

2個の凸な物体による散乱行列の極

大阪大学理学部 井川 満 (M. Ikawa)

§1. 序 $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$, 奇数) における波動方程式

$$\square u(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$$

$$\Delta u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

に支配される振動現象を考える。 $\mathcal{O}$ を $\mathbb{R}^n$ の有界な開集合で、 $\Gamma = \partial \mathcal{O}$ は滑かで

$$(1.1) \quad \Omega = \mathbb{R}^n - \bar{\mathcal{O}} : \text{連結}$$

となるものとする。この有界な物体による散乱を考える。 $\mathcal{O}$ によってきまる散乱行列を $\mathcal{S}(z)$ と記す。 $\mathcal{S}(z)$ は $\mathcal{L}(L^2(S^{n-1}))$ 値関数で全複素平面 $\mathbb{C}$ で meromorphic で、 $\text{Im } z \leq 0$ で正則なものである。

有界な物体と散乱行列とは 1対1に対応している、すなわち、 $\mathcal{O}$ と $\tilde{\mathcal{O}}$ を2つの有界な物体としよう。それぞれに対応する散乱行列を $\mathcal{S}(z)$ 及び $\tilde{\mathcal{S}}(z)$ と記そう。もし、

$$\mathcal{S}(z) = \tilde{\mathcal{S}}(z)$$

ならば,

$$\mathcal{O} = \tilde{\mathcal{O}}$$

が従う。すなわち、物体の幾何的情報のすべては $\mathcal{I}(z)$ の中に含まれている。我々は次の問題を考えたい。

問題 物体 $\mathcal{O}$ の幾何学的性質は $\mathcal{I}(z)$ の中にどのように現れているか。

この問題は現在のところ、ほとんど未開拓であって、解っている部分は極めて少ない。そのうちの代表的なものを挙げる:

1. Non-trapping の場合 Melrose [9] により, $\mathcal{O}$ が幾何光学の意味で non-trapping ならば, ある $a, b > 0$ が存在して

$$\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z \leq a \log(|z|+1) + b\}$$

には $\mathcal{I}(z)$ の極は存在しない。

2. 2個の strictly convex な物体.

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$$

で, $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ は有界かつ strictly convex であり, $\overline{\mathcal{O}_1} \cap \overline{\mathcal{O}_2} = \emptyset$ とする. $\Gamma_l = \partial \mathcal{O}_l$ ($l=1, 2$) とおく. $A_l \in \Gamma_l$ を

$$|A_1 - A_2| = \operatorname{dis}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$$

となるものとする. $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ が strictly convex であるから

A_1, A_2 は一意に決まる. $d = |A_1 - A_2|$ とおく. A_2 の近くでの Γ_2 の幾何的性質から決まる定数の列

$$0 < c_0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots$$

$$(c_m \rightarrow \infty \text{ as } m \rightarrow \infty)$$

が存在して, 次が成り立つ: $\alpha > 0$ を一つ固定する毎に, ある $J > 0$ が定まり, $\text{Im } z \leq \alpha$, $|\text{Re } z| \geq J$ の範囲では, $\mathcal{S}(z)$ の poles は

$$\frac{\pi}{d} j + \sqrt{-1} c_m, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

の近傍にのみ存在する. 勿論 $\text{Im } z \leq \alpha$, $|\text{Im } z| \geq J$ の範囲にある上の格子点の近くには必ず存在すること, z の j に関する漸近的位置の詳しい形も与えられている (Ikawa [3], C. Gerard [2]).

上の結果において, A_1, A_2 における Γ_1, Γ_2 の曲率が消える場合には, どのような変化が $\mathcal{S}(z)$ の極の分布に現れるであろうか. c_m ($m = 0, 1, 2, \dots$) を与える公式において, Γ_1, Γ_2 の A_1, A_2 における曲率を段々と小さくしていくと, それに連れて c_m が小さくなっていく. A_1, A_2 においてすべての主曲率が 0 になると, c_m も全て 0 になる. 従って

このような場合には, $\mathcal{J}(z)$ の pole は実軸のいくらでも近くに存在することが予想される。しかし, [2], [3] の方法はもはや使えなくなる。

この間について, Ikawa [4] で A_1, A_2 で主曲率が全て 0 になる $\mathbb{R}^3$ における例を考察し, その例に対しては, $\mathcal{J}(z)$ の極は, ある $\gamma > 0$ が存在して

$$\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z \leq (|\operatorname{Re} z| + 1)^{-\gamma}\}$$

の中に無限個存在することが示された。

しかし, [2], [3] の結果から, この場合も極は $\frac{\pi}{d}j$ で表される点の近くにのみ存在して, その点以外の実軸の近傍には極が存在しないことが予想される。しかし, [4] において用いられた証明方法は, Bardas-Guillot-Ralston [1] で証明された trace formula に依るものである。trace formula を用いた方法では, 個々の pole の位置についての情報を得るのは極めてむづかしく, 実質的には不可能といってもさしつかえない程である。

