

On traces of Hecke operators for the case
of weight one

神大自然 秋山茂樹 (Shigeki Akiyama)

名大理 谷川好男 (Yoshio Tanigawa)

神大理 平松豊一 (Toyokazu Hiramatsu)

序. 以下で我々が扱う重さ1の保型形式は, 流行してゐない数学の一つである. 流行してゐない数学の多くは, 統一的な構造がなく, それらに共通な性質が具体的, 経験的, 偶然であるが故に正統派の数学者からみれば, '物好きにやってみるだけで何にもならない' と見なされるだろう. が, 我々は既知の法則性の域外にある新しい現象との出会いを期待して, その具体性の中に踏みこんでいこうと思う.

§ 1. $G = SL_2(\mathbb{R})$, Γ を非-種 Fuchs 群で, $\Gamma \neq \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (= -I_2)$ とする. $\tilde{\Gamma} \in \Gamma$ の commensurator in G とし, $\alpha \in \tilde{\Gamma}$ を固定する. $\Gamma' \in \Gamma$ と α で生成された G の subgr. とし, $\pi \in \Gamma'$ の ν 次ユークリッド表現 ($\nu < \infty$) とする. π は, $[\Gamma : \Gamma^0] < \infty$ となる

ようにとる. ここで, $\Gamma^0 = \Gamma \cap \text{Ker } \chi$. $S_k(\Gamma, \chi)$ を, χ の表現空間に値をとる Γ に関する χ 付き重さ k の *vector valued cusp forms* の作る空間とする. そして, この空間に作用する Hecke 作用素を, $\Gamma \alpha \Gamma = \bigcup_{\mu=1}^d \alpha_\mu \Gamma$ と右 coset 分解して,

$$T(\Gamma \alpha \Gamma) \cdot F(z) = \sum_{\mu=1}^d \chi(\alpha_\mu) F|[\alpha_\mu^{-1}]_k$$

と定義する. ここで, $\alpha_\mu^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とするとき, $F|[\alpha_\mu^{-1}]_k = F(\alpha_\mu^{-1} z) (cz+d)^{-k}$ とする. $k=1$ の場合には, この Hecke 作用素の *trace* を計算することは *open problem* であった. 従来の *algebra-geometric* な手法では, $k=1$ に関しては情報が得られないが, これは *Riemann-Roch type* の定理が $k=1$ を折り返し点としてゐることに由来する. 我々は, Selberg の *trace formula* を用ゐるのであるが, $k=1$ はやはり折り返し点として表れる. 即ち, $k > 1$ の場合には *hyperbolic conjugacy classes* からの寄与が $k \longleftrightarrow 2-k$ の対応によって, 消滅するかまたは簡単な数論的量として把握できるのであるが, $k=1$ の場合にはこのようにいがなく, その *trace formula* には Selberg type Zeta 関数の *Residue* が表れる. この Zeta の解析接続は *trace formula* の両辺を解析接続することによって間接的に得られる. この間の事情を以下で説明しよう.

H を複素上半平面とし,

$$\tilde{H} = H \times T, \quad \tilde{G} = G \times T, \quad T = \mathbb{R}/(2\pi)$$

と置く. $\tilde{G} \ni (g, \theta)$ の $\tilde{H} \ni (z, \phi)$ への作用は

$$(g, \theta)(z, \phi) = (gz, \phi + \arg(cz + d) - \theta)$$

とする. ここで, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. この作用は transitive である.

$\Gamma \times \{0\}$ を $\tilde{G}$ に埋めこみ, これを Γ と同一視する. よく知られてゐるように, この空間は weakly symmetric Riemannian space であり, $\tilde{G}$ -不変微分作用素のなす環は

$$\tilde{\Delta} = y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + y \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{5}{4} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad \frac{\partial}{\partial \phi}$$

の 2 つで生成される可換環である. $L^2(\Gamma \backslash \tilde{H}, \chi)$ を通常のように定義し, その部分空間 $L_0^2(\Gamma \backslash \tilde{H}, \chi)$ を Γ° の各 cusp での Fourier-Bessel 展開の定数項の vanishing condition を加えた空間とする. 更に, $L_0^2(\Gamma \backslash \tilde{H}, \chi)$ の部分空間 $\mathcal{M}(k, \lambda)$ を次で定める: $\mathcal{M}(k, \lambda) \ni F(z, \phi)$ であることと

$$F(z, \phi) \in L_0^2(\Gamma \backslash \tilde{H}, \chi), \quad \tilde{\Delta} F = \lambda F, \quad \frac{\partial}{\partial \phi} F = -k F$$

とする. この空間は Selberg eigenspace と呼ばれ, 次の基本的レシマが成立する.

$$\begin{array}{ccc} \text{レシマ. } \mathcal{M}(k, -k(k+\frac{1}{2})) & \xrightarrow{\sim} & S_k(\Gamma, \chi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(z, \phi) & \longrightarrow & F(z) \end{array}$$

ここで, $F(z, \phi) = \exp(-\sqrt{-1}k\phi) y^{\frac{k}{2}} F(z)$ とする.

