e_0) = \pi((1-z)g) + \pi((1-z)(e_0 - g))$$

$$\leq 2\pi((1-z)g) \leq 2\pi((1-z)e_0)$$

より $(1-z)e_0 \sim (1-z)g$, よって前と同様(i)により $g = (1-z)g = (1-z)e_0$ が成立するので主張が証明された。(4)により

$$\exists v \in M \times G : v^*v = \mathcal{I}_1, vv^* = \pi(e_0) \quad (v \in \pi(e_0)(M \times G)\pi(e_0))$$

である。 $v \sim \langle s_{gh^{-1}}u_{gh^{-1}} \rangle$ に注意して, (i)によれば,

$$\Phi(v^*v) = \sum_k u_k^* s_k^* s_k u_k (= \Phi(\mathcal{I}_1) \leq e_0)$$

$$\Phi(vv^*) = \sum_k s_k s_k^* (= e_0)$$

で, $u_k^* s_k^* s_k u_k \leq e_0$, $s_k s_k^* \leq e_0$ ($\forall k \in G$) が成立する。よって

上の議論によれば, $s_k s_k^* = a_1 e_0$ ($a_1 \in \mathbb{Z}^G$, $a_1 \geq 0$), $u_k^* s_k^* s_k u_k = b_1 e_0$ ($b_1 \in \mathbb{Z}^G$, $b_1 \geq 0$) と書ける。 $s_k = v_k |s_k|$ を s_k の polar

decomposition とすると, $a_1 e_0 = s_k s_k^* = v_k s_k^* s_k v_k^* = v_k b_1 u_k e_0 u_k^* v_k^*$

$= b_1 v_k u_k e_0 u_k^* v_k^* \leq b_1 v_k v_k^* \leq b_1 e_0$ となる。対称な議論から

$a_1 e_0 \geq b_1 e_0$ i.e. $a_1 e_0 = b_1 e_0$, $u_k^* s_k^* s_k u_k = s_k s_k^*$ ($\forall k \in G$) と

なる。i.e. $\Phi(\mathcal{I}_1) = e_0$ である。 $\mathcal{I}_1 \leq \pi(e_0)$ 故に Φ の faithfulness

により $\pi(e_0) = \mathcal{I}_1$ が成立し (4)によれば $\mathcal{I}_2 = 0$ となる。よって

$\pi(e_0) \sim \mathcal{I}_2$ から $\pi(e_0) = \pi(e \mathbb{Z}^G(f)) = 0$ となる。i.e. $e \mathbb{Z}^G(f) = 0$

$x \in z(f)$ から $f=0$ となり $f \neq 0$ の仮定に反する。従って $\pi(e)$ は $M \times G$ で finite である。

(ii) $\rightarrow$ (i) は明らかである。

さらに「 M が G -semi-finite $\iff M^+$ が G -invariant normal faithful semi-finite trace をもつ」の証明は、 $M \times G$ の finite projection で特に $\tilde{M} (= \pi(M))$ の中にあるものをもとにして、 $(M \times G)^+$ 上に trace をつくりそれを M に制限することを考えればよい。これは演習問題である。以上。

Theorem 3 の証明の 1), 2) case の「 $\rightarrow$ 」の部分に関しては、 G -finite ならば、それぞれの場合に G -invariant faithful normal semi-finite trace が M^+ 上に存在することがわかってゐる ([11], [12]) し、 $M \times G$ に M の finite projections が充分沢山あることもわかってゐる。次に case 1 の逆を証明しよう。i.e. M が G -semi-finite 且つ $\{e_\alpha\}$ なる $M \times G$ の中の M で finite な projections の orthogonal family で $\sum_\alpha e_\alpha = 1$ となるものがあるとする。 $e_\alpha M e_\alpha$ は finite algebra で G が $e_\alpha M e_\alpha$ の automorphism group に reduce できることに注意する。 $e_\alpha M e_\alpha$ には $\mathbb{Z} e_\alpha$ -valued trace Ψ で $\Psi(xg) = \Psi(x)$ $\forall x \in e_\alpha M e_\alpha \forall g \in G$ を満すものが存在する。といるが $\mathbb{Z} e_\alpha$ の元を G は elementwise に fix するから $\Psi_g(xg) = \Psi_g(x) \forall x \in e_\alpha M e_\alpha$

となる。 $\mathbb{A} \mathbb{Z} e_\alpha$ 上の normal states 全体を $\mathbb{G}_\alpha$ とすると,
 $\bigcup \{ \phi \circ \Phi_\alpha \circ \Phi_\alpha, \phi \in \mathbb{G}_\alpha \}$ は M 上の G -invariant normal states
 の a separating family を与える。但し Φ_α は $M \rightarrow e_\alpha M e_\alpha$
 の $\Phi_\alpha(x) = e_\alpha x e_\alpha$ なる mapping とする。従って M は G -finite
 となる。