本講演においては, $\mathbb{R}^2$ における例を考察し, その resolvent の上半平面への解析接続を考察する。その結果は上に挙げた問に部分的な答を与える。

§ 2. 主結果

$\theta = \theta_1 \cup \theta_2 \in \mathbb{R}^2$ で次の性質をもつものとする.

$$(1) \quad \theta_1 \subset \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 < 0\},$$

$$(2) \quad A_1 = (0, 0) \in \Gamma_1,$$

$$(3) \quad \Gamma_1 \text{ は } A_1 \text{ の近傍では}$$

$$x_2 = -x_1^{2m} \quad (m \geq 2)$$

と表されており, Γ_1 は A_1 以外では曲率は正となる.

$$(4) \quad \theta_2 \subset \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 > d\} \quad (d > 0),$$

$$(5) \quad A_2 = (0, d) \in \Gamma_2$$

$$(6) \quad \Gamma_2 \text{ は } A_2 \text{ の近傍では}$$

$$x_2 = d + x_1^{2m}$$

と表されており, Γ_2 の曲率は A_2 以外ではいつも正である.

上の性質をもつ θ に対して

$$\Omega = \mathbb{R}^2 - \bar{\theta}, \quad \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

とおく. $\mu \in \mathbb{C}$ に対して 境界値問題

$$(2.1) \quad \begin{cases} (\Delta + \mu^2) u(x) = 0 & \text{in } \Omega \\ u(x) = g(x) & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

ここで $g(x) \in C^\infty(\Gamma)$ とする. $\operatorname{Im} \mu < 0$ とすると,
 (2.1) は $L^2(\Omega)$ の中にはただ一つの解をもつ. この解 $u(x)$ を

$$u(x) = (U(\mu)g)(x)$$

とおこう. 解の正則性定理より, $U(\mu)$ は $C^\infty(\Gamma)$ より,
 $C^\infty(\bar{\Omega})$ への写像となる. (2.1) の μ への依 の仕オより
 直ちに, $\operatorname{Im} \mu < 0$ において $U(\mu)$ は $\mathcal{L}(C^\infty(\Gamma), C^\infty(\bar{\Omega}))$ -
 値正則関数となる. 我々は $\operatorname{Im} \mu \geq 0$ に $U(\mu)$ を解析接続す
 ることを考える.

定理 1. 我々は Γ_1, Γ_2 の定義に現る m が

$$(2.2) \quad m \geq 4$$

を満しているものとする.

$$\alpha = \frac{1}{m-1}$$

とおく.

任意の $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ に対して, ある定数 $C_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} > 0$
 がとれて $U(\mu)$ は下で与えられる領域まで解析的に接続さ
 れる:

$$(2.3) \quad \left\{ \mu; \operatorname{Im} \mu \leq |\operatorname{Re} \mu|^{-(1+2\alpha)^{-1}-\varepsilon_1}, |\operatorname{Re} \mu| \geq C_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \right\} \\
 - \bigcup_{\lambda=-\infty}^{\infty} \left\{ \mu; \operatorname{Im} \mu \geq 0 \text{ かつ } \left| \frac{\pi}{\alpha} \lambda - \operatorname{Re} \mu \right| < \varepsilon_2 \right\}.$$

$U(\mu)$ の極と $\mathcal{J}(z)$ の極は一致することは知られているので、上の定理は $\operatorname{Im} z \leq (|\operatorname{Re} z| + 1)^{-(1+2\alpha)^{-1} - \varepsilon_1}$ の範囲では $\frac{\pi}{d}j$ ($j=0, \pm 1, \dots$) 以外には $\mathcal{J}(z)$ は pole をもたないことがわかる。今後の課題としては、 $\frac{\pi}{d}j$ の近くに実際に pole があるかといことがある。又上の領域の外での pole の分布の仕方の研究も勿論重要であるが、こちらの方はこの方法ではほとんど不可能に近い印象である。従って、本講演で用いたのとは別の考察が必要のようである。

§3. 証明の方針

Oscillating boundary data on Γ_1

$$(3.1) \quad g(x, \mu) = e^{-i\mu x \cdot \omega} f(x),$$

$\operatorname{supp} f \subset \text{small neighborhood of } A_1$

に対して (2.1) の解の構成を考える。

Proposition 3.1. $\omega \in S^1$ のえで $(0, 1)$ に十分近いものとし、

$$\varphi_1(x) = x \cdot \omega$$

とおく。この時 phase function の列 $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ で、

$$|\nabla \varphi_j| = 1$$

$$(3.2) \quad \varphi_{2n}(x) = c_0(x) + 2nd + c_1(x) n^{-1-2\alpha} + \dots \\ + c_M(x) n^{-1-(M+1)\alpha},$$

$$(3.3) \quad \varphi_{2n+1}(x) = \tilde{c}_0(x) + (2n+1)d + \tilde{c}_1(x) n^{-1-2\alpha} + \dots + \tilde{c}_M(x) n^{-1-(M+1)\alpha},$$