この同型に従って, $S_k(\Gamma, \chi)$ での Hecke 作用素 $T(\Gamma \backslash \Gamma)$ の action を $\mathcal{M}(k, -k(k+1))$ 上に書きかえて

$$T(\Gamma \backslash \Gamma) F(z, \phi) = \sum_{\mu=1}^d \chi(\alpha_\mu) F(\alpha_\mu^{-1}(z, \phi)).$$

このようにして, Hecke 作用素の trace を $\mathcal{M}(k, \lambda)$ 達の上の trace の '和' の中の一つとして捉えるのが Selberg の手法である. ここで我々は, point-pair invariant kernel として

$$k_s(z, \phi; z', \phi') = \exp(-\sqrt{-1}(\phi - \phi')) \frac{(yy')^{\frac{1}{2}}}{(z - \bar{z}')/2\sqrt{-1}} \left| \frac{(yy')^{\frac{1}{2}}}{(z - \bar{z}')/2\sqrt{-1}} \right|^s$$

を用いる ($s \in \mathbb{C}$). この kernel k_s は, $\operatorname{Re} s > 1$ で Selberg の言う (a)-(b) type となり, $\exp(-\sqrt{-1}(\phi - \phi'))$ という形からこの kernel による operator の $\mathcal{M}(k, \lambda)$ 上への作用は, $k=1$ 以外では vanish する. また, この kernel の定義する積分作用素の $\mathcal{M}(1, \lambda)$ の元に対応する固有値は λ のみに depend し, 次で与えられる:

$$h_s(x) = h_s(1, \lambda) = 2^{2+s} \pi B\left(\frac{1}{2}, \frac{s+1}{2}\right) B\left(\frac{s}{2} + \sqrt{-1}x, \frac{s}{2} - \sqrt{-1}x\right).$$

ここで, $\lambda = -\frac{3}{2} - x^2$. $k \neq 0$ なの Γ exceptional な eigenvalue λ は存在しない ($x \in \mathbb{R}$).

$$-\frac{3}{2} = \lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_n > \dots$$

と λ を numbering しておく. まず, Γ が cocompact のときは, Selberg trace formula は次のようになる:

$$K_s(z, \phi; z', \phi') = \sum_{g \in \Gamma \backslash \Gamma} \chi(g) k_s(z, \phi; g(z', \phi'))$$

とおくとき, $t_\lambda \in \mathcal{T}(\Gamma \backslash \Gamma)$ の $\mathcal{M}(1, \lambda)$ 上の trace として,

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} h_s(1, \lambda_\lambda) t_\lambda = t_\lambda \int_{\Gamma \backslash \tilde{H}} K_s(z, \phi; z, \phi) d(z, \phi).$$

Γ に *cusps* があるときには, 上式右辺は発散してしまう. そのときには, $K_s^* = K_s - H_s$ と云う修正が必要である. $k=1$ の場合の問題点の一つは, H_s の定義即ち Eisenstein series の定義にある. 以下の §2-3 でそれらを手え, K_s, H_s のそれぞれの発散項がうち消し合うことを示す. H_s はその形から *discrete* スペクトルには影響を与えないことがわかり, 修正した形の Selberg trace formula が成立することになる.

§2. Eisenstein series

$$K_1, \dots, K_h; K_{h+1}, \dots, K_{h+h'}$$

Γ の *regular cusps* と *irregular cusps* それぞれの Γ -ineq. な類の代表とする.

$$\Gamma_i = \{ \sigma \in \Gamma : \sigma K_i = K_i \};$$

$$\Gamma_\infty = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle, \quad \Gamma'_\infty = \langle -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$$

とし, $\sigma_i \in G$ を次のようにとる: $\sigma_i \infty = K_i$ such that

$$\sigma_i^{-1} \Gamma_i \sigma_i = \begin{cases} \Gamma_\infty, & 1 \leq i \leq h \\ \Gamma'_\infty, & h+1 \leq i \leq h+h'. \end{cases}$$

そして, K_i に付随し E_i : Eisenstein series を次で定義する.