Case 2. の逆が成立しないことは次の簡単な例により明か
 かである。 $\mathbb{Z}$ を integers の the set とし $l^\infty(\mathbb{Z})$ を $\mathbb{Z}$ 上の bounded
 complex-valued functions 全体の $\mathbb{Z}$ von Neumann algebra
 (acting on $l^2(\mathbb{Z})$) とする。 $f \in l^\infty(\mathbb{Z})$ に対して

$$(Gf)_i = f_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

によって $l^\infty(\mathbb{Z})$ の $*$ -automorphism σ を定義し, $G = \{ \sigma^m \mid m \in \mathbb{Z} \}$
 とすると, G は $l^\infty(\mathbb{Z})$ の ergodic automorphism group である。

$l^\infty(\mathbb{Z})$ は G -semi-finite であり $l^\infty(\mathbb{Z})$ が finite なら $1 \in l^\infty(\mathbb{Z})G$
 が finite projection となる。従って $(l^\infty(\mathbb{Z}), G)$ は, case 2
 の逆の条件を満たす。しかし $l^\infty(\mathbb{Z})$ は G -finite ではない。実際
 $\varphi \in l^\infty(\mathbb{Z})_* (= l^1(\mathbb{Z}))$ が G -invariant ならば, $\varphi = \{\eta_i\}$
 $\in l^1(\mathbb{Z})$ ($\sum_{i \in \mathbb{Z}} |\eta_i| < \infty$) で,

$$\langle \sigma^m f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad \forall m, \forall f \in l^\infty(\mathbb{Z})$$

から $\sum_{i \in \mathbb{Z}} f_{i+m} \eta_i = \sum_{i \in \mathbb{Z}} f_i \eta_i \quad \forall f \in l^\infty(\mathbb{Z})$ となり, $\eta_m = \eta_0$

$\forall m \in \mathbb{Z}$ で $\{\eta_i\} \in l^1(\mathbb{Z})$ から $\eta_m = 0 \quad \forall m$ i.e. $\varphi = 0$ が
 成立する。

以上。

Remark 5. Theorem 2 の証明の本質的な部分は [7] においた。
 それでは, M^+ の中に新しい " $\overset{G}{\sim}$ " equivalence なる概念を導入
 $\overset{G}{\sim}$ に関する comparability theorem を証明し, それを使って
 Theorem 2 の証明をしている。Theorem 2 の証明に関する限り
 は Proposition 2 があるので $\overset{G}{\sim}$ なる概念を使用しなくてよい。

しかし原論文 [7] にはその他に σ -finite G -finite projection
 の characterization や, abelian case で, 確率論に於ける
 Markoff の Theorem との関連が議論されておりそれは $\overset{G}{\sim}$ なる
 概念が有効である。ここでは割愛させていたがよい。

参考のために " $\overset{G}{\sim}$ " の definition をここで述べて置く。

Definition 4 ([7]). M^+ の元 a, b が $a \overset{G}{\sim} b$ であるというのは,
 $\{r_{ig} \mid i \in I, g \in G\} \subset M$ があって, $a = \sum_{ig} r_{ig}^* r_{ig}$, $b = \sum_{ig} u_g (r_{ig} r_{ig}^*) u_g^*$
 を満たすことである。

§4 appendix. Fundamental equivalence theorem の証明。

(a) の証明で " $\leftarrow$ " は明らかであるから " $\rightarrow$ " を示そう。 e, f
 $\in N$ projection が $e \approx f$ とすると, $\exists \{a_i\} \subset N : e = \sum a_i^* a_i$,
 $f = \sum a_i a_i^*$ である。

(*) N の center の projection p に対して, N_p 上で上の状況は
 不変だから各 direct summand で主張を検討すればよい。

1. N の center は σ -finite としてよい。

2° $e \approx f$ かつ $z(e) = z(f)$ となるから $z(e) = z(f) = 1$ といえる。

3° e が finite の場合と properly infinite の場合に分けておく。

α) e が finite の場合. $z(e) = z(f) = 1$ から φ を N^+ 上の faithful normal semi-finite trace とし, $\mathcal{M}_\varphi$ を φ の definition ideal とする。

もし $z \in N^{\text{fp}}$ (N^{fp} は N の center) に対して, $ze \in \mathcal{M}_\varphi$ ならば,

$(za_i)^*(za_i) \leq ze$ に注意して $(za_i)^*(za_i) \in \mathcal{M}_\varphi$ for each i である。

φ の normality 及び $\varphi((za_i)^*(za_i)) = \varphi((za_i)(za_i)^*)$ に注意して

$\varphi(ze) = \varphi(zf)$ が成立する。今 $\forall p_0 \in N^{\text{fp}}$ ($p_0 \leq z$) に対して