また Γ_1 の A_1 の近くでは

$$(3.4) \quad (\varphi_{2n} - \varphi_{2n-1})(x) = e_0(x) + e_{N-1}(x) e^{-1-N\alpha} \\ + e_N e^{-1-(N+1)\alpha} + \dots + e_M(x) e^{-1-(M+1)\alpha},$$

Γ_2 上の A_2 の近くでは

$$(3.5) \quad (\varphi_{2n+1} - \varphi_{2n})(x) = \tilde{e}_0(x) + \tilde{e}_{N-1}(x) e^{-1-N\alpha} \\ + \tilde{e}_N e^{-1-(N+1)\alpha} + \dots + \tilde{e}_M(x) e^{-1-(M+1)\alpha}$$

をみたすものがとれる。ここで

$$(3.6) \quad |e_0(x)|, |\tilde{e}_0(x)| \leq C_N |x_1|^N$$

ここで、 N はあらかじめ任意に選んで固定する。 $\{\varphi_j\}$, M はこれに依存する。

上の性質をみたす $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ に対し

$$u_j(x, \mu) = e^{-i\mu\varphi_j(x)} v_j(x, \mu), \\ v_j(x, \mu) = \sum_{p=0}^P v_{jp}(x) (i\mu)^{-p}$$

の形の関数列を次により順次定めよう:

$$T_j = 2\nabla\varphi_j \cdot \nabla + \Delta\varphi_j$$

とおく. v_{00} を

$$\begin{cases} T_0 v_{00} = 0 & \text{in } \Omega(\delta) \\ v_{00} = f & \text{on } S_1(\delta), \end{cases}$$

ここで $S_1(\delta) = \Gamma_1 \cap \{A_1 \text{ の } \delta \text{ 近傍}\}$, $\Omega(\delta)$ は $A_1 A_2$ の δ 近傍とする. $p=1, 2, \dots$ に対し v_{0p} を

$$\begin{cases} T_0 v_{0p} = -\Delta v_{0,p-1} & \text{in } \Omega(\delta) \\ v_{0p} = 0 & \text{on } S_1(\delta). \end{cases}$$

$j \geq 1$ に対し v_{jp} は

$$\begin{cases} T_j v_{jp} = \Delta v_{j,p-1} & \text{in } \Omega(\delta) \\ v_{jp} = v_{j-1,p} & \text{on } S_{\epsilon(j)}(\delta) \end{cases}$$

ここで, $\epsilon(j)=1$, j : 偶, $\epsilon(j)=2$, j : 奇 と定める.

Lemma 3.2.

$$(3.7) \quad v_{2n,p}(x) \sim w_{p0} n^p + w_{p1} n^{p-d} + \dots$$

$$(3.8) \quad v_{2n+1,p}(x) \sim \tilde{w}_{p0} n^p + \tilde{w}_{p1} n^{p-d} + \dots$$

なる展開をもつ.

$$\operatorname{Im} \mu = \sigma < 0 \text{ に対し}$$

$$u(x, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n(x, \mu)$$

上の級数は収束し,

$$(3.9) \quad (\Delta + \mu^2) u(x, \mu) = (i\mu)^{-P} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-i\mu \varphi_n(x)) \Delta V_{np}(x),$$

$$(3.10) \quad |u(x, \mu) - g(x, \mu)| \leq C_{N,2,\varepsilon_0} |\mu|^{-2N}$$

$$\text{for } x \in \Gamma_1 \text{ and } |x_1| \leq |\mu|^{-2}$$

$$(3.11) \quad |u(x, \mu)| \leq C_{N,2,\varepsilon_0} |\mu|^{-2N}$$

$$\text{for } x \in \Gamma_2 \text{ and } |x_1| \leq |\mu|^{-2}.$$

次に $\text{Im } \mu \geq 0$ への $u(x, \mu)$ の解析接続を考える.