$$\begin{aligned} E_i(z, \phi; \delta) &= \sum_{\sigma \in \Gamma_i \setminus \Gamma} \text{Im}(\sigma_i^{-1} \sigma z)^\delta \exp(-\sqrt{1} \sigma_i^{-1} \sigma \phi) \chi(\sigma)^{-1} P_i \\ &= \sum_{\sigma \in \Gamma_i \setminus \Gamma} \frac{y^\delta}{|cz+d|^{2\delta}} \exp(-\sqrt{1} (\phi + \arg(cz+d))) \chi(\sigma)^{-1} P_i. \\ \sigma_i^{-1} \sigma &= \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで, $r_i = [\Gamma_i : \Gamma_i^0]$, $\Gamma_i^0 = \Gamma_i \cap \text{Ker } \chi$, $\Gamma_i = \langle \gamma_i \rangle$ とするとき,

$$P_i = \begin{cases} \frac{1}{r_i} \sum_{\gamma \in \Gamma_i \setminus \Gamma_i^0} \chi(\gamma) & , 1 \leq i \leq h \\ \frac{1}{2r_i} \sum_{l=1}^{2r_i} (-1)^l \chi(\gamma_i^l) & , h+1 \leq i \leq h+h' \end{cases}$$

P_i は n 等な Hermite 行列で, $\det P_i \neq 0$ ならば, P_i は単位行列になる. K_i が *irregular* なとき, P_i は r_i が奇数ならば *vanish* する. 特に, χ が *trivial* ならば $r_i = 1$ である. また, χ が 1 次元表現のときは, $r_i \neq 2$ ならば P_i は *vanish* する. これらのことは, *irregular cusps* が計算をすすめる上で多くの場合に必要であることを示している.

この Eisenstein series の全平面への解析接続は, Laplacian $\tilde{\Delta}$ に関する固有関数の内積公式とこの場合につくり, それとこの Eisenstein series に適用し Maass - Selberg の関係式を導くことによって行える. これらの方法は, 久保田 [2] で展開されているものと同じである. この Eisenstein series を cusp で Fourier - Bessel 展開したときの constant term は上の手法の中で重要な役割を演ずる. regular cusp K_i に付随した E_i の regular cusp K_i での F.-B. 展開の constant term は次の通りである:

$$\exp(-\sqrt{t}\phi) \left\{ \delta_{ij} P_i y^\delta - \sqrt{t} B(\delta, \frac{1}{2}) g_{ij}^0(\delta) y^{1-\delta} \right\};$$

ここで,

$$g_{ij}^0(\delta) = \sum_{\substack{\tau \in \Gamma_\infty \setminus \sigma_i \Gamma_\infty^{-1} / \Gamma_\infty \\ \tau = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}, c \neq 0}} \frac{\text{sgn } c}{|c|^{2\delta}} P_j \chi(\sigma_i \tau \sigma_j^{-1})^{-2} P_i.$$

irregular cusp の場合に変更すべき量は, $g_{ij}(\delta)$ の和の条件
 $\tau \in \Gamma_\infty \setminus \sigma_i \Gamma_j^{-1} / \Gamma_\infty$ において, $\Gamma_\infty \ni \Gamma_\infty'$ におき換えればよい.

N.B. 1. χ が trivial なときは,

$$P_i = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq h \\ 0, & h+1 \leq i \leq h+h'. \end{cases}$$

このとき, constant term matrix $M = (g_{ij}(\delta))$, $g_{ij}(\delta) = -\sqrt{-1}$
 $\times B(\delta, \frac{1}{2}) g_{ij}^0(\delta)$ は τ のとり方を $\tau \mapsto \tau^{-1}$ とすると

$$M = \left(\begin{array}{c|c} \overset{h}{\begin{matrix} 0 & A \\ -A & 0 \end{matrix}} & \overset{h'}{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right),$$

即ち, M は交代である. また, Maass-Selberg relation は,
 M を $\operatorname{Re} \delta = \frac{1}{2}$ の軸まで解析接続するならば M の左上の部分
 unitary 行列になることを教える. このことは, h が偶数で
 あることを意味する.

次に, H_s の定義を行う:

$$H_s(z, \phi; z', \phi') = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{i=1}^{h+h'} \sum_{\mu=1}^d \chi(\alpha_\mu) \int_{-\infty}^{\infty} h_s(x) E_i(\alpha_\mu(z, \phi); \delta) \overline{E_i(z', \phi'; \delta)} dx.$$

ここで, $\delta = \frac{1}{2} + \sqrt{-1}x$, $\lambda = \delta(\delta-1) - \frac{5}{4}$ とする. $K_s^* = K_s - H_s$ と

おくと, この K_s^* が compact operator となることは §3 で示す.