$p_0 e, p_0 f$ は同じ条件を満たすから $\varphi(p_0 e) = \varphi(p_0 f)$ となる。

Comparability theorem により $p_0 ze \leq p_0 zf$, $(1-p_0)ze \geq (1-p_0)zf$

for some $p_0 \in N^{\text{fp}}$ であるから φ が faithful trace ということにより

$p_0 ze \sim p_0 zf$ 及び $(1-p_0)ze \sim (1-p_0)zf$ i.e. $ze \sim zf$ である。

従って $z \in N^{\text{fp}}$ が $ze \in \mathcal{M}_\varphi$ ならば $ze \sim zf$ である。 e が

finite だから $\exists \{p_j\} \subset N^{\text{fp}}$: orthogonal : $p_j e \in \mathcal{M}_\varphi \forall j$ 且

$\sum p_j = 1$ なる。各 j に対して上の議論から $p_j e \sim p_j f$ 従って

$e \sim f$ が成立する。

β) e が properly infinite の場合. α) と同様の議論から f も $\propto$ properly infinite になる。

β₁) もし e, f とともに σ -finite ならば $e \sim f$ が成立することは $z(e) = z(f) = 1$ からわかる。例えは [1] を参照されたい。

β₂) 一般の場合。もし $e \sim f$ が成立しないようにしよう。

comparability theorem 及び最初に述べた注意(*)から我々は $eg \not\sim fg$ かつ $g \in N^b_p$, $g \neq 0$ と仮定して矛盾を導くのはよい。
 さらに注意(*)から multiplicity theorem (例えは [2] [3])
 によって e, f はそれぞれ次の case に帰着できる。ある
 infinite cardinal numbers α, β があって

a) eNe が purely infinite 且つ, $e = \sum_{j \in J} e_j$ $\{e_j\}_{j \in J}$ equivalent
 orthogonal cyclic projections with $\bar{J} = \alpha$,

又は

b) eNe が semi-finite 且つ $e = \sum_{j \in J} e_j$ $\{e_j\}_{j \in J}$ equivalent
 orthogonal finite (1°により σ -finite) projections with $\bar{J} = \alpha$
 とできる。つまり

a') fNf が purely infinite 且つ $f = \sum_{i \in I} f_i$ $\{f_i\}_{i \in I}$: equivalent
 orthogonal cyclic projections with $\bar{I} = \beta$,

又は

b') fNf が semi-finite 且つ $f = \sum_{i \in I} f_i$ $\{f_i\}_{i \in I}$: equivalent
 orthogonal finite (1°により σ -finite) projections with $\bar{I} = \beta$
 とできる。仮定から $e < f$ であるから a) b') b) a') が同
 時に起ることはあり得ない。よって a) a'), ^{or} b) b') である。

いずれの場合も $\alpha < \beta$ が成立する。 実際

a) a') の場合。 $e = \sum_{j \in J} e_j$, $e_j \sim e_i$ から $z(e) = z(e_j)$ であり

同様に $z(f) = z(f_i)$ となり $z(e_j) = z(e) = z(f) = z(f_i)$ から β_1 から

$e_j \sim f_i$ となり $e < f$ から $\alpha < \beta$ である。

b) b) の場合。 $\alpha \geq \beta$ として矛盾を出し $\alpha < \beta$ を示そう。 Comparability Theorem によれば, $\exists g \in N^b_p : e_{j_0} g \leq f_{i_0} g, e_{j_0}(1-g) \leq f_{i_0}(1-g)$ である。 $(1-g)e_j \leq (1-g)f_i \quad \forall i, j$ と $\alpha \geq \beta$ とから $(1-g)e \leq f(1-g)$ となり β_2 の仮定に矛盾する。 i.e. $e_{j_0} \leq f_{i_0}$ である。

$e < f$ から e_{j_0} と equivalent な f の subprojections の maximal orthogonal family $\{e_k\}_{k \in K}$ とすると $\bar{K} \geq \bar{J}$ ($\bar{\cdot}$ は set の power) である。 $f = \sum_{k \in K} e_k = e_0$ とし e_0 と e_k に対して comparability theorem から $e_0 h \leq e_k h, e_0(1-h) \leq e_k(1-h) \quad (h \in N^b_p)$ とすることが出来る。 $e_k h = 0$ とすると maximality に矛盾する。 かつ

$$0 \neq hf = e_0 h + \sum_{k \in K} h e_k \leq \sum_{k \in K} h e_k \leq hf$$

から $hf \sim \sum_{k \in K} h e_k$ となり従って multiplicity の一意性により $\bar{K} = \bar{I}$ が成立する。 従って $\alpha \geq \beta$ ならば $\bar{K} = \bar{I} \geq \bar{J}$ から $\alpha = \beta$ であり $he = \sum_{j \in J} e_j h \sim \sum_{k \in K} h e_k \sim hf$ となり $he \not\leq hf$ という β_2 の仮定に矛盾する。 従っていずれの場合も $\alpha < \beta$ である。