もし, (3.2) において $c_1(x) = \dots = c_M(x) = 0$ と仮定する

と,

$$u_e = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}(x, \mu) = e^{-i\mu(c_0(x) + znd)} \\ \times \sum_{p=0}^P (i\mu)^{-p} (w_{p0} n^p + \dots)$$

となる. 従って $u_e(x, \mu)$ は $z = e^{-izd\mu}$ とおくと

$$e^{-i\mu c_0} w_{pl} (i\mu)^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} z^n n^{p-\alpha l}$$

の形の関数の和で表される. この形の関数の z に関する解析接続を考察しよう. $|z| < 1$ に対して

$$F(z, \lambda; m) = \sum_{n \geq m} z^n n^{-\lambda}$$

とおこう。 $\lambda \in \mathbb{C}$ とする。

Lemma 3.3. 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ と正の数 m に対して z の関数としての $F(z, \lambda; m)$ は

$$D = \mathbb{C} - [1, \infty)$$

に解析接続できる。かつ、次の評価式が成り立つ:

$$|F(z, \lambda; m)| \leq C_{K, a} \frac{\Gamma(\operatorname{Re} \lambda + a)}{|\Gamma(\lambda + a)|} m^{-\operatorname{Re} \lambda} |z|^m (1 + |z|)^a$$

for all $\operatorname{Re} \lambda > -a$ and $z \in K$

ここで、 K は D の任意の compact 部分集合、 a は任意の正の整数とする。 $C_{K, a}$ は K と a に依存して決まる定数。

この結果を (3.9), (3.10), (3.11) に適用して定理を得る。この時、上の説明では (3.2) における係数 $c_j(x)$, $j \geq 1$ はすべて 0 と仮定した。これが 0 でないの、この取り扱いには perturbation として行う。そのために、

$$\operatorname{Im} \mu \leq (|\operatorname{Re} \mu| + 1)^{-(1+2d)^{-1} - \varepsilon_1}$$

の条件を用いる。

ここでは Proposition 3.1 の証明には全く触れなかった。これまでの説明で解るように、Proposition 3.1 を認めると、それ以外はどちらかといえば、これまで知られてい

る方法も注意深く適用すれば良い。

定理1における仮定 $m \geq 4$ がどこに用いられたかが
又、以上の説明の中には全然現れていない。これは、Proposition
の証明の過程で用いられていることを注意するにとどめよう。
Proposition 3.1 の証明は相当に長くなる。その本質的部分
は A_1 と A_2 の近傍で反射を繰り返す geometric optics の
ray の 反射回数が増加してゆく場合の反射回数に関する漸
近挙動を得ることである。この部分に A_1, A_2 における曲率
が消えていくか、消えていないかの差が最も本質的に現れる。

§4. 今後の問題

直接的には、§2に記したように、 $\frac{\pi}{\alpha}\delta$ の近くに
 $\delta(2)$ の pole が実際存在するかどうかを調べることが挙げ
られる。

次に、 $n \geq 3$ の場合を考察する必要がある。 $n=2$ と3
の違がいても、Proposition 3.1 を証明する時の複雑さの違
いとして現れる。

現在ほとんど手のついてない問題としては、いくつか
の凸な物体に対しては、 $\delta(2)$ の pole は Ω の (あるいは
 $\partial\Omega$ の) 何から決められているのかを具体的に知ること。

参考文献

- [1] C.Bardos, J.C.Guillot and J.Ralston, *La relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non borné. Application a la théorie de la diffusion*, Comm.Partial Diff. Equ., **7**(1982), 905–958.
- [2] C.Gérard, *Asymptotique des poles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convexes*, Bull.S.M.F. Tome 116 Mémoire n° **31**, 1989.
- [3] M.Ikawa, *On the poles of the scattering matrix for two strictly convex obstacles*, J.Math. Kyoto Univ.**23**(1983), 127–194.
- [4] M.Ikawa, *Trapping obstacles with a sequence of poles of the scattering matrix converging to the real axis*, Osaka J.Math., **22**(1985), 657–689.
- [5] M.Ikawa, *On scattering by obstacles*, Proceeding of ICM-90, Springer Verlag, 1991, 1145–1154.
- [6] M.Ikawa, *Scattering by two convex bodies*, Séminaire Equation aux Dérivées Partielles, Ecole Polytechnique, 1991–1992 Exposé n° XIII.
- [7] P.D.Lax and R.S.Phillip, *Scattering Theory*, Revised Edition, Academic Press, New York, 1989.
- [8] P.D.Lax and R.S.Phillip, *A logarithmic bound on the location of the poles of the scattering operator*, Arch.Rat.Mech., **40**(1971), 269–280.
- [9] R.Melrose, *Singularities and energy decay in acoustical problem*, Duke Math.J., **46**(1979), 43–59.
- [10] B.R.Vainberg, *On the short wave asymptotic behaviour of solutions of stationary problems and the asymptotic behaviour as $t \rightarrow \infty$ of solutions of non-stationary problems*, Russian Math.Surveys, **30-2**(1975), 1–58.
- [11] W.A.Veech, *A second course in complex analysis*, Benjamin, New York, 1967.