よりあえずこの事実を仮定しておけば,

$$(1) \quad \sum_{\ell=0}^{\infty} h_s(1, \lambda) t_\ell = t_\ell \int_{\Gamma \backslash \mathcal{H}} K_s^*(z, \phi; z, \phi) d(z, \phi)$$

という修正された Selberg trace formula が成立する。我々の目標は t_0 であるが、これを求めるには次のことに注意すればよい：

$$\begin{cases} l \neq 0 \text{ のとき, } h_0(1, \lambda_l) = 0, \\ l = 0 \text{ のとき, } \lim_{s \rightarrow +0} s h_s(1, \lambda_0) = 12\pi^2. \end{cases}$$

即ち、 $l=0$ のときのみ $h_s(1, \lambda_l)$ は $s=0$ で pole をもつので、 $s=0$ の Residue を考えればよい。ここで大切なことは、(1) 式で、 h_s が $\operatorname{Re} s > 1$ で (a)-(b) type であるのでその左辺が収束し意味をもつのだが、その両辺を解析接続することによって $s=0$ の意味を考えねばならないことである。

§ 3. K_s^* の compact 性

次に、 K_s^* の compact 性について説明しよう。 $H_s(z, \phi; z', \phi')$ が non-bounded となるのは、 z, z' が同時に Γ の同じ cusp に接近するときしかあり得ない。このときの発散項は、1 つの cusp K_i に対して

$$(2) \quad \frac{1}{8\pi^2} \sum_{\alpha\mu K_i = K_i} \chi(\alpha\mu) \int_{-\infty}^{\infty} h_s(r) \sum_{j=1}^{k+k'} (E_j \text{ の const. term}) ({}^t E_j \text{ の const. term}) dr$$

で与えられる。ここで、和 $\alpha\mu K_i = K_i$ の意味は $\alpha\mu\Gamma$ の元で K_i を fix するような元があるときには、coset 分解 $\Gamma \backslash \Gamma = \bigcup_{\mu=1}^d \alpha\mu\Gamma$ の代表元とはじめから K_i を fix する元にとりかえておくと言う準

備の下で, K_i を fix する代表元をとると言うことである.

$$R(i, \mu) = \phi - \phi' + \arg(j(\sigma_i^{-1} \alpha_{\mu}^{-1}, z)) - \arg(j(\sigma_i^{-1}, z))$$

と置く. ここで, $j(\sigma, z) = (cz + d)$, $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする. そのとき,

(2) は次のように書ける:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8\pi^2} \sum_{\alpha_{\mu} K_i = K_i} \chi(\alpha_{\mu}) \int_{-\infty}^{\infty} h_s(r) \left\{ \exp(-\sqrt{r} R(i, \mu)) \left[\operatorname{Im}(\sigma_i^{-1} \alpha_{\mu}^{-1} z)^{\delta} P_i + \operatorname{Im}(\sigma_i^{-1} \alpha_{\mu}^{-1} z)^{1-\delta} g_{ii}(\delta) \right] \right. \\ & \quad \times \left[\operatorname{Im}(\sigma_i^{-1} z')^{\delta} P_i + \operatorname{Im}(\sigma_i^{-1} z')^{1-\delta} \overline{g_{ii}(\delta)} \right] \\ & \quad \left. + \sum_{j \neq i} \exp(-\sqrt{r} R(i, \mu)) \operatorname{Im}(\sigma_i^{-1} \alpha_{\mu}^{-1} z) g_{ji}(\delta) \operatorname{Im}(\sigma_i^{-1} z')^{\delta} \overline{g_{ji}(\delta)} \right\} dr. \end{aligned}$$

ここで, $\operatorname{Re} \delta = \frac{1}{2}$ と Riemann-Lebesgue の定理より, この式の発散する部分は次のようになる.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha_{\mu} K_i = K_i} \chi(\alpha_{\mu}) P_i \exp(-\sqrt{r} R(i, \mu)) \left\{ \operatorname{Im}(\sigma_i^{-1} \alpha_{\mu}^{-1} z) \operatorname{Im}(\sigma_i^{-1} z) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ & \quad \times g_s(\log(\operatorname{Im}(\sigma_i^{-1} \alpha_{\mu}^{-1} z)) - \log(\operatorname{Im}(\sigma_i^{-1} z))). \end{aligned}$$

ここで,

$$g_s(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\sqrt{r} u) h_s(r) dr$$