$e = \vee_{\delta} e_{\delta}$ として e_{δ} を σ -finite と仮定する。 $e_{\delta} N e_{\delta}$ 上には faithful normal state ω_{δ} が存在する。 今 $e = \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i^* a_i$ とすると $a_i e_{\delta} = 0 \quad \forall \delta$ ならば $a_i e = 0$ であり $a_i^* a_i \leq e$ から $a_i = 0$ となることに注意して $\mathcal{I}_{\delta} \equiv \{i; a_i e_{\delta} \neq 0\}$ とすると $\mathcal{I} = \bigcup_{\delta} \mathcal{I}_{\delta}$ である。
 $\omega_{\delta}(e_{\delta}) = \sum_i \omega_{\delta}(e_{\delta} a_i^* a_i e_{\delta}) < \infty$ から $a_i e_{\delta} \neq 0$ なる i は at most countable であるから $\overline{\mathcal{I}_{\delta}} \leq \aleph_0$ 。 かつ $\overline{\mathcal{I}} \leq \overline{\bigcup_{\delta} \mathcal{I}_{\delta}} \leq \aleph_0$ である。

$e = \sum_{j \in I} e_j$ と書け e_j は σ -finite であった。 $e = \sum_{i \in \mathcal{H}} a_i^* a_i$ $f = \sum_{i \in \mathcal{H}} a_i a_i^*$ として上の論法を使用すると $\overline{\mathcal{H}} \leq \chi \chi_0 = \chi$ となる。

又 e_i を a_i の right projection f_i を a_i の left projection とすると

$$e = \bigvee_{i \in \mathcal{H}} e_i \quad f = \bigvee_{i \in \mathcal{H}} f_i \quad \text{且} \quad e_i \sim f_i \quad (\forall i \in \mathcal{H}) \quad \text{が成立する。}$$

次に各 e_i は高々 $\overline{J}$ -個の σ -finite projections の union となる。

実際

1° cyclic case. ($e_j = e_{\xi_j}^{N'}$ for some vector ξ_j) とするならば,

$$e_i = \bigvee_{j \in J} e_{e_i \xi_j}^{N'}.$$

2° finite case. $e_i = \bigvee_{j \in J} (e_i - e_i \wedge (1 - e_j))$.

$e_i \sim f_i$ から $f = \bigvee_{i \in \mathcal{H}} f_i$ 且 $f_i = \bigvee_{j \in J} f_{ij}$ f_{ij} は σ -finite と書ける。

従って $f = \sum_{\gamma \in I} g_\gamma$ g_γ は σ -finite with $\overline{I} = \beta$ からの論法に

よると, $\beta \leq \overline{\mathcal{H}} \overline{J} \leq \chi^2 = \chi$ (χ は infinite cardinal) となり

これは矛盾である。よって $e \sim f$ が成立する。(b) は trace

を用いて容易に証明できる。

以上。

文献

[1] J. Dixmier, Algèbres de von Neumann, Gauthier Villars, Paris 1957.

[2] E. L. Griffin, Some contributions to the theory of Rings of operators, Trans. Amer. Math. Soc., 75 (1953), 491-504.

[3] _____, _____ II, Trans. Amer. Math. Soc., 79 (1955), 389-400.

- [4] R. V. Kadison and G. K. Pedersen, Equivalence in operator algebras, *Math. Scand.*, 27 (1970), 205-222.
- [5] I. Kovacs and J. Szűcs, Ergodic type theorems in von Neumann algebras, *Acta Sci. Math.*, 27 (1966), 233-246.
- [6] F. J. Murray and J. von Neumann, On rings of operators, *Ann. of Math.*, 37 (1937) 116-229.
- [7] G. K. Pedersen and E. Størmer, Automorphisms and equivalence in von Neumann algebras II, Preprint.
- [8] E. Størmer, Automorphisms and equivalence in von Neumann algebras, To appear in *Pacific J. Math.*
- [9] K. Saitō, Automorphism groups of von Neumann algebras and ergodic type theorems, Preprint.
- [10] M. Takesaki, Covariant representations of C^* -algebras and their locally compact automorphism groups, *Acta Math.*, 119 (1969), 273-303.
- [11] E. Størmer, States and Invariant maps of operator algebras, *J. Functional Analysis*, 5 (1970), 44-65.
- [12] ———, Automorphisms and Invariant states of operator algebras, *Acta Math.*, 127 (1971), 1-9.