とする. 一方, K_s の方の発散項については容易な議論で, $\text{cusp } K_i$ に z, z' を近づけるときの主要項は次のようになる:

$$\sum_{\alpha_{\mu} K_i = K_i} \sum_{g \in \Gamma_i} k_s(z, \phi; \alpha_{\mu} g(z', \phi')) \chi(\alpha_{\mu} g).$$

k_s が具体的に与えられているので, この項を漸近的に評価することが出来る. regular, irregular とほぼ同じ故, ここでは irregular cusp の場合のみについて述べよう. z_1, z_2 と共に ∞ に近づけると,

$$\sigma_i(z, \phi) = (z, \phi), \quad \sigma_i(z', \phi') = (z', \phi').$$

$$z_i = x_i + y_i \sqrt{-1}, \quad z'_i = x'_i + y'_i \sqrt{-1} \text{ と書くとき,}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{g \in \Gamma_i} k_s(\sigma_i(z_i, \phi_i), \alpha_\mu g \sigma_i(z'_i, \phi'_i)) \chi(g) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \exp(-\sqrt{-1}(\phi_i - \phi'_i + \delta_l)) \frac{(y_i, y'_i)^{\frac{1}{2}}}{(z_i - \bar{z}'_i - l)/2i} \left| \frac{(y_i, y'_i)^{\frac{1}{2}}}{(z_i - \bar{z}'_i - l)/2i} \right|^s \chi(\eta_i^l) \\ &= \exp(-\sqrt{-1}(\phi_i - \phi'_i)) 2^{s+1} \sqrt{-1} (y_i, y_i)^{\frac{s+1}{2}} \sum_{l=0}^{x_i-1} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^{lx_i+l} (z_i - \bar{z}'_i - lx_i - l)^{-1} \\ & \quad \times |z_i - \bar{z}'_i - lx_i - l|^{-s} \chi(\eta_i^l). \quad (3) \end{aligned}$$

ここで, δ_l は l が odd なとき π , l : even なとき 0 とする. 従って, 次の和が問題となる:

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^{lx_i} (z_i - \bar{z}'_i - lx_i - l)^{-1} |z_i - \bar{z}'_i - lx_i - l|^{-s}.$$

容易にわかるように, この和は $x_i = \text{odd}$ のとき $O((y_i + y'_i)^{s-1})$

となる. 従ってこのとき (3) で $y_i, y'_i \rightarrow \infty$ とするとき K_s

は有界である. 従って, $x_i = \text{even}$ のときのみ発散する. そのとき,

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (A - lx_i)^{-1} |A - lx_i|^{-s} &\sim \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{A} - x_i x}{|A - x_i x|^{s+2}} dx \\ &= -\frac{\sqrt{-1}}{x_i \operatorname{Im} A^s} B\left(\frac{s+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

に注意して変形すれば, 発散項は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \exp(-\sqrt{-1} R(i, \mu)) (\operatorname{Im}(\sigma_i^{-1} \alpha_\mu^{-1} z) \operatorname{Im}(\sigma_i^{-1} z))^{\frac{1}{2}} p_i g_s(\log(\operatorname{Im}(\sigma_i^{-1} \alpha_\mu^{-1} z)) - \\ & \quad \log(\operatorname{Im}(\sigma_i^{-1} z))) \end{aligned}$$

となり, 全体として H_s の発散項と一致する. $x_i = \text{odd}$ の場合

には, $p_i = 0$ であつたからこれできれ..に発散項はうち消し

合っていることがわかる。以上で、 $K_s^* = K_s - H_s$ が bounded operator であることが示された。これを $L_0^2(\Gamma \backslash \tilde{H}, \chi)$ 上に制限した operator として、 K_s^* は compact operator になる。 $\tilde{\Delta}$ の self adjoint 性から、 $F(z, \phi) \in L_0^2(\Gamma \backslash \tilde{H}, \chi)$ に対しては

$$\int_{\Gamma \backslash \tilde{H}} H_s(z, \phi; z', \phi') F(z', \phi') d(z', \phi') = 0,$$

が従うので、 H_s は discrete spectra には影響を受けない。これで、(1) が成り立つことが保証された。

§ 4. $[g]$ を $g \in \Gamma \times \Gamma$ の Γ による共役類とし、

$$\Gamma(g) = \{ \gamma \in \Gamma : g = \gamma g \gamma^{-1} \},$$

$$H^* = H - \bigcup_{i=1}^{h+h'} \bigcup_{\sigma \in \Gamma} \sigma V_i, \quad \sigma_i^{-1} V_i = \{ z \in H : \text{Im } z > Y \}$$

と置く。そのとき、

$$t_\chi \int_{\Gamma \backslash \tilde{H}^*} K_s(z, \phi; z, \phi) d(z, \phi) = \sum_{[g], g \in \Gamma \times \Gamma} 2\pi t_\chi \chi(g) \int_{\Gamma(g) \backslash H^*} k_s(z, 0; g(z, 0)) dz.$$

そこで、

$$I^*(g, s) = \int_{\Gamma(g) \backslash H^*} k_s(z, 0; g(z, 0)) dz$$

と置く。特に、cusp の近傍を切り落さなくても収束する場合があるので、

$$I(g, s) = \int_{\Gamma(g) \backslash H} k_s(z, 0; g(z, 0)) dz$$

とも書く。

(i) 単位類。 $g = 1$.

$$I(1) = \text{vol}(\Gamma \backslash H).$$

(ii) 楕円類. $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の H 内の fixed pt. εg , $cg+d=\bar{\varepsilon}$ とおく. そのとき,

$$I(g, s) = \frac{4\bar{\varepsilon}}{\#\Gamma(g)} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r(1-r^2)^{s-1}}{(1-\bar{\varepsilon}^2 r^2)|1-\bar{\varepsilon}^2 r^2|^s} dr d\theta.$$

Lebesgue の有界収束定理より,

$$\lim_{s \rightarrow +0} s I(g, s) = \frac{4}{\#\Gamma(g) \cdot (s - \bar{\varepsilon})}.$$

(iii) 双曲類で, Γ の双曲点を fix する場合. よく知られているように, g が双曲型で固定点が cusp でなければ双曲点であり, 一方が双曲点ならばもう一方もそうである. 逆に, 一方が cusp ならばもう一方も cusp である. $\lambda \in g$ の eigenvalue とし, $\lambda_0 \in \Gamma(g)$ の生成元の eigenvalue で $|\lambda_0| > 1$ なものとするとき,

$$I(g, s) = \frac{2^{s+2} \log|\lambda_0| \operatorname{sgn} \lambda B(\frac{s+1}{2}, \frac{1}{2})}{|\lambda + \lambda^{-1}|^s |\lambda - \lambda^{-1}|}.$$

(iv) 双曲類で, Γ の cusp を fix する場合. この場合の寄与は, $s=0$ での Residue を考える際には vanish するのだが, Residue をとる前に興味深い項が表れる. そこでここでは, s をかけずに $s \rightarrow 0$ に近づけた形で寄与を書いてみよう. $\lambda \in g$ の eigenvalue とすると,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \lim_{Y \rightarrow 0} \left\{ I^*(g, s) - \frac{\lambda g s (2 \log|\lambda|)}{\pi |1-\lambda^2|} \log Y \right\} \\ = \frac{4\pi\lambda}{|1-\lambda^2|} \log \left\{ \frac{2C(g) \max(|\lambda|, |\lambda|^{-1})}{|\lambda - \lambda^{-1}|} \right\}. \end{aligned}$$

ここで, $C(g)$ は次のように決まる. g の固定する cusps を K_A , K_B とすると, §2 で述べたように Γ -ineq. な cusps の代表系

と $\sigma_i \in G$ を固定したとき,

$$K_A = \tau_A K_i, \quad K_B = \tau_B K_j \quad (\tau_A, \tau_B \in \Gamma)$$

とかける. $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \in G$ を次のようにえらぶ:

$$\gamma \tau_A \sigma_i = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}, \quad \gamma \tau_B \sigma_j = \begin{pmatrix} 0 & * \\ c & * \end{pmatrix}.$$

このとき, $c(\gamma) = |c|$ である. $c(\gamma)$ は K_A, K_B の順序や τ_A, τ_B , γ のとり方によらずに, 一意的に決まる. 更に, $\gamma \in \Gamma$ ならば, $c(\gamma \gamma^{-1}) = c(\gamma)$ も成立する.

N.B. 1. Γ_1, Γ_2 を 2 つの異なる種 Fuchs 群で, 抽象群として同型とする. そのとき, 対応する $c(\gamma_1)$ と $c(\gamma_2)$ は必ずしも同じ値とは限らなく, $(1, \lambda)$ 型の eigenvalue の分布には異なる可能性がある: こと上式は示している (Teichmüller 的なずれが trace formula に影響を与える可能性).

(V) 放物類.

$$B_i = \{ \gamma \in \Gamma \backslash \Gamma : \gamma K_i = K_i, \gamma : \text{parabolic on } I_i \}.$$

$$B_i \ni \gamma = \sigma_i s(\gamma) \begin{pmatrix} 1 & \mu(\gamma) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma_i^{-1}, \quad s(\gamma) = \pm 1$$

とあく. K_i が regular cusp のときは,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow +0} \lim_{Y \rightarrow 0} s \left\{ \sum_{\gamma \in B_i} 2\pi \operatorname{tr} \chi(\gamma) I^*(\gamma, s) - \sum_{\alpha \mu K_i = K_i} g_s(0) s(\alpha \mu) \log Y + \operatorname{tr}(\chi(\alpha \mu) P_i) \right\} \\ = - \frac{4\pi^2 \sqrt{-1}}{x_i} \sum_{\substack{\{\gamma\} \in B_i / \Gamma_i^0 \\ \{\gamma\} \neq \Gamma_i^0}} s(\gamma) \operatorname{tr} \chi(\gamma) \operatorname{cat} \left(\frac{\pi \mu(\gamma)}{x_i} \right). \end{aligned}$$

ここで, $\{\gamma\}$ は B_i / Γ_i^0 の coset $\gamma \Gamma_i^0$ を表している. 次に, K_i が irregular cusp とあるとき, Γ_i^0 の位数 2 , subgr. $(\Gamma_i^0)^2$ を

なること,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow +0} \lim_{Y \rightarrow \infty} s \left\{ \sum_{g \in B_i} 2\pi t_X(g) I^*(g, s) - \sum_{\alpha_\mu K_i = K_i} g_s(0) s(\alpha_\mu) \log Y t_X(\chi(\alpha_\mu) P_i) \right\} \\ = - \frac{4\pi^2 \sqrt{-1}}{2X_i} \sum_{\substack{\{g\} \in B_i / (\Gamma_i^0)^2 \\ \{g\} \neq (\Gamma_i^0)^2}} s(g) t_X(g) \operatorname{cat} \left(\frac{\pi \mu(g)}{X_i} \right). \end{aligned}$$

計算は, Euler-Maclaurin の総和法を用いる.

§ 5. Trace of H_s

$$F_i(z, \phi; \delta) = \sum_{\mu=1}^d \chi(\alpha_\mu) E_i(\alpha_\mu^{-1}(z, \phi); \delta)$$

とあくと, γ の関数は $z \rightarrow z + 2X_i$ で不変故, F.-B. 展開されその定数項は次で与えられる:

$$\exp(-\sqrt{-1}\phi) \left\{ Y^\delta \sum_{\alpha_\mu K_i = K_i} \frac{\operatorname{sgn} d_\mu}{|d_\mu|^{2\delta}} \chi(\alpha_\mu) P_i + Y^{1-\delta} g_{ii}^*(\delta) \right\}.$$

ここで, $\sigma_i^{-1} \alpha_\mu^{-1} \sigma_i = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & d_\mu \end{pmatrix}$ であり,

$$g_{ii}^*(\delta) = -\sqrt{-1} B(\delta, \frac{1}{2}) \sum_{\substack{\{\sigma\} \in \Gamma_\infty \setminus \sigma_i^{-1} \Gamma_i \alpha^{-1} \Gamma_i \sigma_i / \Gamma_\infty \\ \sigma = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}}} \frac{\operatorname{sgn} c}{|c|^{2\delta}} P_i \chi(\sigma_i \sigma \sigma_i^{-1})^{-1} P_i.$$

ただし, K_i が irregular なときは g_{ii}^* の定義で $\Gamma_\infty = \Gamma_\infty'$ として変える. ここで, trace を計算して

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow +0} \lim_{Y \rightarrow \infty} s \left\{ (\text{trace of } H_s) - \sum_{i=1}^{h+h'} \sum_{\alpha_\mu K_i = K_i} g_s(z \log |d_\mu|) \frac{\operatorname{sgn} d_\mu}{|d_\mu|} \log Y t_X(\chi(\alpha_\mu) P_i) \right\} \\ = 4\pi^2 \sum_{i=1}^{h+h'} t_X(g_{ii}^*(\frac{1}{2})). \end{aligned}$$

ここで, $g_{ii}^*(\delta)$ について上式では $\operatorname{Re} \delta > 1$ での Y 収束しか云えぬが, Eisenstein series 自体が全平面に解析接続されるので,

$y_{ii}^*(s)$ も解析接続され, Γ が数論的なときには Eisenstein series の constant term matrix は L 関数を用いて表されるので, これを利用して $y_{ii}^*(\frac{1}{2})$ の値を具体的に計算するのも可能である. Hs の trace から, $\log \gamma$ のかゝった発散項と orbital integral からの発散項が丁度うち消し合っていることを言うには, 特に hyperbolic で cusp を fix する場合には少し細かい分類が必要であるが, ここでは省略する.

§ 6. 以上より, 次の結果を得る.

定理.

$$\mathrm{tr}(T(\Gamma \times \Gamma)) = \frac{1}{2} \sum_{[\gamma] \in S_1} \frac{\mathrm{tr} \chi(\gamma)}{\# \Gamma(\gamma) \cdot (s - \bar{s})} + \frac{1}{2} \mathrm{Res}_{s=0} \zeta^*(s)$$

$$- \sum_{i=1}^{k+k'} \left\{ \frac{\Gamma-1}{8x_i} \sum_{\substack{[\gamma] \in B_i / (\Gamma_i^0)^2 \\ \{\gamma\} \neq (\Gamma_i^0)^2}} s(\gamma) \mathrm{tr} \chi(\gamma) \cot \frac{\pi \mu(\gamma)}{2x_i} \right\} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{k+k'} \mathrm{tr} y_{ii}^*\left(\frac{1}{2}\right).$$

ここで,

$$\zeta^*(s) = \sum_{[\gamma] \in S_2} \frac{\mathrm{sgn} \lambda \log |\lambda_0| \mathrm{tr} \chi(\gamma)}{|\lambda + \lambda^{-1}|^s |\lambda - \lambda^{-1}|};$$

S_1 は $\Gamma \times \Gamma$ の Γ による elliptic conjugacy classes, S_2 は $\Gamma \times \Gamma$ の Γ による hyperbolic conjugacy classes で Γ の hyperbolic point を fix するものについての和を表す.

N.B. 3. $\zeta^*(s)$ は, $\mathrm{Res} s > 1$ では一般論から絶対収束する. 更に, 全平面への解析接続はこの trace formula によって

なされる。従って、 $t_1(T(\Gamma \times \Gamma))$ の具体的な値を手えるには、 $\zeta^*(s)$ の別な面からの解析接続が必要となる。

N.B. 4. χ が real な表現のときは、楕円類、放物類の寄手は純虚数であり、消滅する。従って、 ζ_{ii}^* のみが残る。

$$\text{Car. 1. } \Phi: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

と云う $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ による conjugation により、 $\Phi(\Gamma) = \Gamma$, $\chi \cdot \Phi = \bar{\chi}$, α : diagonal で、 Γ -ineg. cusps の集合が $\{0, \infty\}$ に含まれるとする。そのとき、

$$t_1(T(\Gamma \times \Gamma)) = \frac{1}{2} \text{Res}_{s=0} \zeta^*(s).$$

Car. 2. χ が1次の表現で、 $\chi^2 = \text{id.}$ のとき、

$$d_1 = \dim S_2(\Gamma, \chi) = \frac{1}{2} \text{Res}_{s=0} \zeta^*(s).$$

Car. 3. χ が2次のとき

$$d_1 = \frac{1}{2} \text{Res}_{s=0} \zeta^*(s) - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{l+l'} t_1 \zeta_{ii}^*\left(\frac{1}{2}\right).$$

我々は、 $\Gamma \ni -1_2$ と仮定して話をすすめてきた。 $\Gamma \ni -1_2$ で $\chi(-1_2) = -1$ の場合にも全く同様に出来、regular, irregular の区別はなくなり、parabolic から、寄手は

$$-\sum_{i=1}^l \left\{ \frac{\sqrt{-1}}{4x_i} \sum_{\substack{\{g\} \in B_i/\Gamma_i^0 \\ \{g\} \neq \Gamma_i^0}} t_1 \chi(g) \cot \frac{\pi \mu(g)}{x_i} \right\}$$

となる。ここで、 $\sigma_i^{-1} g \sigma_i = \pm \begin{pmatrix} 1 & \mu(g) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. B_i の定義も parallel である。更に、上記の Car. 達は、 $\Gamma \ni -1_2$ で χ : odd の場合にも同様に成立する。特に、 $\Gamma = \Gamma_0(p)$ (p : prime), $\chi(g) = \chi(d)$

$(g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})$, χ Dirichlet 指標の場合は上記 Cor. 1 に含まれている.

Problem. Zeta 関数 $\zeta^*(s)$ に関数等式がもしあれば, それを決定せよ.

References

- [1] S. Akiyama, T. Hiramatsu and Y. Tanigawa, On traces of Hecke operators on the space of cusp forms of weight 1, preprint.
- [2] T. Kubota, Elementary theory of Eisenstein series, Tokyo - New York : Kodansha and Halsted, 1973.